Ejercicio 4.6

Determinar la raíz de la ecuación $x = 7/3 - e^{-2 \cdot x}$ en el intervalo [-1, 1], con los métodos de Newton-Raphson, Bisección y Regula Falsi con 4 decimales significativos. Comparar la cantidad de iteraciones necesarias para llegar a la precisión pedida y con qué velocidad de convergencia lo hacen.

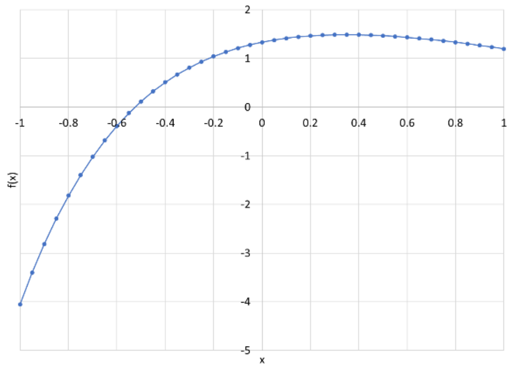
Solución

Comencemos determinar la función f(x) para la cual determinaremos la raíz tal que $f(x) = 0$.

$$x = 7/3 - e^{-2 \cdot x} \quad \rightarrow \quad 7/3 - e^{-2 \cdot x} - x = 0$$

$$f(x) = 7/3 - e^{-2 \cdot x} - x$$

Podemos graficar la función para tener una idea de donde estará su raíz:



Comencemos con el método de la bisección. Las operaciones son sencillas:

1. Elegimos a y b. Lo importante es que los signos de f(a) y f(b) sean distintos. Según la figura, podemos arrancarlo sin problemas con a = -1 y b = 1, ya que f(a) < 0 y f(b) > 0.
2. Estimamos la raíz como $x^k = \dfrac{a^k + b^k}{2}$
3. Actualizamos los límites del intervalo:
   a. Si el signo de $f(x^k)$ es igual al signo de $f(a^k)$ entonces $a^{k+1} = x^k$, $b^{k+1} = b^k$
   b. Sino $a^{k+1} = a^k$, $b^{k+1} = x^k$
4. Calculamos experimentalmente el error como $E^{k+1} = \left| x^{k+1} - x^k \right|$
5. Si la precisión es insuficiente, repetimos desde el paso 2.

En ¿qué iteración debemos cortar? Para que un número tenga 4 DECIMALES significativos su error debe ser menor a 0.00005, es decir $5 \cdot 10^{-5}$.

Podemos estructurar el cálculo en forma de tabla:

k	ak	bk	xk	f(ak)	f(xk)	ak+1	bk+1	Ek+1	p
1	-1.00000	1.00000	0.00000	-4.05572	1.33333	-1	0		
2	-1.00000	0.00000	-0.50000	-4.05572	0.11505	-1	-0.5	0.5	
3	-1.00000	-0.50000	-0.75000	-4.05572	-1.39836	-0.75	-0.5	0.25	
4	-0.75000	-0.50000	-0.62500	-1.39836	-0.53201	-0.625	-0.5	0.125	1
5	-0.62500	-0.50000	-0.56250	-0.53201	-0.18438	-0.5625	-0.5	0.0625	1
6	-0.56250	-0.50000	-0.53125	-0.18438	-0.02901	-0.53125	-0.5	0.03125	1
7	-0.53125	-0.50000	-0.51563	-0.02901	0.04439	-0.53125	-0.515625	0.01563	1
8	-0.53125	-0.51563	-0.52344	-0.02901	0.00804	-0.53125	-0.5234375	0.00781	1
9	-0.53125	-0.52344	-0.52734	-0.02901	-0.01040	-0.52734375	-0.5234375	0.00391	1
10	-0.52734	-0.52344	-0.52539	-0.01040	-0.00116	-0.525390625	-0.5234375	0.00195	1

11	-0.52539	-0.52344	-0.52441	-0.00116	0.00344	-0.525390625	-0.524414063	0.00098	1
12	-0.52539	-0.52441	-0.52490	-0.00116	0.00114	-0.525390625	-0.524902344	0.00049	1
13	-0.52539	-0.52490	-0.52515	-0.00116	-0.00001	-0.525146484	-0.524902344	0.00024	1
14	-0.52515	-0.52490	-0.52502	-0.00001	0.00057	-0.525146484	-0.525024414	0.00012	1
15	-0.52515	-0.52502	-0.52509	-0.00001	0.00028	-0.525146484	-0.525085449	6.1E-05	1
16	-0.52515	-0.52509	-0.52512	-0.00001	0.00014	-0.525146484	-0.525115967	3.1E-05	1

Como vemos, el error resulta menor a la tolerancia recién luego de 16 iteraciones.

A continuación haremos el método de la Regula-Falsi. La única diferencia con el método de la bisección es que en el paso 2 se estima la raíz como:

$$x^k = a^k - \frac{f(a^k)}{f(b^k) - f(a^k)}\left(b^k - a^k\right)$$

La tabla de operaciones resulta:

k	ak	bk	xk	f(ak)	f(xk)	ak+1	bk+1	Ek+1	p
1	-1.00000	1.00000	0.54394	-4.05572	1.45246	-1	0.54394301		
2	-1.00000	0.54394	0.13682	-4.05572	1.43591	-1	0.136818156	0.40712	
3	-1.00000	0.13682	-0.16043	-4.05572	1.11545	-1	-0.160427802	0.29725	
4	-1.00000	-0.16043	-0.34153	-4.05572	0.69494	-1	-0.341528661	0.1811	1.575
5	-1.00000	-0.34153	-0.43785	-4.05572	0.37062	-1	-0.437851687	0.09632	1.274
6	-1.00000	-0.43785	-0.48492	-4.05572	0.18073	-1	-0.484920872	0.04707	1.134
7	-1.00000	-0.48492	-0.50689	-4.05572	0.08421	-1	-0.506894176	0.02197	1.064
8	-1.00000	-0.50689	-0.51692	-4.05572	0.03839	-1	-0.516923868	0.01003	1.03
9	-1.00000	-0.51692	-0.52145	-4.05572	0.01733	-1	-0.521453947	0.00453	1.013
10	-1.00000	-0.52145	-0.52349	-4.05572	0.00779	-1	-0.523490206	0.00204	1.006
11	-1.00000	-0.52349	-0.52440	-4.05572	0.00349	-1	-0.524403509	0.00091	1.003
12	-1.00000	-0.52440	-0.52481	-4.05572	0.00156	-1	-0.524812744	0.00041	1.001
13	-1.00000	-0.52481	-0.52500	-4.05572	0.00070	-1	-0.524996034	0.00018	1.001
14	-1.00000	-0.52500	-0.52508	-4.05572	0.00031	-1	-0.525078111	8.2E-05	1
15	-1.00000	-0.52508	-0.52511	-4.05572	0.00014	-1	-0.525114861	3.7E-05	1

Vemos que en este caso el error resulta menor a la tolerancia recién luego de 15 iteraciones.

Por último usemos el método de Newton-Raphson. En este caso necesitamos:

1. Elegir un valor semilla x^0, razonablemente cercano a la raíz. Por ejemplo $x^0 = -0.5$
2. Estimamos la raíz como $x^{k+1} = x^{k+1} - \dfrac{f(x^k)}{f'(x^k)}$
3. Calculamos experimentalmente el error como $E^{k+1} = \left|x^{k+1} - x^k\right|$
4. Si la precisión es insuficiente, repetimos desde el paso 2.

Necesitamos derivar f(x):

$$f'(x) = 2e^{-2\cdot x} - 1$$

Los resultados son:

k	xk	f(xk)	f'(xk)	xk+1	Ek+1	p
1	0.00000	1.33333	1.00000	-1.333333		
2	-1.33333	-10.72525	27.78383	-0.947308	1.333333333	
3	-0.94731	-3.36936	12.30000	-0.673377	0.386024842	
4	-0.67338	-0.83821	6.68985	-0.548081	0.27393159	0.276735345
5	-0.54808	-0.11124	4.98531	-0.525767	0.125296369	2.28030129
6	-0.52577	-0.00294	4.72407	-0.525145	0.022313848	2.205934655
7	-0.52515	0.00000	4.71696	-0.525145	0.000621559	2.07521566
8	-0.52514	0.00000	4.71696	-0.525145	4.68628E-07	2.008019277

Vemos que el error se reduce por debajo de la tolerancia requerida luego de solo 8 iteraciones.

La gran diferencia de performance entre los métodos puede explicarse por su distinto orden de convergencia. En todos los métodos hemos calculado experimentalmente el orden de convergencia aplicando la fórmula:

$$p = \frac{\log E^{k+1} - \log E^{k}}{\log E^{k} - \log E^{k-1}}$$

Se observa que tanto Bisección como Regula-Falsi tienen orden ~ 1, mientras que Newton-Raphson tiene orden ~ 2. Esto significa que en este último el error disminuye mucho más rápidamente.