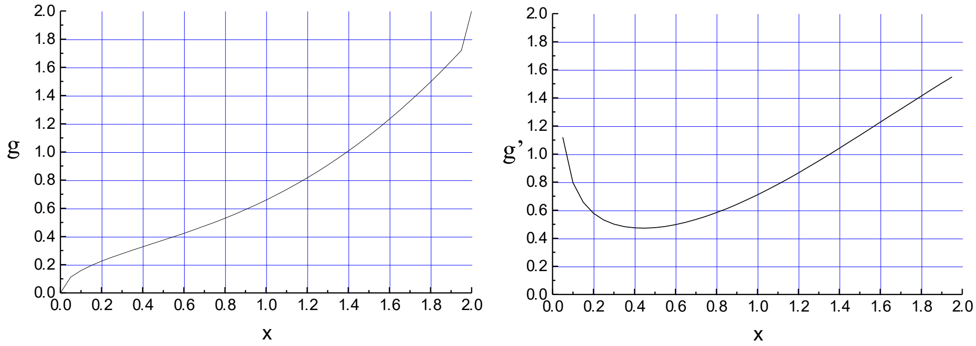
Ejercicio 4.3

La función $F(x) = \text{sen}(x) - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ tiene 2 ceros en I=[0,2]. Uno es x=0; se desea hallar el otro. Para ello se utilizará un método de punto fijo basado en la función de iteración $g(x) = x - F(x)$. Las figuras muestran g y g' en I.

a) Hallar, mediante justificación teórica, un intervalo que contenga al cero buscado como único cero de F(x). Mostrar que en dicho intervalo el método propuesto converge.
b) Hallar el cero con una tolerancia del 1% para el error relativo entre 2 pasos consecutivos.
c) Hallar el orden de convergencia del método y la constante asintótica del error



Solución

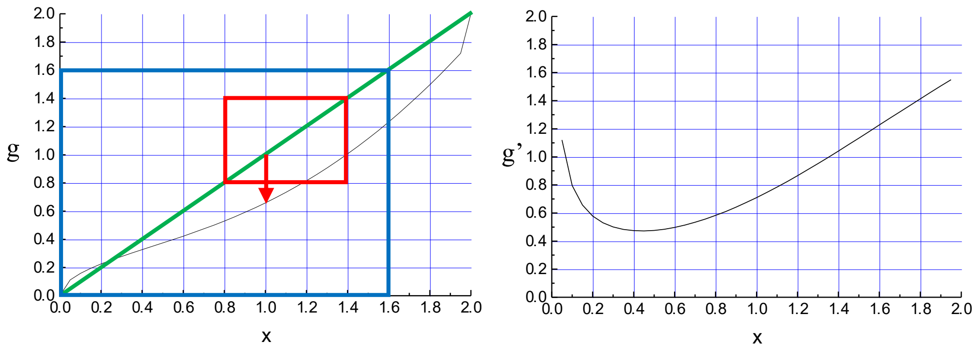
a) En primer lugar, veamos en qué intervalo se puede garantizar la convergencia del método de punto fijo.

Para poder garantizar que exista un punto fijo en el intervalo [a,b] debe cumplirse que:

- 1- $g(x) \in C[a,b]$
- 2- $g(x) \in [a,b] \quad \forall \quad x \in [a,b]$

La primera condición significa que g(x) debe ser continua en el intervalo [a, b]. Esta condición se cumple en todo el rango de valores graficado en el enunciado, ya que se observa que no hay discontinuidades en g(x).

La segunda condición significa que si adoptamos un intervalo [a, b], g(x) no puede "escaparse" de ese mismo intervalo [a, b] para ningún valor intermedio. Para verificar si se cumple para un intervalo, podemos comenzar por graficar una recta a 45º, como en la figura a continuación. Luego elegimos valores de a y b y trazamos un cuadrado como los dibujados en esa misma figura.



Se observa que si elegimos a = 0.8, b = 1.6 surge el cuadrado marcado en rojo. La segunda condición NO se cumple en este intervalo, ya que por ejemplo para x = 1.0, g(1.0) vale 0.63, que es menos de 0.8. Es decir, g(x) se "escapó" de [a,b].

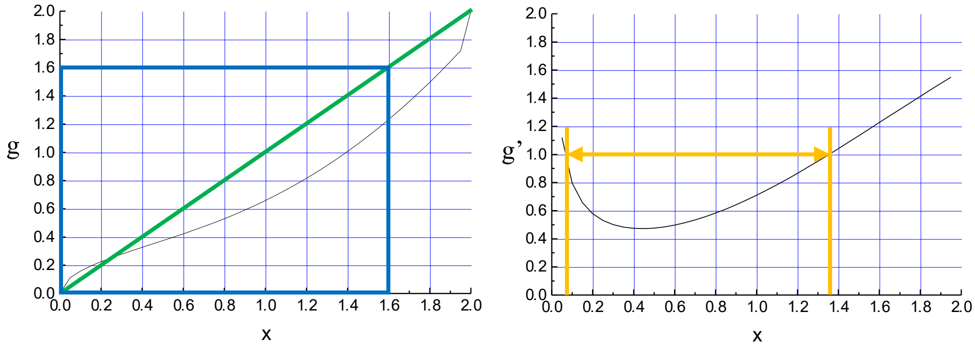
En cambio, si elegimos a = 0, b = 1.6 surge el cuadrado marcado en azul. Vemos que en este caso la función nunca se escapa del intervalo. Por lo tanto, en este intervalo sí se cumple la segunda condición. Por lo tanto, podemos garantizar que existe un punto fijo dentro del intervalo seleccionado.

Para garantizar la convergencia deben cumplirse dos condiciones más, que nos permiten afirmar que el punto fijo dentro del intervalo [a,b] es único:

- 3- $g'(x) \in C[a,b]$
- 4- $|g'(x)| < 1 \quad \forall \quad x \in [a,b]$

La tercera condición significa que la derivada g(x) debe ser continua en el intervalo [a, b]. Evidentemente esta condición también se cumple en todo el rango de valores graficado en el enunciado, ya que se observa que no hay discontinuidades en g'(x).

La cuarta condición significa que g'(x) no puede superar el rango (-1, 1). Podemos acotar en el gráfico en qué región esto se cumple:



Se observa que cuarta condición se cumple solamente en el intervalo [0.08, 1.38]. Dado que en este mismo intervalo se cumplen también las condiciones 1, 2 y 3, podemos afirmar que existe un único punto fijo allí. Además, si arrancamos nuestro método de punto fijo con cualquier valor semilla dentro de este intervalo, ¡tendremos garantizada la convergencia hacia ese punto fijo!

b) Debemos:

1. Elegir una condición inicial x^0. Como vimos en el punto anterior, podemos elegir cualquier valor entre 0.08 y 1.38. Adoptemos un valor en el centro del intervalo, por ejemplo 0.6.
2. Utilizar la fórmula de iteración de punto fijo: $x^{k+1} = g(x^k) = x^k - sen(x^k) + \frac{1}{2}\sqrt{x^k}$
3. Calcular el error absoluto de manera experimental, como $E^{k+1} = |x^{k+1} - x^k|$
4. Calcular el error relativo experimental como $e_r^{k+1} = E^{k+1} / |x^{k+1}|$

Resulta conveniente armar una tabla para volcar el resultado de estas operaciones:

k	xk	xk+1	E	er
0	0.60000	0.42266	0.17734	0.41959
1	0.42266	0.33753	0.08512	0.25220
2	0.33753	0.29686	0.04067	0.13701
3	0.29686	0.27677	0.02009	0.07261
4	0.27677	0.26656	0.01020	0.03828
5	0.26656	0.26129	0.00527	0.02016
6	0.26129	0.25855	0.00275	0.01062
7	0.25855	0.25711	0.00144	0.00560

Se observa que el error resulta menor a 1% (0.01) para x = 0.25711. No obstante, tenemos que tener en cuenta que este valor tiene un error relativo de 0.0056, que se traduce en un error absoluto de 0.00144. Por lo tanto, no todos los dígitos que obtuvimos son significativos, por lo que no deberían escribirse en el resultado final para no dar una falsa impresión de su precisión.

Para escribir el resultado final se redondea la cota de error a un solo dígito significativo, quedando como ± 0.001. Luego se determinan los dígitos significativos y medianamente significativos como vimos en la unidad de errores. El resultado final es: 0.257 ± 0.001

c) Para hallar el orden de convergencia del método podemos utilizar tres estimaciones sucesivas del error absoluto, y aplicar la fórmula

$$p = \frac{\log E^{k+1} - \log E^{k}}{\log E^{k} - \log E^{k-1}}$$

Podemos agregar este cálculo como una columna más en nuestra tabla:

k	xk	xk+1	E	er	p
0	0.60000	0.42266	0.17734	0.41959	-
1	0.42266	0.33753	0.08512	0.25220	-
2	0.33753	0.29686	0.04067	0.13701	1.006
3	0.29686	0.27677	0.02009	0.07261	0.955
4	0.27677	0.26656	0.01020	0.03828	0.961
5	0.26656	0.26129	0.00527	0.02016	0.975
6	0.26129	0.25855	0.00275	0.01062	0.986
7	0.25855	0.25711	0.00144	0.00560	0.992

Vemos que en todas las iteraciones obtenemos un valor $p \simeq 1$. Por lo tanto podemos afirmar que ese es el orden del método.

Para determinar la constante asintótica del error L, debemos recordar su definición:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E^{k+1}}{\left(E^{k}\right)^{p}} = L$$

Por lo tanto, una vez que hemos hecho unas cuantas iteraciones k, podemos estimar L como:

$$L = \frac{E^{k+1}}{\left(E^{k}\right)^{p}}$$

Por ejemplo, adoptando k = 7:

$$L = \frac{E^{8}}{\left(E^{7}\right)^{1}} = \frac{0.00144}{0.00275} = 0.524$$

La constante asintótica del error nos permite comparar la performance de dos métodos que tengan igual orden. En este caso el que posea menor constante asintótica del error convergerá a la solución más rápidamente. Este efecto no es tan dramático como el que produce un cambio en el orden de convergencia.