Ejercicio SEL Indirectos

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales con los Métodos de Jacobi, Gauss-Seidel, de Sobrerrelajaciones (SOR). Obtener el coeficiente de sobrerrelajación óptimo de este último método.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

Se despeja de cada ecuación su variable asociada (por ejemplo, la x_1 de la primera ecuación)

$$\begin{aligned} 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 &= 24 \\ 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 - x_3 &= 30 \\ -x_2 + 4\cdot x_3 &= -24 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4\cdot x_1 &= 24 - 3\cdot x_2 \\ 4\cdot x_2 &= 30 - 3\cdot x_1 + x_3 \\ 4\cdot x_3 &= -24 + x_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 6 - 3/4\cdot x_2 \\ x_2 &= 15/2 - 3/4\cdot x_1 + 1/4\cdot x_3 \\ x_3 &= -6 + 1/4\cdot x_2 \end{aligned}$$

Se plantea el Método de Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = b_i/a_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}/a_{ii}\cdot x_j^{(k)} \qquad \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 6 - 3/4\cdot x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 15/2 - 3/4\cdot x_1^{(k)} + 1/4\cdot x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= -6 + 1/4\cdot x_2^{(k)} \end{aligned}$$

Se plantea el Método de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = b_i/a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}/a_{ii}\cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}/a_{ii}\cdot x_j^{(k)} \qquad \begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 6 - 3/4\cdot x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 15/2 - 3/4\cdot x_1^{(k+1)} + 1/4\cdot x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= -6 + 1/4\cdot x_2^{(k+1)} \end{aligned}$$

Se plantea el Método de Sobrerrelajaciones (SOR)

De Gauss-Seidel se tiene lo siguiente: $x_i^{(k+1)} = b_i/a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}/a_{ii}\cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}/a_{ii}\cdot x_j^{(k)}$

Se resta a ambos lados: $a_{ii}/a_{ii}\, x_i^{(k)}$

quedando: $r_i^{(k)} = x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} = b_i/a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}/a_{ii}\cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}/a_{ii}\, x_j^{(k)}$

Entonces, la sobrerrelajación de los residuos es: $x_{i_{SOR}}^{(k+1)} = x_i^{(k)} + w\cdot r_i^{(k)}$, por lo tanto,

$$x_{i_{SOR}}^{(k+1)} = x_i^{(k)} + w\cdot\left(b_i/a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}/a_{ii}\cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}/a_{ii}\cdot x_j^{(k)}\right)$$

$$x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)} = 6 - 3/4 \cdot x_2^{(k)} - x_1^{(k)} = r_1^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)} = 15/2 - 3/4 \cdot x_1^{(k+1)} + 1/4 \cdot x_3^{(k)} - x_2^{(k)} = r_2^{(k)}$$
$$x_3^{(k+1)} - x_3^{(k)} = -6 + 1/4 \cdot x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} = r_3^{(k)}$$

$$x_{1_{SOR}}^{(k+1)} = x_1^{(k)} + w \cdot \left(6 - 3/4 \cdot x_2^{(k)} - x_1^{(k)}\right)$$
$$x_{2_{SOR}}^{(k+1)} = x_2^{(k)} + w \cdot \left(15/2 - 3/4 \cdot x_1^{(k+1)} + 1/4 \cdot x_3^{(k)} - x_2^{(k)}\right)$$
$$x_{3_{SOR}}^{(k+1)} = x_3^{(k)} + w \cdot \left(-6 + 1/4 \cdot x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right)$$

Los resultados obtenidos para las tres metodologías, con una precisión de 10^{-5} se presentan en la siguiente figura. El cálculo del método de Sobrerrelajación se realizó utilizando un coeficiente *w=1.25* (adoptado a priori).

JACOBI

	x1	x2	x3
0	0.00000	0.00000	0.00000
1	6.00000	7.50000	-6.00000
2	0.37500	1.50000	-4.12500
3	4.87500	6.18750	-5.62500
4	1.35938	2.43750	-4.45313
5	4.17188	5.36719	-5.39063
6	1.97461	3.02344	-4.65820
7	3.73242	4.85449	-5.24414
8	2.35913	3.38965	-4.78638
9	3.45776	4.53406	-5.15259
10	2.59946	3.61853	-4.86649
11	3.28610	4.33379	-5.09537
12	2.74966	3.76158	-4.91655
13	3.17881	4.20862	-5.05960
14	2.84354	3.85099	-4.94785
15	3.11176	4.13039	-5.03725
16	2.90221	3.90687	-4.96740
17	3.06985	4.08149	-5.02328
18	2.93888	3.94179	-4.97963
19	3.04366	4.05093	-5.01455
20	2.96180	3.96362	-4.98727
21	3.02728	4.03183	-5.00909
22	2.97613	3.97726	-4.99204
23	3.01705	4.01990	-5.00568
24	2.98508	3.98579	-4.99503
25	3.01066	4.01243	-5.00355
26	2.99067	3.99112	-4.99689
27	3.00666	4.00777	-5.00222
28	2.99417	3.99445	-4.99806
29	3.00416	4.00486	-5.00139
30	2.99636	3.99653	-4.99879
31	3.00260	4.00304	-5.00087
32	2.99772	3.99783	-4.99924
33	3.00163	4.00190	-5.00054
34	2.99858	3.99864	-4.99953
35	3.00102	4.00119	-5.00034
36	2.99911	3.99915	-4.99970
37	3.00064	4.00074	-5.00021
38	2.99944	3.99947	-4.99981
39	3.00040	4.00046	-5.00013
40	2.99965	3.99967	-4.99988
41	3.00025	4.00029	-5.00008
42	2.99978	3.99979	-4.99993
43	3.00016	4.00018	-5.00005
44	2.99986	3.99987	-4.99995
45	3.00010	4.00011	-5.00003
46	2.99992	3.99992	-4.99997
47	3.00006	4.00007	-5.00002
48	2.99995	3.99995	-4.99998
49	3.00004	4.00004	-5.00001
50	2.99997	3.99997	-4.99999
51	3.00002	4.00003	-5.00001
52	2.99998	3.99998	-4.99999
53	3.00001	4.00002	-5.00000
54	2.99999	3.99999	-5.00000
55	3.00001	4.00001	-5.00000
56	2.99999	3.99999	-5.00000
57	3.00001	4.00001	-5.00000
58	2.99999	4.00000	-5.00000
59	**3.00000**	**4.00000**	**-5.00000**

GAUSS SEIDEL

	x1	x2	x3
0	0.00000	0.00000	0.00000
1	6.00000	3.00000	-5.25000
2	3.75000	3.37500	-5.15625
3	3.46875	3.60938	-5.09766
4	3.29297	3.75586	-5.06104
5	3.18311	3.84741	-5.03815
6	3.11444	3.90463	-5.02384
7	3.07153	3.94040	-5.01490
8	3.04470	3.96275	-5.00931
9	3.02794	3.97672	-5.00582
10	3.01746	3.98545	-5.00364
11	3.01091	3.99091	-5.00227
12	3.00682	3.99432	-5.00142
13	3.00426	3.99645	-5.00089
14	3.00266	3.99778	-5.00056
15	3.00167	3.99861	-5.00035
16	3.00104	3.99913	-5.00022
17	3.00065	3.99946	-5.00014
18	3.00041	3.99966	-5.00008
19	3.00025	3.99979	-5.00005
20	3.00016	3.99987	-5.00003
21	3.00010	3.99992	-5.00002
22	3.00006	3.99995	-5.00001
23	3.00004	3.99997	-5.00001
24	3.00002	3.99998	-5.00001
25	3.00002	3.99999	-5.00000
26	3.00001	3.99999	-5.00000
27	3.00001	4.00000	-5.00000
28	**3.00000**	**4.00000**	**-5.00000**

SOR

	x1	x2	x3
	w	1.25	
0	0.00000	0.00000	0.00000
1	7.50000	2.34375	-6.76758
2	3.42773	3.46069	-4.72664
3	3.39867	3.84650	-5.11631
4	3.04424	3.96056	-4.98325
5	3.02592	3.99080	-5.00706
6	3.00215	3.99808	-4.99883
7	3.00126	3.99966	-5.00040
8	3.00000	3.99996	-4.99991
9	3.00004	4.00000	-5.00002
10	2.99999	4.00000	-4.99999
11	**3.00000**	**4.00000**	**-5.00000**

El coeficiente de sobrerrelajación óptimo w_{optimo} se puede obtener de dos formas: experimental y, si se cumplen determinadas propiedades del sistema, teórica.

Dado el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot x = b$, cualquier método iterativo de resolución puede plantearse de la siguiente manera:

$$x^{(k+1)} = T \cdot x^{(k)} + C$$

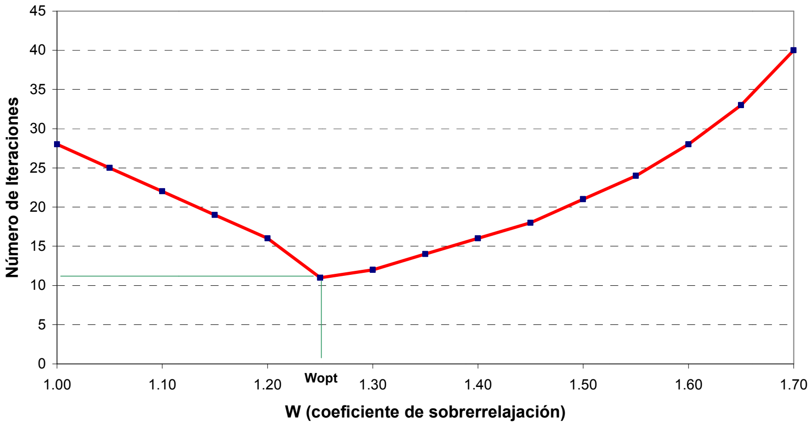
siendo T la matriz de iteración. Para que exista convergencia del método iterativo, la condición necesaria y suficiente es la siguiente:

$$\rho\left(T\right) = m\acute{a}x\left|\lambda_i\right| < 1$$

siendo $\rho\left(T\right)$ el radio espectral de la matriz de iteración. El w_{optimo} es aquel que hace mínimo el radio espectral de matriz de iteración.

El cálculo de forma experimental se plantea en términos de probar que factor de sobrerrelajación llega a la misma precisión de solución en menor cantidad de iteraciones.

w	ITER
1.00	28
1.05	25
1.10	22
1.15	19
1.20	16
1.25	11
1.30	12
1.35	14
1.40	16
1.45	18
1.50	21
1.55	24
1.60	28
1.65	33
1.70	40



$w_{opt} \approx 1.25$ / Precisión = 10^{-5} / Iteraciones = 11

El cálculo de forma teórica se plantea en función del siguiente teorema:

Sea A definida positiva ($x^T \cdot A \cdot x \geq 0$, para todo x) y A simétrica y tridiagonal, entonces:

$$\rho\left(T_{GS}\right) = \left[\rho\left(T_J\right)\right]^2 < 1 \; y \; w_{optimo} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\left[\rho\left(T_J\right)\right]^2}}$$

Siendo T_{GS} y T_J las matrices de iteración de Gauss-Seidel y Jacobi respectivamente.

La forma matricial de las los diferentes métodos de iteración son las siguientes:

$$A = D - L - U \qquad A = \begin{pmatrix} D & U & U \\ L & D & U \\ L & L & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -L & 0 & 0 \\ -L & -L & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -U & -U \\ 0 & 0 & -U \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D: Diagonal
L: Triagonal Inferior (lower)
U: Triangular Superior (upper)

$$Ax = b \rightarrow (D - L - U)x = b \rightarrow Dx = (L + U)x + b$$

Entonces se busca la T_J.

$$A = D - L - U = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{JACOBI} = D^{-1} \cdot \left(L + U\right) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene el radio espectral de la matriz de iteración del método de Jacobi

$$\rho\left(T_{JACOBI}\right) = ? \qquad \det\left(T_{JACOBI} - \lambda \cdot I\right) = -\lambda \cdot \left(\lambda^2 - 0.625\right)$$

$$\rho\left(T\right) = máx\left|\lambda_i\right| < 1 \qquad \rho\left(T_{JACOBI}\right) = \sqrt{0.625} \text{ y } \rho\left(T_{GAUSS-SEIDEL}\right) = 0.625$$

$$w_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left[\sqrt{0.625}\right]^2}} \approx 1.25$$