Ejercicio 5. Se tiene la siguiente tabla de valores para la función seno.

x	0.920	0.950	1.000
$\sin(x)$	0.79560	0.81342	0.84147

a) Estimar el valor de la derivada de la función en x=1 utilizando dos aproximaciones en diferencias en atraso y luego obtener un valor más preciso por extrapolación de Richardson

$x_0 = 1 \quad x_1 = 0.950 \quad x_2 = 0.920$

$$f(x_0)'^{(1)} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = 0.56100 \quad \text{Aproximación en atraso (1)}$$

$$f(x_0)'^{(2)} = \frac{f(x_0) - f(x_2)}{x_0 - x_2} = 0.57338 \quad \text{Aproximación en atraso (2)}$$

Cual es el orden de precisión de estas aproximaciones?

$N = OD + OP$

$OP = N - OD = 2 - 1 = 1$

Aplico Richardson:

$$f(x_0)'^{(Rich)} = f(x_0)'^{(2)} - \frac{f(x_0)'^{(2)} - f(x_0)'^{(1)}}{1 - (h_1 / h_2)^p}$$

Siendo

$h_1 = x_0 - x_1 = 0.05$

$h_2 = x_0 - x_2 = 0.08$

$p = 1 \quad$ (Orden de precisión)

b) Construir una fórmula de aproximación en diferencias de segundo orden para la derivada en x=1, y utilizarla para hallar un nuevo valor.

Cuantos puntos necesito para cumplir con el orden que me piden?

$N = OD + OP = 1 + 2 = 3$

Puedo expresar la derivada como una combinación lineal:

$f'(x_0) = \alpha.f(x_0) + \beta.f(x_1) + \gamma.f(x_2)$

Desarrollo por Taylor los valores de $f(x_1)$ y $f(x_2)$ alrededor de $f(x_0)$

$$f(x_1) = f(x_0) - f(x_0)'.h_1 + f(x_0)''\frac{(h_1)^2}{2!} - f(x_0)'''\frac{(h_1)^3}{3!} + ...$$
$$f(x_2) = f(x_0) - f(x_0)'.h_2 + f(x_0)''\frac{(h_2)^2}{2!} - f(x_0)'''\frac{(h_2)^3}{3!} + ...$$

Reemplazando queda:

$$f'(x_0) = (\alpha + \beta + \gamma).f(x_0) - (\beta.h_1 + \gamma.h_2).f(x_0)' + \frac{1}{2}(\beta.h_1^{\ 2} + \gamma.h_2^{\ 2}).f(x_0)'' - \frac{1}{6}(\beta.h_1^{\ 3} + \gamma.h_2^{\ 3}).f(x_0)'''$$

Con lo que llegamos a este sistema de 3x3:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta h_1 + \gamma h_2 = -1 \\ \beta h_1^{\ 2} + \gamma h_2^{\ 2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 32.500 \\ \beta = -53.333 \\ \gamma = 20.833 \end{cases}$$

$f'(x_0) = 32.500.f(x_0) - 53.333.f(x_1) + 20.833.f(x_2) = 0.54038$

c) Discutir sobre la precisión de los valores hallados en los puntos anteriores

Tanto el valor obtenido por extrapolación de Richardson, como el cálculado en el punto b, la precisión es de orden 2 (h^2)