Enunciado

Se tiene la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Realizar la descomposición LU usando pivoteo parcial:

b) Utilizarla para resolver $A \cdot x = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Resolución

a) Descomposición LU

Se crea primero la matriz de permutación, iniciándola igual a la matriz identidad.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ser intercambia la fila 1 por 3, de manera que el mayor elemento de la primera columna (5), quede en la diagonal. Al hacer este pivoteo se intercambian también las filas de la matriz permutación

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se eliminan las filas 2 y 3, guardando los multiplicadores dentro de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ (0.2) & 0.6 & 4.6 \\ (0.4) & 5.2 & 1.2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se intercambia la fila 2 por 3, para llevar el valor de 5.2 a la diagonal. Tanto la matriz P como los multiplicadores ya calculados se intercambian de fila también:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ (0.4) & 5.2 & 1.2 \\ (0.2) & 0.6 & 4.6 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se elimina la fila 3, guardando el multiplicador dentro de la matriz A:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ (0.4) & 5.2 & 1.2 \\ (0.2) & (0.1415358) & 4.461538 \end{bmatrix} \quad P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente se separa la parte L y U de la matriz A. La diagonal de la matriz L se completa con unos.

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.115385 & 1 \end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 5.2 & 1.2 \\ 0 & 0 & 4.461538 \end{bmatrix} \quad P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede confirmar que la descomposición está bien hecha verificando que se cumpla:

$$L \cdot U = P \cdot A$$

En este caso:

$$L \cdot U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.115385 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 5.2 & 1.2 \\ 0 & 0 & 4.461538 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Resolución del sistema

Se parte de la base que:

$$L \cdot U = P \cdot A$$

Y por lo tanto

$$L \cdot U \cdot x = P \cdot A \cdot x$$

Reemplazando la ecuación:

$$A \cdot x = b$$

Se obtiene:

$$L \cdot U \cdot x = P \cdot b$$

El primer paso es calcular

$$b' = P \cdot b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego se resuelve el sistema:

$$L \cdot y = b' \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.115385 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dado que este sistema es triangular inferior se puede aplicar sustitución directa:

$$\begin{aligned} y_1 &= 3/1 = 3 \\ y_2 &= 1 - 0.4 y_1 = -0.2 \\ y_3 &= 2 - 0.2 y_1 - 0.115385 y_2 = 1.423077 \end{aligned}$$

Finalmente se resuelve:

$$U \cdot x = y \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 5.2 & 1.2 \\ 0 & 0 & 4.461538 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -0.2 \\ 1.423077 \end{bmatrix}$$

Dado que este sistema es triangular superior se puede aplicar sustitución inversa:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1.423077 / 4.461538 = 0.318966 \\ x_2 &= \frac{-0.2 - 1.2 x_3}{5.2} = -0.11207 \\ x_1 &= \frac{4 - 2x_3 - 2x_2}{5} = 0.517241 \end{aligned}$$

Finalmente podemos verificar el resultado:

$$L \cdot U \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.115385 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 5.2 & 1.2 \\ 0 & 0 & 4.461538 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.291955 \\ -1.548853 \\ 1.291955 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Que efectivamente resulta igual a $P \cdot b$: