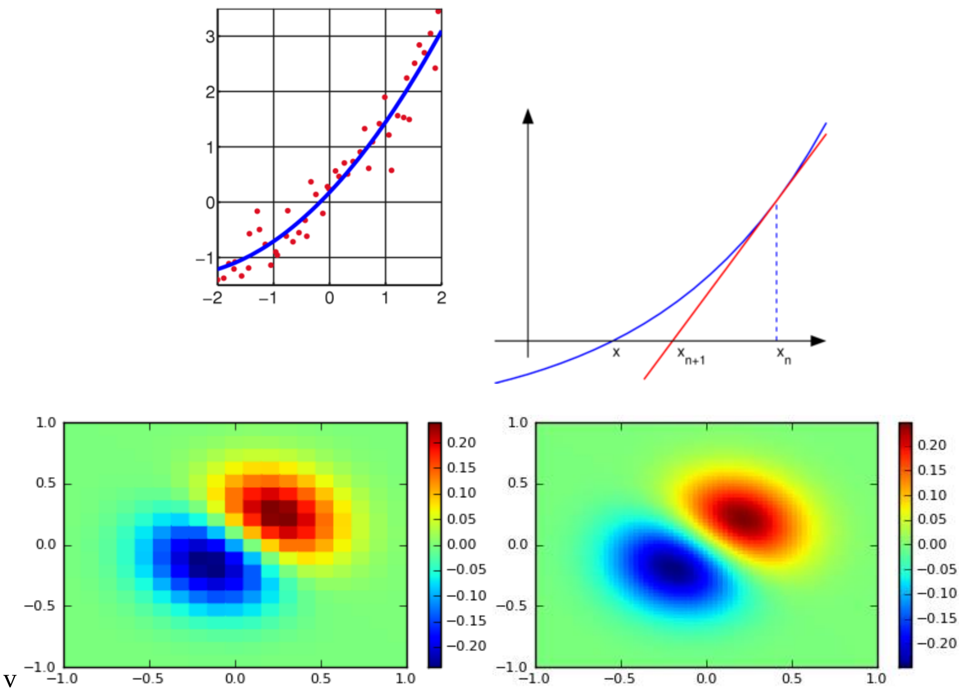
FACULTAD
DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA

GUIA DE PROBLEMAS
2022



Profesor Titular:	Dr. Angel N. Menéndez
Jefe de Trabajos Prácticos:	Mg. Sc. Mariano Ré
Ayudantes de Primera:	Dr. Ing. Pablo E. García
	Dr. Ing. Nicolás D. Badano
	Ing. Marina Lagos

GUÍA Nº 1

EJERCICIOS ELEMENTALES DE PROGRAMACIÓN

1) Calcular $\sum_{i=1}^{N} n_i$ para N=1000, siendo a) ni=i, b) n_i=par, c) n_i=impar.

Resuelto en el Campus

2) Calcular $\sum_{n=1}^{N} s_n$ para N=10000, siendo a) $s_n=1/n$, b) $1/n^2$, c) $(-1)^n 1/n$, d) $(-1)^n 1/n^2$.

3) Dados dos vectores **a** y **b**, de dimensión n=500, programar algoritmos para calcular:

   a) El producto interno entre ellos
   b) La norma L_2
   c) La norma L_∞
   d) La distancia entre los puntos en el espacio euclídeo que ellos representan

Trabajar con $a_i = i$ y $b_i = i^2$, siendo x_i la i-ésima componente del vector.

4) Dadas las matrices **A** y **B**, de dimensión 100x100, hallar:

   a) **AB**
   b) **BA**
   c) $\mathbf{A}^t\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}^t$, $(\mathbf{AB})^t$
   d) la suma de los elementos de la diagonal de los resultados anteriores.
   e) los coeficientes máximos y mínimos de los resultados anteriores
   f) la posición de los coeficientes máximos y mínimos de los resultados anteriores

Trabajar con a) $(a_{ij};b_{ij}) = (1,1)$, b) $(a_{ij};b_{ij}) = (i,1)$, c) $(a_{ij};b_{ij}) = (j,1)$, d) $(a_{ij};b_{ij}) = (i+j, i+j)$

5) Hallar iterativamente $\sqrt[3]{17.35}$, con un error relativo menor al 0.01% utilizando la siguiente ecuación: $x_{i+1} = x_i + \dfrac{N - x_i^n}{n x_i^{n-1}}$, siendo N el número real al que se le quiere calcular su raíz enésima, es decir $\sqrt[n]{N} = x$

Resuelto en el Campus

6) Hallar sen (π/3) con un error relativo menor al 0.01% utilizando la siguiente expansión en serie: $C(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \dfrac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$

7) Genere un algoritmo para hallar los números primos entre 1 y 1000.

GUÍA Nº 2

ERRORES

1) En una computadora, una celda de memoria tiene 2 posiciones binarias para almacenar los signos de la mantisa y del exponente, 11 posiciones decimales para la mantisa y 3 posiciones decimales para el exponente. Por ejemplo, el número π se almacena de la siguiente forma: +31415926536+001. Indicar cómo se almacenan los números:

   a) 2,7182818285 b) -1073741824 c) 0,577216 d) -123E-45

   Indicar cuál es la cota de error relativo que tiene un número almacenado según esta representación.

2) Calcular a+b+c

$$a = 0{,}1234567\ 10^0 \quad b = 0{,}7654321\ 10^4 \quad c = -b\ ,\ t = 7\ ,\ \text{corte}$$

3) Expresar correctamente los siguientes números, utilizando redondeo simétrico. Aclarar la cantidad de dígitos significativos y medianamente significativos.

   a) 0,123456789 ± 0,01
   b) 0,123456789 ± 0,005
   c) 0,123456789 ± 0,00008
   d) 12,3456789 ± 8
   e) 1234,56789 ± 50
   f) 123456,789 ± 100

4) Calcular la siguiente expresión, incluyendo su cota de error absoluto:

$$w = x\,y^2 / z$$

   donde x = 2,0 ± 0,1, y = 3,0 ± 0,2 y z = 1,0 ± 0.1. Indicar qué variable tiene mayor incidencia en el error en w.

5) Calcular las siguientes expresiones, incluyendo sus cotas de error absoluto, donde x = 2,00, y = 3,00 y z = 4,00 (estos valores están correctamente redondeados):

   a) $3\,x + y - z$ b) $x\,y / z$ c) x sen (y / 40)

6) Se quiere estimar la rugosidad de Manning n de un tramo de un río, que puede calcularse a partir de la siguiente ecuación:

$$n = h^{2/3} \cdot i^{1/2} \cdot U^{-1}$$

   donde U es la velocidad media, h es la profundidad media e i es la pendiente. Estos parámetros se midieron en el lugar, obteniéndose los siguientes valores:

$$h = 0.8 \pm 0.1 m \quad i = 0.002 \pm 0.0003 \quad U = 1.0 \pm 0.1\, m/s$$

   a) Obtener el valor de la rugosidad con su cota de error. Expresarlo de manera correcta con redondeo simétrico.

   b) Si pudiera dedicarse un tiempo a afinar la medición de uno de los parámetros del problema, ¿cuál convendría mejorar? Justificar la respuesta.

   c) Suponiendo que ahora se miden el tirante y la velocidad de manera exacta (es decir $h = 0.8 m \quad i = 0.002 \pm \Delta i \quad U = 1.0\, m/s$) ¿con qué precisión es necesario medir la pendiente para obtener un error relativo menor a 10% en la rugosidad?

7) Se dispone de un algoritmo para computar la siguiente integral:

$$I(a,b) = \int_0^1 e^{\frac{-b \cdot x}{(a+x^2)}} dx$$

Utilizando dicho algoritmo se obtuvo la siguiente tabla :

a	*b*	**I**
0,39	0,34	1,425032
0,40	0,32	1,408845
0,40	0,34	1,398464
0,40	0,36	1,388198
0,41	0,34	1,372950

Ahora bien, se midieron las cantidades físicas *z* e *y*, obteniéndose:

z = 0,400 ± 0,003 y = 0,340 ± 0,005

Estimar el error en *I(z,y)* y expresar el resultado final.

Resuelto en el Campus

8) Se tienen las siguientes expresiones algebraicamente equivalentes:

i) $f = (2^{½} - 1)^6$
ii) $f = 1/(2^{½} + 1)^6$
iii) $f = (3 - 2*2^{½})^3$
iv) $f = 1/(3 + 2*2^{½})^3$
v) $f = (99 - 70*2^{½})$
vi) $f = 1/(99 + 70*2^{½})$

Utilizando el valor aproximado 1,4 para la raíz cuadrada de 2, indicar qué alternativa proporciona el mejor resultado.

Resuelto en el Campus

9) Se tiene la expresión $y = \ln [x - (x^2 - 1)½]$

a) Calcular y para x = 30, incluyendo su error absoluto. Suponer que la raíz cuadrada se conoce con 6 decimales correctos y que el error en x es despreciable
b) Obtener una expresión matemáticamente equivalente a la anterior, pero mejor condicionada desde el punto de vista numérico, y recalcular el resultado con el nuevo error.

10) Determinar las cotas para los errores relativos de v y w (que son dos expresiones algebraicamente equivalentes) en los siguientes casos, utilizando la gráfica de proceso:

a) $v = a+a$, $w = 2a$ b) $v = a+a+a$, $w = 3a$

Suponer que *a* es positivo y que los números *2* y *3* tienen una representación exacta en la computadora. Comparar los resultados de las dos expresiones y extraer conclusiones. Calcular dichos errores para *a* = 0,6992 (correctamente redondeado), redondeando a 4 dígitos luego de cada operación aritmética.

11) Considerar las expresiones v = (a-b) / c y w = (a/c) - (b/c). Suponer que a, b y c son positivos, sin errores de entrada y que a es aproximadamente igual a b.

a) Demostrar que el error relativo por redondeo en *w* puede ser mucho mayor que el mismo error en *v*.
b) Calcular dichos errores para *a* = 0,41, *b* = 0,36 y *c* = 0,70, utilizando aritmética de punto flotante con 2 dígitos de precisión.

Resuelto en el Campus

12) Calcular $(v^2 - w^2)^{0.5}$ usando aritmética de punto flotante de 4 dígitos de precisión, con v = 43,21 y w = 43,11, utilizando los siguientes algoritmos:

a) $((v * v) - (w * w))^{0.5}$ b) $((v + w) * (v - w))^{0.5}$

Indicar cuál algoritmo es más conveniente y justificar.

13) Indicar cuál de los siguientes algoritmos es más estable numéricamente para calcular la menor raíz de la ecuación $x^2 - 2x + a = 0$, con a positiva y mucho menor que 1.

a)	$\varepsilon_1=1-a$	$\varepsilon_2=\varepsilon_1^{½}$	$x=\varepsilon_3=1-\varepsilon_2$	
b)	$\varepsilon_1=1-a$	$\varepsilon_2=\varepsilon_1^{½}$	$\varepsilon_3=1+\varepsilon_2$	$x=\varepsilon_4=a/\varepsilon_3$

14) La fórmula f0 = [4 (f-1 + f1) - (f-2 + f2)] / 6 permite interpolar el valor de la función f en x = 0 conociendo sus valores en x-2 = -2, x-1 = -1 , x1 = 1 y x2 = 2.

a) Estimar, mediante la gráfica de proceso, los errores en f_0 debido al redondeo de los valores de la tabla de *f* y al redondeo durante los cálculos.
b) Suponiendo que la función *f* es par y que f_1 y f_2 son del mismo orden, y utilizando el resultado del punto a, obtener una condición que garantice que el error debido al redondeo en los cálculos sea despreciable.

Resuelto en el Campus

15) Se desea evaluar z = cos (α2 - α1) , donde α1 = 1,345 ± 0,0005 y α2 = 1,352 ± 0,0005, ambos medidos en radianes. Los cálculos se efectúan con 7 dígitos de precisión. El valor del coseno se obtiene de una tabla con 5 decimales significativos. Se pide :

a) Calcular *z* y efectuar una estimación de la cota de error mediante la gráfica de proceso. Identificar la principal fuente de error.
b) Repetir el cálculo anterior utilizando el algoritmo alternativo

$$z = \cos \alpha_2 \ \cos \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 \ \operatorname{sen} \alpha_1$$

Explicar cuál de los dos algoritmos es mejor y justificar.

GUÍA Nº 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

A. Métodos Directos

1) Resolver el sistema lineal $A \cdot x = b$ utilizando eliminación de Gauss sin pivoteo, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{Bmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{Bmatrix}$$

2) Calcular la inversa de la matriz *A* resolviendo el sistema $A \cdot X = I$, utilizando eliminación de Gauss, siendo *I* la matriz identidad y *X* la matriz inversa de *A*. ¿Qué es lo que se obtiene si se utiliza pivoteo?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3) Dada la siguiente descomposición *LU* de Doolittle de la matriz *A* efectuada utilizando pivoteo parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{bmatrix} \quad p = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

   a) resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$ siendo
   $$b = \{1 \quad -2 \quad 7\}^T$$
   b) obtener la matriz A y verificar la solución obtenida en a)

4) Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 3.241 & 160 \\ 10200 & 1540 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 163.2 \\ 11740 \end{Bmatrix}$$

   a) Utilizar el método de eliminación de Gauss sin pivoteo y aritmética de punto flotante con t=4 y redondeo simétrico.
   b) Ídem a) pero con pivoteo parcial.
   c) Ídem a), sin pivoteo y con refinamiento de la solución.
   d) Obtener conclusiones.

5) Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 2.15 & -0.924 & -1.29 \\ -4.12 & 2.29 & 0.294 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.22 \\ -3.56 \\ -0.972 \end{Bmatrix}$$

Utilizar eliminación de Gauss con pivoteo parcial. Hallar la descomposición LU de la matriz de coeficientes y utilizarla para hallar una estimación del error de redondeo, refinando la solución. Utilizar aritmética de punto flotante con 3 dígitos.

6) Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0.721 \cdot x - 0.352 \cdot y = 1.62$$
$$0.836 \cdot x - 0.410 \cdot y = 1.89$$

a) Resolverlo utilizando eliminación de Gauss con pivoteo parcial. Hallar la descomposición LU de la matriz de coeficientes. Trabajar con una precisión de 3 dígitos.
b) Hallar dos refinamientos de la solución obtenida en el punto a) utilizando la descomposición LU.

7) Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$0.001325 \cdot x_1 - 5.843 \cdot x_2 = 5.844$$
$$3.128 \cdot x_1 - 2.745 \cdot x_2 = 0.3831$$

a) Obtener las soluciones numéricas utilizando eliminación de Gauss sin y con pivoteo parcial.
b) Hallar estimaciones de los errores de redondeo en los resultados obtenidos en a). No considerar errores en los coeficientes ni en los términos independientes. Obtener conclusiones.

8) Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 0.003152 & -15.28 \\ -0.009413 & 45.60 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.98 \\ -44.75 \end{Bmatrix}$$

a) Obtenerla solución numérica utilizando dos algoritmos: eliminación de Gauss con pivoteo parcial y eliminación de Gauss con pivoteo total.
b) Estimar el número de condición de la matriz de coeficientes.
c) En base a los resultados obtenidos en los puntos a) y b), indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y por qué:
   - El primer algoritmo está mal condicionado.
   - El segundo algoritmo está mal condicionado.
   - El problema está mal condicionado.

9) Sea el sistema de ecuaciones lineales Ax=b , donde:

$$A = \begin{bmatrix} 3.142 & -2.458 & 0.7542 \\ -1.154 & 5.258 & -0.4385 \\ 2.374 & -7.518 & -3.246 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{Bmatrix} 7.177 \\ -6.879 \\ 2.886 \end{Bmatrix}$$

a) Obtener la solución utilizando eliminación de Gauss con pivoteo parcial. Hallar la descomposición LU de la matriz de coeficientes. Trabajar con 4 dígitos de precisión.
b) Hallar el factor de amplificación FB de los errores de entrada en b mediante perturbaciones experimentales. Tomar:

$$\delta b = \{0.1 \quad 0.1 \quad 0.1\}^T$$

utilizar la descomposición LU y el estimador

$$F_B = \frac{\|dx\| / \|x\|}{\|db\| / \|b\|}$$

c) Efectuar un refinamiento utilizando la descomposición LU y, en base a los resultados, estimar el número de condición de la matriz KA.
d) Comparar log (FB) y log (KA) y obtener conclusiones.
e) Estimar el orden de magnitud de la perturbación que se produciría en x si la matriz A se perturbara en un 5%.

10) Describir como se simplifica el algoritmo del método de eliminación de Gauss para el caso particular en que la matriz de coeficientes es simétrica definida positiva.

B. Métodos Iterativos

11) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales con los Métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y Sobrerrelajaciones. Obtener el factor óptimo en este último método.:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{Bmatrix}$$

12) Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 0.01235 & -2.387 \\ 5.462 & 0.008406 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.370 \\ 10.85 \end{Bmatrix}$$

a) Resolverlo por el método de Jacobi. Trabajar con punto flotante con 5 dígitos de precisión.
b) Efectuar las modificaciones necesarias para garantizar la convergencia y volver a resolver con el mismo tipo de representación.
c) Explicar la convergencia o no de los algoritmos de los puntos a y b en términos de la norma de la matriz de iteración.

13) Resolver el siguiente sistema utilizando el método de Gauss-Seidel, iterando hasta que la máxima diferencia entre dos valores sucesivos de x, y ó z sea menor que 0.02. Indicar si esto último significa que la solución obtenida está en un intervalo de radio 0.02 alrededor de la solución exacta.

$$\begin{aligned} 10x + 2y + 6z &= 28 \\ x + 10y + 4z &= 7 \\ 2x - 7y - 10z &= -17 \end{aligned}$$

14) Resolver el siguiente sistema utilizando el método SOR para distintos valores del coeficiente de sobrerrelajación

$$\begin{aligned} a + d &= 2 \\ a + 4b - d &= 4 \\ a + c &= 2 \\ c + d &= 2 \end{aligned}$$

15) Considerar el sistema poco denso de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2a - b &= 1 \\ -a + 2b - c &= 1 \\ -b + 2c - d &= 1 \\ -c + 2d &= 1 \end{aligned}$$

Mostrar que el sistema permanece poco denso cuando se lleva a la forma triangular utilizando el método de eliminación de Gauss. Hallar la solución por Gauss y luego por Gauss-Seidel.

16) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3.210\, x_1 + 0.943\, x_2 + 1.020\, x_3 &= 2.300 \\ 0.745\, x_1 \qquad\qquad - 1.290\, x_3 &= 0.740 \\ 0.875\, x_1 - 2.540\, x_2 + 0.247\, x_3 &= 3.390 \end{aligned}$$

a) Efectuar las modificaciones necesarias para poder garantizar la convergencia utilizando el método de Gauss-Seidel.
b) Resolverlo iterando hasta alcanzar una precisión de 3 dígitos significativos, sin exceder un máximo de 5 iteraciones. Trabajar con una precisión que garantice un error de redondeo despreciable.
c) Establecer la cantidad de dígitos significativos efectivamente obtenidos en el punto a), para cada una de las 3 componentes del vector solución. Indicar si se verifica el criterio para acotar el error de truncamiento por medio de la norma de la diferencia entre dos vectores solución consecutivos.
d) Determinar cómo influye un error absoluto de 0.01 en el primer coeficiente de la primera ecuación sobre los valores calculados de x_1, x_2 y x_3.

GUÍA Nº 4

ECUACIONES NO LINEALES

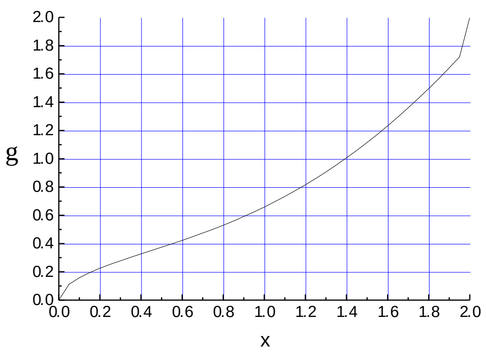
1) Sea $F(x) = \dfrac{x^2}{4} - \operatorname{sen}(x)$. Se desea encontrar la primer raíz positiva de F(x).

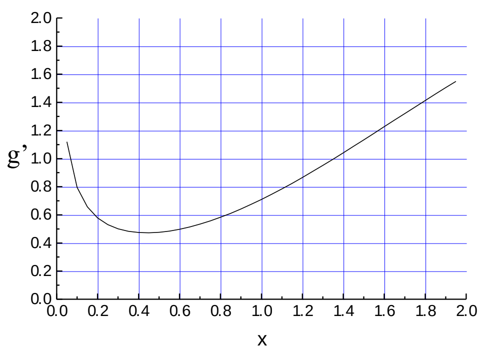
   a) Hallar un intervalo de partida para utilizar el método de bisección.
   b) Estimar el número de aproximaciones necesarias para hallar la raíz con una tolerancia para el error absoluto de 0.02. Calcular la raíz.
   c) Si la tolerancia de 0.02 es sobre el error relativo, cuántas aproximaciones se requieren?
   d) Sabiendo que la raíz buscada a 5 decimales correctos es α =1.93375 obtener conclusiones sobre la performance del método.
   e) Estimar el orden de convergencia en forma experimental.

2) Utilizar el método de Regula-Falsi para hallar la raíz del ejercicio 1. Realice varias aproximaciones, con el objeto de poder estimar experimentalmente el orden de convergencia del método. Compare sus resultados con los del ej. 1.

3) La función $\mathrm{F(x)} = \operatorname{sen}(\mathrm{x}) - \dfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{x}}$ tiene 2 ceros en I=[0,2]. Uno es x=0; se desea hallar el otro. Para ello se utilizará un método de punto fijo basado en la función de iteración $\mathrm{g(x) = x - F(x)}$. Las figuras muestran g y g’ en I.

   a) Hallar, mediante justificación teórica, un intervalo que contenga al cero buscado como único cero de F(x). Mostrar que en dicho intervalo el método propuesto converge.
   b) Hallar el cero con una tolerancia del 1% para el error relativo entre 2 pasos consecutivos.
   c) Hallar el orden de convergencia del método y la constante asintótica del error





4) Se desea hallar la primer raíz positiva de la ecuación x=cos(x) con el método de Newton-Raphson.

   a) Plantee el método para el problema de punto fijo planteado.
   b) Estudie las propiedades de convergencia del método propuesto. Encuentre explícitamente un intervalo de convergencia.
   c) Encuentre el cero buscado con una tolerancia para el error relativo del 10^{-10}.
   d) Estime en forma experimental el orden de convergencia del método.

5) La raíz real r de la ecuación $x^3 = x + 4$ puede ser escrita en la forma:

$$r = \left(2 + \frac{1}{9} \cdot 321^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(2 - \frac{1}{9} \cdot 321^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

a) Calcular r con 4 decimales significativos, utilizando la expresión.
b) Recalcular r con la misma precisión por el método de Newton con x_0=2.
c) Comparar los resultados anteriores y obtener conclusiones.

6) Determinar la raíz de la ecuación $x = 7/3 - e^{-2 \cdot x}$ en el intervalo [-1, 1], con los métodos de Newton-Raphson, Bisección y Regula Falsi con 4 decimales significativos. Comparar la cantidad de iteraciones necesarias para llegar a la precisión pedida y con qué velocidad de convergencia lo hacen.

7) Sea la ecuación $F(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 20 = 0$.

a) Aplicar el método de Newton-Raphson con x_0=1.5. Detener el proceso cuando se obtengan 2 decimales significativos.
b) Aplicar el método de Newton-Raphson para el caso de raíces múltiples y las mismas condiciones del punto a).

8) Hallar la raíz de la función $F(x) = 1.5 - \ln(1 + x^2)$, utilizando el método de Newton-Raphson. Utilizar aritmética de punto flotante con 5 dígitos de precisión para las operaciones y redondear el logaritmo a 4 dígitos significativos. Estimar el error de redondeo, determinando cuál es la fuente que más contribuye a este error. Tener en cuenta que este error proviene básicamente de la evaluación de f(x).

9) Mostrar que la aplicación del método de Newton-Raphson para hallar la raíz de la función $F(x) = e^x - x - 1$ produce convergencia lineal. Partir x_0=1. Indicar cuál es el comportamiento esperado a priori, a qué se puede deber el comportamiento observado y cómo lo corregiría.

10) Se desea hallar la raíz de la función $F(x) = \sin(x)$ que se encuentra en el intervalo $3 < x < 3.3$ con una precisión de 6 dígitos significativos.

a) Utilizar el método de Newton-Raphson partiendo de x_0=3. Suponer que $F(x)$ y $F'(x)$ solo se conocen con una precisión de 4 decimales significativos.
b) Demostrar a partir de la gráfica de proceso, cómo el error de redondeo en los valores de $F(x)$ y $F'(x)$ impide obtener la precisión requerida. Comparar el error en la raíz estimado de este modo, con el error "exacto" obtenido comparando el resultado con el valor de la raíz exacta.

11) Se desea hallar la raíz de la función:

$$F(x) = x^4 - 14.564 \cdot x + 16.804$$

a) Utilizar el método de Newton Raphson, con 6 dígitos de precisión. Obtener convergencia a 3 dígitos. Tomar x_0=1.4.

b) Mostrar que la velocidad de convergencia no es cuadrática. Determinar dicho orden y dar una explicación sobre la causa de la pérdida de velocidad de convergencia.
c) Mostrar que los cálculos con la fórmula iterativa :

$$x^{k+1} = x^k - q \cdot \frac{F(x^k)}{F'(x^k)}$$

tomando q=1.9, convergen más rápidamente.
d) Dar una interpretación al parámetro q.

12) Dada la profundidad h y el período T de una ola, su longitud de onda l surge de la relación de dispersión $w^2 = g \cdot k \cdot \tanh(k \cdot h)$, donde $w = (2 \cdot \pi)/T$ es la pulsación, g es la aceleración de la gravedad y $k = (2 \cdot \pi)/l$ es el número de onda. Conociendo $g = 9.8 m/s^2$ y $h = 4m$, se desea calcular cuál es la longitud de onda correspondiente a una ola con $T = 5seg$.

a) Utilizar un método de punto fijo para calcular la solución con 1 dígito de precisión, partiendo de k=1.
b) Utilizar el método de Newton Raphson para calcular la solución con 4 dígitos de precisión. Partir del resultado obtenido en a).

13) El método de la secante para resolver el problema de punto fijo *F*(x)=0 consiste en utilizar la aproximación

$$F'(x_n) \approx \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

en la fórmula correspondiente del método de Newton-Raphson.
a) Aplique el método de la secante para hallar la raíz no nula de

$$F(x) = \frac{x^2}{4} - \operatorname{sen}(x)$$

con una tolerancia del 0.1%.
b) Encuentre experimentalmente el orden de convergencia del método y compárelo con el de Newton-Raphson.

14) Determinar las raíces de las siguientes ecuaciones con el método de la secante con 5 decimales significativos:

a) $2 \cdot x = e^{-x}$ b) $\tan(x) + \cos(h \cdot x) = 0$

15) Sea el sistema de ecuaciones no lineal

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$g(x, y) = x \cdot y - 1 = 0$$

Resolverlo por el método de Newton-Raphson con x_0=2 y y_0=0.

16) Sea el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$x_1 \cdot x_2^2 = 11.20$$
$$x_1 + x_2 = -1.83$$

a) Hallar la solución utilizando el método de Newton-Raphson. Partir de los valores de x_1=1, x_2=-3, y utilizar aritmética de punto flotante con 3 dígitos de precisión.

b) Volver a hallar la solución con la misma precisión, pero esta vez por el método de Gauss-Seidel no lineal, partiendo de los mismos valores que en el punto a.
c) Justificar el comportamiento oscilatorio observado en el punto anterior en términos del error de redondeo.

17) Sea el sistema no lineal:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 4.188$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3.677$$
$$x_1 + 1.258 \cdot x_2 = 0$$

a) Resolverlo por el método de Newton Raphson, partiendo de: $x^{(o)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ con 3 iteraciones.
b) Ídem punto a), sin actualizar la matriz de coeficientes.
c) Mostrar que el orden de convergencia es de aproximadamente 0.5.

18) Se desea resolver el siguiente SENL

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$
$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \operatorname{sen}(x_3) + 1.06 = 0$$
$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

con una precisión de 10^{-6} para $\left\| \varepsilon_{k+1} \right\|_{\infty}$, donde ε_{k+1} es el error absoluto entre dos iteraciones consecutivas.

a) Utilizar un método de punto fijo
b) Acelerar la convergencia de a) usando el criterio de Gauss-Seidel
c) Utilizar el método de Newton

GUÍA Nº 5

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

A. Ajuste

1) Se tiene la siguiente tabla de datos:

x	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
y	3.8	3.7	4.0	3.9	4.3	4.2	4.2	4.4	4.5	4.5

   a) Encontrar una función lineal que aproxime estos datos por cuadrados mínimos. Utilizar esta curva para suavizar los datos.
   b) Repetir el punto anterior con una función cuadrática.
   c) Comparar los resultados.

2) El nivel de agua en el Mar del Norte está determinado principalmente por la marea llamada M2, cuyo período es de aproximadamente 12 horas. Se han realizado las siguientes mediciones:

t(horas)	0	2	4	6	8	10
H(t)(m)	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

   a) Ajustar la serie de mediciones usando el método de los cuadrados mínimos y la función
   $$H_1^*(t) = h_0 + a_1 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12}\right)$$
   b) Calcular errores que permitan estimar la precisión de la aproximación realizada en a)
   c) Utilizar ahora la función
   $$H_2^*(t) = h_0 + a_1 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12}\right) + a_2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{12}\right)$$
   d) Repetir b) para la nueva función aproximante. Comparar. Obtener conclusiones.

3) Dada la siguiente colección de datos, elegir la curva de aproximación y analizar los errores respecto de los valores dados.

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

4) Construir las aproximaciones indicadas, calcular los errores y obtener conclusiones para las dos series de datos que se presentan.
   a) Aproximación polinómica de grado 1.
   b) Aproximación polinómica de grado 2.
   c) Aproximación polinómica de grado 3.
   d) Aproximación de la forma $b \cdot e^{a \cdot x}$.
   e) Aproximación de la forma $b \cdot x^a$.

x	y
4.0	102.56
4.2	113.18
4.5	130.11
4.7	142.05
5.1	167.53
5.5	195.14
5.9	224.87
6.3	256.73
6.8	299.50
7.1	326.72

x	y
0.2	0.050446
0.3	0.098426
0.6	0.332770
0.9	0.726600
1.1	1.097200
1.3	1.569700
1.4	1.848700
1.6	2.501500

5) Para 5 instantes de tiempo se observaron los siguientes valores de un parámetro físico

t	-2	-1	0	1	2
u	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2

Mostrar que, si los datos se ajustan con una parábola $\psi(t)$, la aproximación en t=0 es:

$$\psi(0) = \frac{1}{35}\left\{-3u_{-2} + 12u_{-1} + 17u_0 + 12u_1 + -3u_2\right\}$$

6) Encontrar la aproximación polinómica de grado 1 y 2 de $f(x)$ en el intervalo indicado.

a) $f(x) = x^2 - 2\cdot x + 3$ $[0 \;\; 1]$ d) $f(x) = x^3 - 1$ $[0 \;\; 2]$
b) $f(x) = 1/x$ $[1 \;\; 3]$ e) $f(x) = e^x$ $[0 \;\; 1]$
c) $f(x) = \cos(\pi \cdot x)$ $[0 \;\; 1]$ f) $f(x) = \ln(x)$ $[1 \;\; 2]$

B. Interpolación

7) Calcular f(3) utilizando la fórmula de Newton, dada la siguiente tabla:

x	1	2	4	5
f(x)	0	2	12	21

a) Tomar los puntos 1, 2 y 4 y luego los puntos 2, 4 y 5.
b) Calcular f(3) por interpolación cúbica.
c) Comparar los resultados de (a) y (b). Obtener conclusiones.

8) Calcular f(0) utilizando la fórmula de Newton, dada la siguiente tabla:

x	0.1	0.2	0.4	0.8
f(x)	64987	62055	56074	43609

Notar que la fórmula de interpolación se utiliza para extrapolar.

Analizar si la extrapolación es admisible.

9) Encontrar el polinomio de grado 3 que pasa por los siguientes puntos utilizando la fórmula de Lagrange:

x	0	1	2	4
y	1	1	2	5

10) Hallar los valores de $(1.01)^{1/2}$ y $(1.28)^{1/2}$, a partir de la siguiente tabla, por interpolación de Newton con 3 dígitos significativos:

x	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$(x)^{1/2}$	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1 14017

11) Hallar un polinomio Q de grado 3 tal que Q(0)=0, Q'(0)=1, Q(1)=3 y Q'(1)=6.

12) Aproximar los datos con un polinomio de grado 2, por cuadrados mínimos y graficar la solución.

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

a) Calcular los errores para cada dato de la tabla. Calcular el error mínimo que puede ser obtenido con un polinomio cuadrático.
b) Calcular el polinomio interpolante de Lagrange de grado 2, en los nodos 0, 0.5 y 1. Graficar la solución y calcular los errores para cada dato de la tabla.
c) Comparar los resultados obtenidos y determinar cuál solución aproxima mejor a la curva en [0,1].
d) Comparar los resultados obtenidos con la función $f(x) = e^x$ en los puntos 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 ; calcular los errores y obtener conclusiones.

13) Cada 10 años se realiza un censo de población en los Estados Unidos. La siguiente tabla presenta los resultados entre 1930 y 1980.

Año	1930	1940	1950	1960	1970	1980
Población en miles	123203	131669	150697	179323	203212	226505

a) Hallar el polinomio de Lagrange de grado 5 que aproxime estos datos.
b) Hallar el polinomio de Newton de grado 5.
c) Utilizar las aproximaciones anteriores para estimar la población en 1920, 1965 y 2000. Comparar los resultados.
d) La población en 1920 fue de 105.711 millones de habitantes. En base a este dato, indicar qué tan exactos cree usted que son sus resultados de 1965 y 2000.

14) Hallar el polinomio interpolante de Hermite de grado 5 y estimar el valor para x = 0.34 de la función f(x) = sen x.

x	0.30	0.32	0.35
sen x	0.29552	0.31457	0.34290

Determinar una cota de error para la aproximación anterior y comparar con el error real.

Agregar sen(0.33) = 0.32404 a los datos y rehacer los cálculos.

En ambos casos completar la tabla con los valores de la derivada.

15) Un coche que viaja en una carretera recta es cronometrado en algunos puntos. Los datos obtenidos se dan en la siguiente tabla. Utilice un polinomio de Hermite para predecir la posición del coche y su velocidad cuando t = 10 segundos.

Tiempo (seg)	0.00	3.00	5.00	8.00	13.00
Distancia (m)	0.00	67.50	114.90	186.90	297.90
Velocidad (m/s)	22.50	23.10	24.00	22.20	21.60

16) Se tiene la función $f(x) = e^x$, de la cual se proveen los siguientes valores:

x	0.0	0.5	1.0	2.0
f(x)	1.00000	1.64872	2.71828	7.38906

a) Estimar f(0.25) utilizando interpolación de Lagrange con los nodos $x_o = 0$ y $x_1 = 0.5$.
b) Estimar f(0.75) utilizando interpolación de Lagrange con los nodos $x_o = 0.5$ y $x_1 = 1.0$.
c) Estimar f(0.25) y f(0.75) utilizando interpolación de Lagrange con los nodos $x_o = 0$, $x_1 = 1.0$ y $x_2 = 2.0$.
d) Estimar los errores de truncamiento de los cálculos realizados en los puntos a, b y c en base a la fórmula:

$$f(x) = f^*(x) + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} (x - x_0) \ldots (x - x_n)$$

Compararlos con los valores "exactos" calculados a partir de los valores reales de la función f(0.25) = 1.28403 y f(0.75) =2.11700.
e) Indicar qué aproximaciones resultaron más precisas y por qué.

GUÍA Nº 6

INTEGRACIÓN

1) Calcular la siguiente integral utilizando las fórmulas del trapecio y de Simpson, con pasos h=π/4 y h=π/2, respectivamente:

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} e^{\left(2-\frac{1}{2}\cdot\sin(x)\right)} dx$$

Obtener conclusiones sobre la precisión obtenida.

2) Integrar la función y=sen(x) entre 0 y π/2, a partir de la siguiente tabla:

x	0	π/12	π/6	π/4	π/3	5π/12	π/2
Sen(x)	0.0000	0.2587	0.5000	0.7071	0.8660	0.9659	1.0000

por el método del trapecio y por el método de Simpson. Comparar los resultados con el valor exacto.

3) Integrar la función $y = \sin(x)/x$ entre 0 y 0.8 por el método de Romberg con 5 dígitos significativos.

4) Integrar la función $y = f(x)$ entre 0 y 4, por el método de Romberg. Los valores de $f(x)$ están correctamente redondeados. ¿Cuál es la precisión obtenida?

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
f(x)	-4.271	-2.522	-0.499	1.795	4.358	7.187	10.279	13.633	17.247

5) Integrar la función $y = e^{-x}$ entre 0 y 10, por el método de cuadratura de Gauss con 6 puntos. Comparar con el resultado exacto a 6 decimales: 0.999955.

6) Evaluar la integral

$$I = \int_0^2 \sin^2(x)dx$$

a) Utilizar el método de Romberg hasta una precisión de 4 dígitos.

b) Estimar el error de redondeo en los resultados parciales obtenidos por la regla del trapecio suponiendo que se ha trabajado con aritmética de punto flotante con 4 dígitos de precisión. Suponer que el orden en que se efectúan las operaciones es el siguiente:

$$T(h) = \left[\frac{1}{2}\cdot\left(f_0 + f_n\right) + \sum_{j=1}^{n-1} f_j\right]\cdot h$$

donde n es el número de intervalos y h el paso.

7) Evaluar la integral:

$$I = \int_0^2 e^{x^2}\,dx$$

mediante cuadratura de Gauss con 4 puntos. La siguiente tabla presenta los puntos de evaluación y los coeficientes asociados:

Puntos	Coeficientes
± 0.86114	0.34785
± 0.33998	0.65215

Efectuar los cálculos con 5 decimales de precisión.

8) Evaluar la integral:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

mediante el método de Romberg hasta obtener 4 dígitos de precisión.

9) Hallar una fórmula de cuadratura para la integral:

$$I = \int_0^3 f(x)dx$$

utilizando 4 nodos equiespaciados e interpolación polinomial sobre todo el intervalo. Utilizar el método de los coeficientes indeterminados. Si M es una cota superior para $\left|f^{IV}(0)\right|$, hallar una estimación del error por truncamiento en términos de M.

10) Evaluar la integral:

$$I = \int_1^5 \ln(x)dx$$

utilizando la fórmula de Simpson, con un error no mayor a 0.01.

Sabiendo que la regla de Simpson aplicada a un intervalo genérico (x_{i-1}, x_{i+1}) es:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{3}\cdot\left[f(x_{i-1}) + 4\cdot f(x_i) + f(x_{i+1})\right] - \frac{h^5}{90}\cdot f^{IV}(\varepsilon_i)$$

donde $x_{i-1} < \varepsilon_i < x_{i+1}$,se pide:

a) Obtener una expresión para acotar el error de truncamiento global sobre todo el intervalo de integración.
b) Utilizando la expresión hallada en el punto anterior, determinar un paso h que garantice la cota de error establecida y efectuar el cálculo utilizando este valor de h.
c) Comparar el resultado de la integración numérica con el valor exacto de la integral y verificar que la diferencia está acotada por el error estimado.

11) La función error se define como:

$$erf = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt$$

a) Hallar $erf(1)$ utilizando el método de Romberg, hasta alcanzar una precisión de 4 dígitos significativos. Trabajar con una cantidad suficiente de dígitos para garantizar que no influya el error de redondeo.
b) Hallar $erf(1)$ utilizando Cuadratura de Gauss con 5 puntos. Los nodos de evaluación y los correspondientes coeficientes son:

± 0.90618	0.23693
± 0.53847	0.47863
0	0.56889

c) Estimar el error de truncamiento del resultado obtenido por Romberg. Estimar el error del resultado obtenido por Gauss debido al redondeo en las coordenadas y en los coeficientes provistos. En base a la comparación entre los resultados obtenidos en a) y b), ¿qué puede decir del error de truncamiento del método de Gauss?, ¿cuál de los dos métodos ha resultado más trabajoso en términos de la cantidad de cálculos?

12) Obtener una fórmula de integración que involucre 4 nodos equiespaciados (fórmula de Cotes) mediante el método de los coeficientes indeterminados. Para simplificar la resolución del sistema de ecuaciones, tener en cuenta que la fórmula resulta simétrica alrededor del punto medio.
   a) Hallar una expresión para el error de truncamiento.
   b) Aplicar las fórmulas obtenidas para estimar la integral:

$$I = \int_{0}^{1.5} \sin^2(x) dx$$

junto con su error. Sabiendo que el valor correcto de la integral a 5dígitos significativos es 0.71472, comparar la estimación del error con su valor correcto.

GUÍA Nº 7

DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA

1) Construir una aproximación en atraso con tres puntos de $u'(x)$ y analizar la precisión del esquema obtenido.

2) Construir una aproximación de orden 2 en adelanto de $u''(x)$.

3) Construir una aproximación de orden 2 de $\left(a(x)\cdot u'(x)\right)'$, donde $a(x)$ es una función conocida y suficientemente lisa.

4) Construir las aproximaciones en diferencias de orden 3 para $u'(x)$, en adelanto, en atraso y centrada.

5) Se tiene la siguiente tabla de valores para la función seno:

x	0.920	0.950	1.000
$\sin(x)$	0.79560	0.81342	0.84147

a) Estimar el valor de la derivada de la función en x=1 utilizando dos aproximaciones en diferencias en atraso y luego obtener un valor más preciso por extrapolación de Richardson.
b) Construir una fórmula de aproximación en diferencias de segundo orden para la derivada en x=1, y utilizarla para hallar un nuevo valor.
c) Discutir sobre la precisión de los valores hallados en los puntos anteriores. Estimar el error de truncamiento y compararlo con el valor 'exacto' de ese error obtenido por diferencia con el valor de cos(1).

Resuelto en el Campus

6) Obtener la fórmula de aproximación en diferencias finitas en adelanto de una derivada de orden 3 con orden de precisión 2.

GUÍA Nº 8

ECUACIONES DIFERENCIALES

A. Problemas de Valores Iniciales (PVI)

1) Discretizar el siguiente problema de valores iniciales por el método de Euler

$$\frac{dy}{dt} = -y + t + 1 \qquad t \geq 0 \qquad y(0) = 1$$

a) Utilizando un paso k = 0.1 avanzar 10 pasos el cálculo de la solución numérica.
b) Calcular el error global en t=1 sabiendo que la solución exacta es

$$y(t) = t + e^{-t}$$

c) Mejorar los resultados mediante extrapolación de Richardson.

2) Discretizar el siguiente problema mediante el método de Euler y analizar la estabilidad numérica.

$$\frac{du}{dt} = u^2 \qquad t_0 < t < \frac{1}{u_o} \qquad u(t_0) = u_0 > 0$$

Analizar la estabilidad numérica si $u_0 < 0$ y $\frac{1}{u_o} < t_0 < t$.

3) Discretizar el siguiente problema mediante el método de Euler y analizar la estabilidad numérica.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2 \cdot u = 0 \qquad t > 0 \qquad u(0) = u_0 \qquad u'(0) = u_0'$$

4) Discretizar el siguiente problema mediante el método de Euler y analizar la estabilidad numérica.

$$\frac{du_1}{dt} = u_2 \qquad \frac{du_2}{dt} = -u_1 \qquad t > 0 \qquad u_1(0) = a \qquad u_2(0) = b$$

5) Aproximar el siguiente problema por el método fuertemente implícito (Euler inverso) y analizar la estabilidad numérica. Analizar qué ocurre si u(0) = -1.

$$\frac{du}{dt} = -u^2 \qquad t \geq 0 \qquad u(0) = 1$$

6) Aproximar el siguiente problema por el método de Euler modificado (Runge-Kutta de orden 2:

$$\frac{du}{dt} = u + t \qquad t \geq 0 \qquad u(0) = 1$$

Analizar la estabilidad numérica. Avanzar 10 pasos de cálculo y comparar con la solución exacta $u(t) = 2 \cdot e^t - t - 1$.

7) Analizar la estabilidad del esquema de la rayuela (leap-frog) aplicado al siguiente problema.

$$\frac{du}{dt} = -u^2 \qquad t \geq 0 \qquad u(0) = a > 0$$

8) Aproximar el siguiente problema por el método de Euler. Utilizar un paso k = 0.01 y obtener u(0.1). Estimar el tamaño de malla necesario para obtener una precisión de 10^{-4}.

$$\frac{du}{dt} - t - u - u \cdot t = 0 \qquad t \geq 0 \qquad u(0) = 1$$

9) Repetir el problema anterior, utilizando el método de Crank-Nicolson, con un paso k = 0.025. Comparar el esfuerzo de cálculo requerido por ambos métodos.

10) El problema diferencial $y' = -y + t + 1$, $0 < t < 1$, y(0) = 1, ha de ser integrado utilizando el esquema predictor-corrector explícito o del punto medio.
   a) Demostrar que el esquema es consistente y hallar su orden de precisión.
   b) Utilizando un paso k = 0.1 avanzar 10 pasos el cálculo de la solución numérica.
   c) Calcular el error cometido (ver problema 1 b)

11) Calcular u(0.5) utilizando los siguientes métodos:
   a) Euler.
   b) Predictor-corrector explícito (Punto medio).
   c) Euler modificado (Runge-Kutta orden 2).
   aplicados al siguiente problema

$$\frac{du}{dt} + (1-t) \cdot u^3 = 0 \qquad u(0) = 1$$

   Obtener previamente el factor de amplificación y durante el cálculo verificar en cada paso que dicho factor es menor o igual que 1. Elegir un paso k = 0.1 por razones de precisión.

12) Sea el siguiente problema

$$u' - \frac{a}{u} = 0 \qquad u(0) = 1$$

   Discretizarlo utilizando los métodos:
   a) Runge-Kutta de orden 2 (Euler modificado).
   b) Crank-Nicolson.
   Verificar el orden del error de truncamiento. Hallar las condiciones de estabilidad.

13) Sea el siguiente problema:

$$\frac{du}{dt} + u^2 \cdot t = 0 \qquad u(0) = 1$$

   Discretizarlo mediante el esquema de Crank-Nicolson y analizar la estabilidad suponiendo que u permanece positiva. Avanzar la solución un paso de cálculo tomando k = 0.1.

14) Sea el siguiente problema de valores iniciales:

$$y' = \left(\frac{2}{t}\right) \cdot y + t^2 \cdot e^t \qquad 1 \leq t \leq 1.5 \qquad y(1) = 0$$

   cuya solución es $y(t) = t^2 \cdot \left(e^t - e\right)$.

   a) Obtener la solución numérica mediante el método de Euler, utilizando 2 pasos de cálculo distintos, k = 0.1 y k = 0.05. Mostrar cómo se refleja el orden de precisión del esquema en la reducción del error de truncamiento.
   b) Utilizar extrapolación de Richardson para obtener un valor más preciso de y(1.5).
   Utilizar aritmética de punto flotante con 4 dígitos de precisión.

15) Dada la ecuación diferencial $\dfrac{du}{dt}+f\left(u,t\right)=0$, se pide:

a) Demostrar la consistencia del esquema de Euler modificado (Runge-Kutta de orden 2).
b) Idem anterior para el método de Adams-Bashforth de orden 2.

16) Dada la ecuación diferencial $\dfrac{du}{dt}+u=0$, $u(0)=1$, calcular $u(0.6)$ utilizando:

a) Método predictor-corrector de Adams de orden 2, con pasos k = 0.2 y k = 0.1.
b) Método de Crank-Nicolson con pasos k = 0.2 y k = 0.1.
c) Obtener una mejor aproximación por extrapolación de Richardson. Indicar de qué orden es esta aproximación.

17) Resolver el siguiente sistema utilizando un método numérico apropiado.

$$\begin{cases} u' + 2000\cdot u - 1000\cdot w = 1 \\ w' - u = 0 \end{cases} \qquad u(0)=0 \qquad w(0)=0$$

18) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} u' + u\cdot v = 0 \\ v' + v^2 = 0 \end{cases}$$

$u(0)=a$, $v(0)=1$, $a=$ constante

Demostrar que si se discretiza el sistema por el método de Euler, la estabilidad numérica está sujeta a la restricción $k \le 1/v$.

19) Transformar la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\mu\cdot\frac{du}{dt}+w^2\cdot u=0 \qquad \mu>0$$

en un sistema de ecuaciones de primer orden y discretizar según:
a) Método predictor-corrector de Adams de orden 2.
b) Método fuertemente implícito (Euler inverso).
Avanzar dos pasos de cálculo tomando $\mu=w=1$, para las condiciones iniciales:

$$u(0)=1 \qquad u'(0)=1$$

Elegir un paso de cálculo que garantice la estabilidad.

20) Sea el siguiente problema diferencial

$$\frac{d^2u}{dt^2}+u=0 \qquad u(0)=0 \qquad u'(0)=1$$

a) Transformarlo en un problema de valores iniciales de primer orden.
b) Utilizar el método de Euler modificado para avanzar la solución hasta t=0.4. Utilizar dos pasos de tiempo: k = 0.1 y k = 0.2.
c) Sabiendo que la solución es $u(t)=\sin(t)$, determinar los errores cometidos y verificar que el método numérico tiene orden de precisión 2.

21) Analizar la estabilidad del problema $\dfrac{d^3u}{dt^3}-1=0$, reducido a un sistema de primer orden y resuelto por Euler.

22) Sea el problema rígido

$$\frac{d^2u}{dt^2}+1001\cdot\frac{du}{dt}+1000\cdot u=0 \qquad u(0)=1 \qquad u'(0)=-1$$

a) Convertir la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones de primer orden y discretizarlo mediante el método de Euler.
b) Hallar la condición de estabilidad del problema numérico planteado, es decir, el valor de $k_{\max}$ tal que $k<k_{\max}$.
c) Con las condiciones iniciales dadas, la solución del problema es $u(t)=e^{-t}$, es decir que solo está activa la componente lenta. Mostrar que con $k>k_{\max}$ cualquier perturbación dispara la componente rápida que se amplifica tornando inestable el cálculo.

✔ **Resuelto en el Campus**

B. Problemas de Valores Iniciales Conservativos (PVIC)

23) Sea el siguiente problema diferencial :

$$\frac{d^2u}{dt^2}+f(u)=0 \;\;;\;\; f(u)=\left(1+u^2\right)\cdot u \;\;;\; u(0)=1 \;\;;\; u'(0)=0$$

a) Resolverlo utilizando el siguiente esquema:

$$u_{n+1}=u_n+h\cdot u'_n-\frac{k^2}{2}\cdot f\left(u_n\right)$$
$$u'_{n+1}=u'_n-\frac{k}{2}\cdot\left[f\left(u_n\right)+f\left(u_{n+1}\right)\right]$$

Avanzar la solución 4 pasos de tiempo utilizando $k=\pi/20$ y 5 dígitos de precisión.
b) La siguiente expresión debe permanecer constante para todo valor del tiempo :

$$E=\frac{1}{2}\cdot u'^2+\frac{1}{2}\cdot u^2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot u^2\right)$$

Verificar si esto sucede con los valores calculados. ¿Cuál es la fuente de variación?

24) Sea la siguiente ecuación diferencial :

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\mu\cdot\frac{du}{dt}+w^2\cdot u=0$$

Discretizarla utilizando los métodos:
a) Método de Newmark.
b) Método del salto de rana (rayuela).
Analizar la estabilidad numérica.
Avanzar dos pasos de cálculo tomando $\mu=w=1$, para las condiciones iniciales $u(0)=0$, $u'(0)=1$. Elegir un paso de cálculo que garantice la estabilidad.

25) Dada la ecuación diferencial :

$$u''-e^u=0 \;\;;\; t\geq 0 \;;\; u(0)=0 \;\;;\; u'(0)=\sqrt{2}$$

a) Discretizar la ecuación por el método de Newmark y avanzar la solución dos pasos de cálculo, tomando k = 0.1 . Trabajar con 4 dígitos de precisión y plantear una técnica iterativa para efectuar el cálculo.
b) Hallar la matriz de amplificación

26) Dada la ecuación del oscilador armónico u’’ + ω2u = 0 , mostrar que el método de Punto Medio produce soluciones oscilatorias, pero que no es conservativo. Determinar el tipo de oscilación que produce.

27) Dada la ecuación del oscilador armónico u’’ + ω2u = 0 , discretizarlo por el método de la Rayuela (Salto de Rana). Explicar cómo arrancar el cálculo para asegurar orden de precisión 2. Hallar las raíces de la ecuación característica y mostrar que si se impone una solución oscilatoria, resulta un esquema conservativo.

28) Se tiene el siguiente problema diferencial:

u’’ + 40u = 10 ; u(0) = 0 ; u’(0) = 0

a) Plantear su resolución numérica por el método más conveniente. Indicar el algoritmo de cálculo. Explicar el por qué de la elección.
b) Elegir un paso de cálculo apropiado y calcular la solución numérica entre t = 0 y t = 2. Explicar el por qué de la elección.
c) Explicar qué diferencias cualitativas se esperan entre la solución numérica y la del problema diferencial. Ilustrar gráficamente.

C. Problemas de Valores de Contorno (PVC)

29) El análisis en régimen estacionario de la conducción del calor a través de un sólido con generación interna de calor, está dado por el siguiente problema :

$$u'' + \left(\frac{p}{x}\right)\cdot u' + f(u) = 0 \quad ; \quad 0 \le x_0 \le x \le x_1 \quad ; \quad u'(x_0) = 0 \quad ; \quad u(x_1) = 1$$

Si el sólido es una placa plana y la generación de calor es constante, o sea :

$$p = 0 \quad ; \quad f(u) = \frac{q}{k}$$

resulta para $x_0 = 0$ y $x_1 = 0$, el problema :

$$u'' + \frac{q}{k} = 0 \;\; ; \;\; 0 \le x \le 1 \;\; ; \;\; u'(0) = 0 \;\; ; \;\; u(1) = 1$$

La solución exacta de esta ecuación es : $u(x) = 1 + \left(\frac{q}{2\cdot k}\right)\cdot\left(1 - x^2\right)$

Se pide encontrar el perfil de temperaturas $u(x)$ cuando $\frac{q}{k} = 2$.

Utilizar un paso de cálculo k = 0.1 .

30) Resolver el siguiente problema por un método directo con un paso de cálculo h = 0.1 .

$$u'' + \frac{u'}{x} + u = 0 \;\; ; \;\; 1 \le x \le 2 \;\; ; \;\; u'(1) = 0 \;\; ; \;\; u(2) = 1$$

31) Resolver el siguiente problema por el método del tiro :

$$u'' + 2\cdot\left(1 - x^2\right)\cdot u' + u^2 = 1 \;\; ; \;\; -1 \le x \le 1 \;\; ; \;\; u'(1) = 0 \;\; ; \;\; u(2) = 1$$

32) Sea el siguiente problema :

$$u'' + x = 0 \ ; \ 0 \le x \le 1 \ ; \ u(0) = 1 \ ; \ u'(1) = 0$$

a) Construir una aproximación en diferencias de orden de precisión 2, incluidas las condiciones de borde. Expresar el sistema de ecuaciones resultante en forma matricial.
b) Resolver el problema para un paso de cálculo h = 1/2 y h =1/3, utilizando eliminación de Gauss sin pivoteo y redondear los resultados a 4 dígitos.
c) Aplicar extrapolación de Richardson para obtener una mejor aproximación de u(x=1).

33) Dado el siguiente problema de valores de contorno :

$$u^{IV} = 0 \ ; \ u(0) = u_0 \ ; \ u'(0) = 0 \ ; \ u'(1) = 0 \ ; \ u''(1) = 0 \ ; \ 0 \le x \le 1$$

a) Discretizarlo con un esquema de orden de precisión 2.
b) Dividir el intervalo de cálculo en cinco subintervalos y plantear el sistema de ecuaciones en forma matricial, incluyendo las condiciones de borde con igual orden de precisión.

34) Dado el siguiente problema diferencial :

$$u'' + 11 \cdot u' + 10 \cdot u = 0 \ ; \ 0 \le x \le 1 \ ; \ u(0) = 0 \ ; \ u(1) = 1$$

a) Plantear su resolución por el método del tiro. Para ello reducir la ecuación diferencial a dos ecuaciones de primer orden, aplicar el esquema de Crank-Nicolson e indicar el algoritmo que se utilizará. Tomar h = 0.2 .
b) Sea v=u'. Se sabe que los resultados obtenidos con dos tiros sucesivos fueron:

   v(0) = 20 → u(1) = 0.815
   v(0) = 30 → u(1) = 1.222

   Utilizar estos resultados para realizar un tercer tiro. Indicar si son necesarios nuevos tiros. Trabajar con 4 dígitos de precisión.
c) Graficar la solución obtenida en b) y extraer conclusiones, en relación al tipo de problema diferencial de que se trata y al error de truncamiento cometido.

35) Sea el problema $\dfrac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \ ; \ u(0) = 0 \ ; \ u(1) = 1$

cuya solución es $u(x) = 1.18840 \cdot \sin(x)$

a) Resolverlo utilizando un método directo de precisión 2, con un paso h = 0.25. Trabajar con una precisión de 5 decimales. Comparar los resultados con la solución exacta.
b) Repetir el cálculo con la condición de borde . Verificar que la solución analítica satisface esta condición de borde.

36) Sea el problema $u \cdot \dfrac{du}{dx} - \alpha \cdot \dfrac{d^2u}{dx^2} = 0 \ ; \ 0 \le x \le L \ ; \ u(0) = U \ ; \ \dfrac{du}{dx}(L) = q$

a) Discretizarlo con un método directo de orden 2. Plantear el sistema total de ecuaciones algebraicas para paso h = L/2.
b) El sistema de ecuaciones es no lineal. Plantear el sistema a resolver en cada iteración según el método de Newton Raphson.

37) Sea el problema : *0.1 u'' + u' + u = 0 ; 0 ≤ x ≤ 1 ; u(0) = 0 ; u(1) = 1*

a) Hallar la solución numérica por un método directo centrado con paso h = 0.25 . Resolver el sistema resultante y graficar la solución obtenida.
b) Resolver nuevamente por el método de "upwinding" con igual paso. Graficar la solución obtenida.
c) Siendo la solución analítica u(x) = 3.08777 ($e^{-1.12702 x}$ - $e^{-8.87298 x}$) , comparar y comentar sobre los resultados obtenidos.