$$\frac{d^2u}{dt^2}+1001\cdot\frac{du}{dt}+1000\cdot u=0 \qquad u(0)=1 \qquad u'(0)=-1$$

a) Convertir la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones de primer orden y discretizarlo mediante el método de Euler.
b) Hallar la condición de estabilidad del problema numérico planteado, es decir, el valor de $k_{\max}$ tal que $k<k_{\max}$.
c) Con las condiciones iniciales dadas, la solución del problema es $u(t)=e^{-t}$, es decir que solo está activa la componente lenta. Mostrar que con $k>k_{\max}$ cualquier perturbación dispara la componente rápida que se amplifica tornando inestable el cálculo.

Ecuaciones diferenciales rígidas: La magnitud de la derivada crece pero la solución no... El error puede crecer mucho y dominar los cálculos.

Las edr en la solución exacta tienen un término de la forma e^{-ct}, este término es la solución transitoria. La parte más importante de la solución es la solución de estado estacionario. La parte transitoria decae rápidamente a cero al aumentar t, pero la derivada no decae tan rápido.

a) Discretización mediante Euler

$$\frac{d^2y}{dt^2}+1001\frac{dy}{dt}+1000y=0 \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=-1$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-1001\frac{dy}{dt}-1000y$$

Se efectúa un cambio de variables:

$$y(t)=u_1(t) \qquad y(0)=u_1(0)=1$$

$$y'(t)=u_1'(t)=u_2(t) \qquad y'(0)=u_2(0)=-1$$

$$y''(t)=u_1''(t)=u_2'(t)$$

Se utilizan las aproximaciones: $u_1\to w_1 \qquad u_2\to w_2 \qquad \frac{dw_1}{dt}=w_2$

Planteando Euler

$$w_{1,n+1}=w_{1,n}+k.f(t_n,w_{1,n},w_{2,n})=w_{1,n}+k.w_{2,n}$$

$$w_{2,n+1}=w_{2,n}+k.f(t_n,w_{1,n},w_{2,n})=w_{2,n}-k.(1001w_{2,n}+1000w_{1,n})$$

b) Condición de estabilidad

$G = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 1000.k & 1-1001.k \end{bmatrix}$ $\qquad (1-\lambda)(1-1001k-\lambda)+1000k^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1-k \quad \lambda_2 = 1-1000k$

$-1 < 1-k < 1 \quad \Rightarrow 0 < k < 2$

$-1 < 1-1000k < 1 \Rightarrow 0 < k < 0,002$ $\qquad k_{\max} < 0,002$

c) Perturbación experimental

Se considera t = 0.12

Solución exacta: $\quad y = e^{-t} \quad y(0.12) = e^{-0.12} = 0.8869204$

$k_1 = 0,0015 < k_{\max} \rightarrow 80 pasos \quad u_1(0.12) = 0.8868405 \qquad e_{rel1} = 0,00009$

$k_2 = 0,0030 > k_{\max} \rightarrow 40 pasos \quad u_1(0.12) = 0.8867605 \qquad e_{rel2} = 0,00018$

$\frac{k_2}{k_1} \approx \frac{e_{rel2}}{e_{rel1}} \approx 2$ $\qquad$ Método de Orden 1

Paso k = 0.0015				
n	**t_n**	**w_1**	**w_2**	**y_{exacta}**
0	0.0000	1.000000	-1.000000	1.000000
1	0.0015	0.998500	-0.998500	0.998501
2	0.0030	0.997002	-0.997002	0.997004
3	0.0045	0.995507	-0.995507	0.995510
4	0.0060	0.994013	-0.994013	0.994018
5	0.0075	0.992522	-0.992522	0.992528
6	0.0090	0.991034	-0.991034	0.991040
7	0.0105	0.989547	-0.989547	0.989555
8	0.0120	0.988063	-0.988063	0.988072
9	0.0135	0.986581	-0.986581	0.986591
10	0.0150	0.985101	-0.985101	0.985112
….	….	….	….	….
….	….	….	….	….
70	0.1050	0.900254	-0.900254	0.900325
71	0.1065	0.898903	-0.898903	0.898975
72	0.1080	0.897555	-0.897555	0.897628
73	0.1095	0.896208	-0.896208	0.896282
74	0.1110	0.894864	-0.894864	0.894939
75	0.1125	0.893522	-0.893522	0.893597
76	0.1140	0.892182	-0.892182	0.892258

Paso k = 0.0030				
n	**t_n**	**w_1**	**w_2**	**y_{exacta}**
0	0.0000	1.000000	-1.000000	1.000000
1	0.0030	0.997000	-0.997000	0.997004
2	0.0060	0.994009	-0.994009	0.994018
3	0.0090	0.991027	-0.991027	0.991040
4	0.0120	0.988054	-0.988054	0.988072
5	0.0150	0.985090	-0.985090	0.985112
6	0.0180	0.982134	-0.982134	0.982161
7	0.0210	0.979188	-0.979188	0.979219
8	0.0240	0.976250	-0.976250	0.976286
9	0.0270	0.973322	-0.973322	0.973361
10	0.0300	0.970402	-0.970402	0.970446
….	….	….	….	….
….	….	….	….	….
30	0.0900	0.913808	-0.913808	0.913931
31	0.0930	0.911066	-0.911066	0.911194
32	0.0960	0.908333	-0.908333	0.908464
33	0.0990	0.905608	-0.905608	0.905743
34	0.1020	0.902891	-0.902892	0.903030
35	0.1050	0.900182	-0.900181	0.900325
36	0.1080	0.897482	-0.897485	0.897628

77	0.1155	0.890843	-0.890843	0.890921
78	0.1170	0.889507	-0.889507	0.889585
79	0.1185	0.888173	-0.888173	0.888252
80	**0.1200**	**0.886841**	**-0.886841**	**0.886920**

37	0.1110	0.894789	-0.894784	0.894939
38	0.1140	0.892105	-0.892116	0.892258
39	0.1170	0.889429	-0.889408	0.889585
40	**0.1200**	**0.886761**	**-0.886802**	**0.886920**

Se plantea una perturbación de 1.10^{-8} y 1.10^{-4}. Los errores relativos son los siguientes:

Paso	**w_1**	**$P = 1.10^{-8}$**	**$P = 1.10^{-4}$**
$k_1 = 0.0015$	9.0E-05	9.0E-05	1.0E-05
$k_2 = 0.0030$	1.8E-04	1.2E+01	1.2E+05