

Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTE SOBRE INTEGRALES IMPROPIAS

D. Prelat – 2020

La expresión «integral impropia» debería entenderse a partir de su opuesta, «integral propia». Sin embargo, esta última expresión no es tan popular como la primera y vamos a reemplazarla por *integral definida*. Ahora, hay que aclarar de qué integral definida se trata, pues la teoría de la integración tiene una larga historia y en la actualidad hay varias *integrales definidas* que se utilizan en distintas áreas de la matemática pura y aplicada. Se las conoce por los apellidos de los matemáticos que las definieron y estudiaron. Dos de las más famosas son: la integral de Riemann (1826 – 1866) y la integral de Lebesgue (1875 – 1941). La primera es la que se estudia en Análisis I y su definición utiliza las «sumas de Riemann» (o bien sus primas cercanas, las «sumas de Darboux»).

No podemos dejar de mencionar que lo que Riemann hizo con la teoría de la integración es desarrollar sobre bases firmes y rigurosas el *método de exhaustión* (o *método exhaustivo*), ya conocido y utilizado por Arquímedes (287 a. C. - 212 a.C aprox.) en sus cálculos prodigiosos.

Para la integración en intervalos acotados, la integral de Lebesgue tiene mayor alcance, pues hay funciones que no admiten integral de Riemann pero sí de Lebesgue. Pero para las integrales impropias, hay integrales importantes que existen en el sentido de Riemann pero no en el de Lebesgue (Ejemplo (C) 4).

Utilizaremos, entonces, en todo este apunte, nuestra vieja, buena y conocida integral definida de Riemann. Trabajaremos con funciones $f : I \longrightarrow \mathfrak{R}$ seccionalmente continuas en un intervalo real I , acotado o no (eventualmente, el dominio puede ser unión finita de intervalos). Recordemos lo que significa «seccionalmente continua».

Definición: $f : I \longrightarrow \mathfrak{R}$ es *seccionalmente continua* sii en cada intervalo cerrado y acotado $[a, b] \subseteq I$ existe una cantidad finita (eventualmente 0) de puntos x_1, x_2, \dots, x_m donde f es discontinua y en estos puntos la discontinuidad es de «salto finito», es decir: existen los límites laterales (y son finitos) $f(x^+) = \overset{\text{notación}}{x} \underline{\text{Lim}}_{x^+} f(x)$ (denominado «límite por derecha») y $f(x^-) = \overset{\text{notación}}{x} \underline{\text{Lim}}_{x^-} f(x)$ («límite por izquierda»). En los extremos del intervalo $[a, b]$ también deben existir (y ser finitos) los límites laterales $f(a^+) = \underline{\text{Lim}}_{a^+} f(x)$ y $f(b^-) = \underline{\text{Lim}}_{b^-} f(x)$. Si, además, existe una función $F : I \longrightarrow \mathfrak{R}$ seccionalmente continua y derivable en los puntos x donde es continua y en estos puntos se verifica $F'(x) = f(x)$, diremos que f es *seccionalmente C^1* . Si esta función F es seccionalmente C^1 , f se dice seccionalmente de clase C^2 (etc.).

Nota 1: Supongamos que los puntos x_1, x_2, \dots, x_m están ordenados en forma creciente: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} = b$. Entonces, podemos definir, para cada uno de los índices $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$, la función $f_k : [x_k, x_{k+1}] \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f_k(x) = f(x)$ si $x \in (x_k, x_{k+1})$, $f_k(x_k) = f(x_k^+)$ y $f_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1}^-)$. Cada una de estas funciones f_k resulta continua en el intervalo cerrado y acotado $[x_k, x_{k+1}]$ y por lo tanto integrable. Entonces, la integral de f en $[a, b]$ y es $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^m \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x) dx$. Todo esto se puede visualizar fácilmente con un buen dibujito. La figura 1 ilustra un caso en que $m = 6$. Para terminar esta nota: es importante tener presente que el valor de la integral de f en $[a, b]$ no depende de los valores $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m), f(b)$

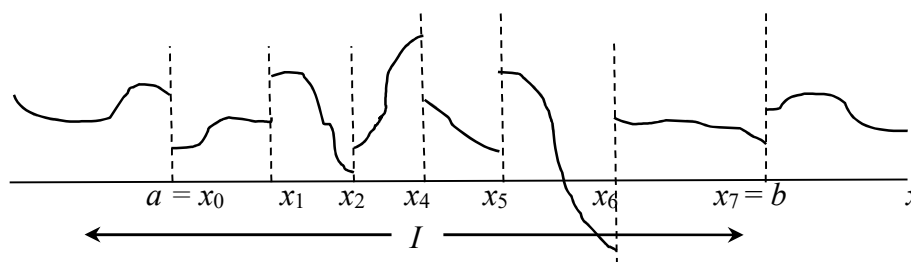


Gráfico de una función seccionalmente continua

Fig. 1

Las funciones seccionalmente continuas constituyen una familia suficientemente amplia para las aplicaciones habituales. En particular, contiene a la familia de las continuas. Además, tiene una estructura muy eficiente para estas aplicaciones, pues las sumas y los productos de seccionalmente continuas son también seccionalmente continuas.

También van a aparecer, en este apunte, funciones definidas en un intervalo real I y con valores complejos. Diremos que $f : I \rightarrow \mathcal{C}$ es seccionalmente continua si y solamente si lo son sus componentes real e imaginaria $\text{Re } f : I \rightarrow \mathfrak{R}$ e $\text{Im } f : I \rightarrow \mathfrak{R}$ (definición análoga para funciones seccionalmente C^1). Además, en ese caso, definiremos la integral de f en I de la manera obvia: $\int_I f(x) dx = \int_I \text{Re } f(x) dx + i \int_I \text{Im } f(x) dx$.

Comencemos, ahora sí, con las integrales impropias. Las «impropiedades» pueden estar en el dominio de integración o en el integrando. El primer caso se presenta cuando el dominio de integración no es acotado, como por ejemplo una semirrecta o toda la recta real. El segundo caso ocurre cuando la función a integrar presenta una (o más) discontinuidades «más graves» que las discontinuidades de salto finito. Por ejemplo, cuando no es acotada en ningún entorno de un punto de discontinuidad. A pesar de esto, bajo ciertas condiciones se puede extender el concepto de integral definida a algunos de estos casos, obteniendo resultados de aplicación práctica muy importantes.

(A) INTEGRALES IMPROPIAS DE LA FORMA $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Definición: Dada $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ seccionalmente continua, sea $F : [a, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$F(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)dx$. Entonces, si existe el límite $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda)$ (y es finito), se dice que la

integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge y definimos $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^\lambda f(x)dx$. En caso contrario diremos que la integral *diverge*.

Nota 2: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge sii para cualquier $b > a$ la integral $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ converge. Esto

es consecuencia directa de la definición y tiene una implicación práctica inmediata. Para

estudiar la convergencia de una integral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, por ejemplo, uno puede estudiar la

convergencia de $\int_{10^{40}}^{+\infty} f(x)dx$, pues si ésta última converge entonces la primera también. La

razón es muy sencilla: por ser f seccionalmente continua, es integrable en el intervalo

$[1, 10^{40}]$ y por otra parte $\int_1^\lambda f(x)dx = \int_1^{10^{40}} f(x)dx + \int_{10^{40}}^\lambda f(x)dx$ para todo $\lambda > 10^{40}$.

Observación 1: Si f es continua, F no es otra cosa que la primitiva de f que se anula en a . En

general, dada cualquier primitiva H de f , se tiene $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [H(\lambda) - H(a)]$.

Observación 2: Para la convergencia de la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ no es necesario ni suficiente

que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. (Ver ejemplos siguientes y el Lema subsiguiente)

Ejemplo 1: $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces, $F(\lambda) = \int_1^\lambda f(x)dx = \ln(\lambda)$ y

entonces $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *diverge*.

Ejemplo 2: $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Entonces, $F(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx = -\frac{1}{\lambda} + 1$ y por

lo tanto $\int_1^{+\infty} f(x) dx = 1$ (converge)

Ejemplo 3: Sea $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{N} \end{cases}$. (Obsérvese que esta función

no tiende a cero en infinito) y obviamente $F(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx = 0$ para todo $\lambda \in [1, +\infty)$.

Ejemplo 4: Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ la función continua cuyo gráfico es una sucesión de triángulos isósceles con bases en el eje de abscisas y centradas en los puntos enteros positivos, altura constante = 1 y tales que la base centrada en el punto n tiene longitud 2^{-n+1} (ver Fig. 2). Este es un ejemplo de función continua que no tiende a cero en infinito y su

integral converge. (Ejercicio: comprobar que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$)

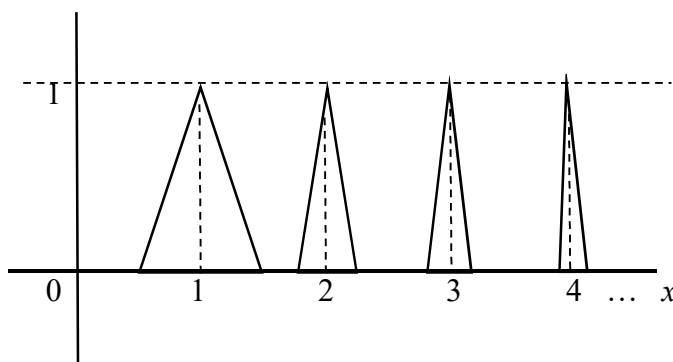


Gráfico de la función del Ejemplo 4

Fig. 2

Estos ejemplos muestran claramente que para la convergencia de la integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ no es necesario ni suficiente que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Un par de ejemplos más sofisticados son las integrales de Fresnel, que veremos más adelante. Lo que sí es cierto es que:

Lema 1: Si $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ es seccionalmente continua y existe (y es finito) el límite

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y además la integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

P/ Sea $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y supongamos que $l > 0$. Entonces, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}l$ existe $x_\varepsilon > a$ tal que $\frac{1}{2}l = l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon = \frac{3}{2}l$. Resulta

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{x_\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx > \int_a^{x_\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}l\right)dx \quad (\clubsuit)$$

lo que contradice la convergencia de la integral. Para el caso $l < 0$ se tiene demostración análoga (o se puede aplicar lo demostrado a $-f$). ■

Aclaración de rigor: En lugar de (\clubsuit) tendríamos que haber escrito: « Para todo $\lambda > x_\varepsilon$:

$$\int_a^\lambda f(x)dx = \int_a^{x_\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_\varepsilon}^\lambda f(x)dx > \int_a^{x_\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_\varepsilon}^\lambda \left(\frac{1}{2}l\right)dx = \int_a^{x_\varepsilon} f(x)dx + \frac{1}{2}l(\lambda - x_\varepsilon)$$

y por lo tanto $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^\lambda f(x)dx = +\infty$. » Volveremos a utilizar muchas veces la versión abreviada del razonamiento anterior sin la aclaración correspondiente.

Corolario: Si $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 y existen (y son finitas) las integrales

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ y } \int_a^{+\infty} f'(x)dx, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

P/ La existencia (finita) de $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ implica la existencia del límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (finito),

$$\text{pues } \int_a^{+\infty} f'(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} f(b) - f(a) \quad \blacksquare$$

Como era de esperar, frente a una integral impropia se presentan dos problemas inmediatos: el primero es saber si converge, el segundo es calcular la integral (en caso de que exista). El segundo problema es, en general, extremadamente más difícil que el primer y en este sentido, la situación es parecida a la que presentan las series. No es demasiado casual que los criterios de convergencia para las integrales tengan un aire familiar para los que ya estudiaron series. Pero una diferencia muy importante que conviene tener presente de entrada es la

Observación 2 más arriba: para la convergencia de la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ no es necesario ni

suficiente que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, mientras que para la convergencia de una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es

necesario (no suficiente) que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Antes de pasar a estudiar algunos criterios de convergencia, damos un par de ejemplos adicionales y sencillitos, que suelen ser útiles para estudiar casos más complicados (mediante los criterios de comparación, por ejemplo).

Ejemplos 5:

(a) Dado un real α , $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$, y en ese caso es $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$ (ejercicio).

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ [Ejercicio: una primitiva del integrando es $\text{artg}(x)$]

ALGUNOS CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA INTEGRALES $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Algunas de las demostraciones de estos criterios están en el apéndice. Todas las funciones involucradas se suponen seccionalmente continuas salvo mención expresa en contrario.

(1) **Bolzano - Cauchy:** La integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\lambda_\varepsilon \in (a, +\infty)$

tal que para todos $\lambda \geq \mu \geq \lambda_\varepsilon$ se verifica $\left| \int_\mu^\lambda f(x)dx \right| < \varepsilon$.

(2) **Convergencia absoluta:** Si $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge entonces $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

No vale recíproca (para integrales de Riemann). Un contraejemplo muy importante es la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$, que estudiaremos más adelante. Un ejemplo más sencillito (pero menos importante) es el de la función continua $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo gráfico es el siguiente:

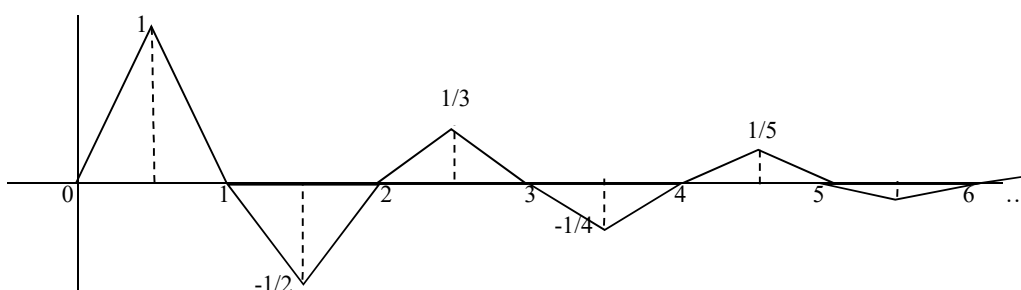


Gráfico una función condicionalmente integrable en $[0, +\infty)$ – Ver definición siguiente.

Fig. 3

Las alturas de los triángulos son $1, -1/2, 1/3, -1/4, \dots$ y resulta $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} =$
 $= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right)$ convergente (criterio de Leibniz para series alternadas). Por otra
 parte, es claro que $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Momento cultural: El criterio de convergencia de Gottfried Leibniz (1646 - 1716) es el más antiguo de todos los conocidos. Este es un buen ejemplo (y muy sencillo) para ejemplificar la diferencia entre estudiar la convergencia de una serie y calcular su suma (en caso de existir). Saber que la serie armónica alternada converge lleva un par de segundos de cálculo rutinario (gracias a Leibniz, en este caso). Pero saber a qué converge (asumiendo que converge a algún número conocido previamente, lo que casi nunca ocurre) es otro tema. En general se requieren trucos astutos; en la mayoría de los casos la astucia necesaria es mucha. Para la serie armónica alternada se puede apelar al siguiente: para cada número real x tal que $-1 < x < 1$, tenemos la serie geométrica convergente $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$. Integrando término respecto de x entre 0 y $b < 1$ (procedimiento legal) tenemos $\ln(1+b) = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \dots$. El último paso es elegir $b = 1$, lo que requiere una justificación cuidadosa (hay un lema de Abel que ayuda mucho) y obtenemos $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$. Es decir, nuestra integral es, en definitiva: $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln(2) = \ln(\sqrt{2})$.

El hecho de que existan integrales convergentes no absolutamente convergentes lleva, como en el caso de las series, a la siguiente definición:

Definición de convergencia condicional: La integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge condicionalmente

sii $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge y $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ diverge.

Terminología: Si $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge, f se dice *absolutamente integrable* en $[a, +\infty)$. Si

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge condicionalmente, f se dice *condicionalmente integrable* en $[a, +\infty)$. La

expresión f es integrable en $[0, +\infty)$, sin especificación de convergencia absoluta o condicional, significa sencillamente que la integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge según la definición

de integral convergente dada al principio, es decir: su convergencia puede ser absoluta o condicional.

(3) Criterio de acotación: Si existe una constante positiva K tal que para todo $\lambda \in [a, +\infty)$ es $\int_a^\lambda |f(x)| dx \leq K$, entonces la integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge (absolutamente).

(4) Criterios de comparación:

(4.1) Si $\forall x \geq a : 0 \leq f(x) \leq g(x)$, entonces:

(a) si $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge (y además $\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$)

(b) Si $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge.

(El primero se denomina «criterio de la mayorante convergente» y el segundo, que es un criterio de divergencia, se llama «criterio de la minorante divergente»)

(4.2) Supongamos que $\forall x \geq a : f(x) \geq 0$ y $\forall x \geq a : g(x) > 0$ y que además existe (y es finito) el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$. Dado que $\forall x \geq a : \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, es $c \geq 0$. Entonces:

(a) Si $c > 0$, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge sii $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge.

(b) Si $c = 0$ y $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge entonces $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.

(Se trata de un criterio de *comparación asintótica*, pues compara el comportamiento de las dos funciones en «el infinito». Pero atención: esto no habilita justificaciones del tipo «las dos funciones se portan igual...». Esto tal vez pueda significar que las dos se ponen alegres con el chardonnay, lo que no ayuda mucho a saber si la integral converge o no. El criterio tiene un enunciado suficientemente sencillo como para utilizarlo con precisión).

Ejemplos 6: Veamos un par de ejemplos de aplicación de estos criterios:

(1) La integral $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx$ converge, pues para todo $x \geq 0$ (en realidad, para todo x real):

$\left| \frac{\cos(x)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$, y por otra parte la integral $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ converge (ejemplo 5 (b)). Por lo

tanto (criterio de comparación (4.1)) la integral $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\cos(x)}{1+x^2} \right| dx$ converge.

(2) La integral $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+x^4} dx$ converge (el integrando es positivo en el intervalo de integración, por lo tanto si converge, converge absolutamente como es de dominio público...). Aquí podemos utilizar el segundo criterio de comparación:

$${}_x \underline{\text{Lim}}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+1}{x^2+x^4}}{\frac{1}{x^3}} = {}_x \underline{\text{Lim}}_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+x^3}{x^2+x^4} = {}_x \underline{\text{Lim}}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

Puesto que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ converge (ejemplo 5 (a)), ya hemos probado lo que queríamos.

Achtung! Warning! Atenção! Ojo! : Un error muy habitual en la aplicación de los criterios

de comparación consiste en utilizar desigualdades del tipo « $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ » de donde se

pretende deducir la convergencia de la primera integral. El problema con esto es que la segunda integral es alevosamente divergente (el integrando se vuelve peligroso cerca de 0) y por lo tanto no permite deducir la convergencia de la primera integral. Se aconseja utilizar,

por ejemplo, la desigualdad $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ y releer (una vez más) la Nota 2 de pág. 3. Aquí

el criterio de comparación 4.1) funciona, pues la segunda integral converge (ejemplo 5) a)). También se puede utilizar directamente el criterio de comparación 4.2).

(5) Criterio de Dirichlet .

Sean $u : [c, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ y $\alpha : [c, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ funciones continuas tales que

(i) α es de clase C^1 en $(c, +\infty)$

(ii) $\forall x \geq c : \alpha(x) > 0$

(iii) $\forall x > c : \alpha'(x) < 0$

(iv) ${}_x \underline{\text{Lim}}_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$

(v) Existe una constante positiva K tal que para todo $\lambda \geq c : \left| \int_c^\lambda u(x) dx \right| \leq K$

Entonces la integral $\int_c^{+\infty} \alpha(x)u(x)dx$ converge.

Nota 3: (a) Existen versiones más fuertes de este criterio, en las que no se requiere – por ejemplo – la condición (i). Pero la versión que estamos dando aquí es suficiente para el uso que vamos a darle a este criterio y – por otra parte – permite una demostración muy sencilla, la que puede verse en el apéndice. **(b)** Las hipótesis (iii) y (iv) implican (ii), pero quizás sea

útil tener la condición (ii) a la vista cuando se aplica este criterio de convergencia. (c) Existe un criterio muy parecido, debido a Niels Abel (1802 – 1829), que requiere como hipótesis la convergencia de la integral $\int_c^{+\infty} u(x)dx$. Para las integrales que nos interesan en particular, esta condición no se verifica (por ejemplo, cuando $u(x) = \text{sen}(x)$).

Ejemplo 7: Veamos un ejemplo muy importante: convergencia de $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)dx}{x}$. Aquí se supone que el integrando toma el valor 1 en $x = 0$, con lo cual resulta continuo en toda la semirrecta $[0, +\infty)$. Alcanza, entonces, con probar que $\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)dx}{x}$ converge (releer Nota 2, página 3). Lo haremos utilizando el criterio de Dirichlet para $\alpha : [1, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ y $u : [1, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $u(x) = \text{sen}(x)$. Que la función α verifica las condiciones (i) y (ii) del criterio es inmediato. Veamos que u verifica la condición (iii): para cada $\lambda > 1$: $\left| \int_1^\lambda \text{sen}(x)dx \right| = |-\cos(\lambda) + \cos(1)| \leq |\cos(\lambda)| + |\cos(1)| \leq 2$. Es decir: la constante $K = 2$ funciona (también $K = 18$).

(B) INTEGRALES DE LA FORMA $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Definición: Indiquemos con $\Lambda = \{(\mu, \lambda) \in \mathfrak{R}^2 : \mu \geq 0, \lambda \geq 0\}$ el primer cuadrante del plano real. Dada una función $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ seccionalmente continua, sea $F : \Lambda \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que

$F(\mu, \lambda) = \int_{-\mu}^\lambda f(x)dx$. Entonces, se dice que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge si existe el límite

(doble) $\lim_{(\mu, \lambda) \rightarrow (+\infty, +\infty)} F(\mu, \lambda)$ y es finito. Indicamos, en ese caso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{(\mu, \lambda) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \int_{-\mu}^\lambda f(x)dx \quad (B.1)$$

Ahora bien: dado que para cada $(\mu, \lambda) \in \Lambda$ es

$$F(\mu, \lambda) = \int_{-\mu}^\lambda f(x)dx = \int_{-\mu}^0 f(x)dx + \int_0^\lambda f(x)dx = F(\mu, 0) + F(0, \lambda),$$

resulta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{(\mu, \lambda) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \int_{-\mu}^\lambda f(x)dx = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \int_{-\mu}^0 f(x)dx + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda f(x)dx \quad (B.2)$$

y por lo tanto se tiene un par de integrales impropias del tipo (A). Esto reduce el estudio de la convergencia (y cálculo) de las integrales de tipo (B) a las del tipo (A). Obsérvese que la existencia del límite doble (B.1) implica la existencia del límite $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) dx$, que coincide entonces con el límite doble. Desde ya que no vale la recíproca. (Es el caso, por ejemplo, de la función $f(x) = x$). Este límite simple tiene aplicaciones importantes, como veremos más adelante, y se denomina «valor principal» o «de Cauchy». Se indica

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) dx \quad (B.3)$$

Observación 3: Una utilidad del valor principal que ya podemos mencionar aparece en el cálculo de las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Si esta integral converge, entonces coincide con su valor principal: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, que suele ser más sencillo de calcular, dado que se trata de un límite simple.

Antes de pasar a algunos ejemplos, un comentario sobre integrandos pares o impares. Recordemos la definición de funciones pares e impares. Sea $I \subseteq \mathfrak{R}$ un dominio simétrico respecto del origen (es decir, tal que $\forall x \in \mathfrak{R} : x \in I \Leftrightarrow -x \in I$). Una función $f : I \rightarrow \mathfrak{R}$ es par si $\forall x \in I : f(-x) = f(x)$, y es impar si $\forall x \in I : f(-x) = -f(x)$. Ejemplos de funciones pares definidas en toda la recta son x^2 , $\cos(x)$, $\sen(x^2)$. Ejemplos de funciones impares, también definidas en toda la recta, son x , $\sen(x)$, $\text{artg}(x)$. Ejemplos de funciones definidas en toda la recta que no son pares ni impares: $x+1$, e^x . No vamos a dar ninguna lista de las propiedades de las funciones pares ni impares, que son muy sencillas de entender y que las mencionaremos a medida que se necesiten. Solamente vamos a destacar una relacionada con las integrales: sea $f : I \rightarrow \mathfrak{R}$ seccionalmente continua en un dominio $I \subseteq \mathfrak{R}$ simétrico respecto del origen y sea $b > 0$ tal que $[-b, b] \subseteq I$. Entonces:

$$\begin{aligned} (i) \text{ si } f \text{ es par: } & \int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx \\ (ii) \text{ si } f \text{ es impar: } & \int_{-b}^b f(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (B.4)$$

Estas dos propiedades se deducen a partir del cambio de variables obvio ($x = -t$) y dejamos los detalles como ejercicio (un par de dibujitos pueden ayudar a entenderlas fácilmente). Son propiedades muy útiles para el cálculo de algunas integrales y las utilizaremos mucho en el tema de Series de Fourier. La segunda, en especial, tiene su encanto. Por ejemplo, podemos asegurar que $\int_{-1}^1 \frac{x^4 \sen(x^3)}{(2 + \cos(x))e^{x^2}} dx = 0$ sin hacer ninguna cuenta. También son útiles las

propiedades que resumimos en la siguiente proposición, que vamos a utilizar con frecuencia en los cálculos de integrales impropias.

Proposición B.1: Sea $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ seccionalmente continua.

(i) Si f es impar, siempre existe el valor principal $vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ y es $vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$. Por lo

tanto, si la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge, es nula. (Ver ejemplo 8.1 a continuación).

(ii) Si f es par, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge sii convergen $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ y $\int_0^{+\infty} f(x)dx$; en ese caso estas

dos últimas integrales son iguales y se verifica que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Demostración (i): Si f es impar, entonces para todo $\lambda > 0$ es $\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)dx = 0$, por lo tanto

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)dx = 0.$$

Demostración (ii) (esquemática): Si f es impar, entonces para todo $\lambda > 0$ y todo $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\mu}^{\lambda} f(x)dx &= \int_{-\mu}^0 f(x)dx + \int_0^{\lambda} f(x)dx \stackrel{x=-t}{=} \int_{\mu}^0 f(-t)(-dt) + \int_0^{\lambda} f(x)dx = \int_0^{\mu} f(-t)dt + \int_0^{\lambda} f(x)dx \stackrel{f \text{ es par}}{=} \\ &= \int_0^{\mu} f(t)dt + \int_0^{\lambda} f(x)dx. \end{aligned}$$

Se deduce ahora (completar los detalles) que existe el límite

$$(\lambda, \mu) \underline{\text{Lim}}_{(+\infty, +\infty)} \int_{-\mu}^{\lambda} f(x)dx \text{ sii existen los dos límites } \mu \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-\mu}^0 f(x)dx = \mu \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ y}$$

$$\lambda \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x)dx, \text{ y que además, en ese caso:}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &\stackrel{def}{=} (\lambda, \mu) \underline{\text{Lim}}_{(+\infty, +\infty)} \int_{-\mu}^{\lambda} f(x)dx = \mu \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_{-\mu}^0 f(x)dx + \lambda \underline{\text{Lim}}_{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x)dx \stackrel{def}{=} \\ &= \int_0^{+\infty} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplos 8:

(1) La integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ diverge, pues no existe el límite doble $(\mu, \lambda) \underline{\text{Lim}}_{(\mu, \lambda) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \int_{-\mu}^{\lambda} x dx =$
 $(\lambda, \mu) \underline{\text{Lim}}_{(\lambda, \mu) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\mu^2}{2} \right)$. Por otro lado, el valor principal es $vp \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = 0$ (el integrando es
 impar). Este valor principal no es otra cosa que el límite simple $\lambda \underline{\text{Lim}}_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \right) = 0$.

(2) La integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge (su valor lo calcularemos en la sección siguiente). Podemos comprobar la convergencia de esta integral aplicando la Proposición B.1 (el integrando es par) y comprobar que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge (absolutamente, por razones de dominio público). Para esto podemos utilizar, por ejemplo, la acotación

$$e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \dots} \leq \frac{1}{1 + x^2},$$

válida para todo real x . Dado que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ converge (Ejemplo 5b)), por el primer criterio de comparación, resulta que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

(3) La integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{1+x^2} dx$ converge y es nula, pues el integrando es impar y la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{1+x^2} dx$ converge absolutamente: para todo x real es $\left| \frac{\text{sen}(x)}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$.

(4) La integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx$ diverge, pues el integrando es par y la integral $\int_0^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ diverge, dado que la integral $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ diverge. Esto puede comprobarse a partir de la primitiva $\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ del integrando o bien mediante comparación asintótica con la integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.

(5) Para analizar la convergencia de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{(1+e^x)(1+x^4)} dx$ no podemos utilizar la Proposición B.1, pues el integrando no es par ni impar. Lo que podemos hacer, entonces, es estudiar por separado las integrales $\int_{-\infty}^0 \frac{\text{sen}(x)}{(1+e^x)(1+x^4)} dx$ y $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{(1+e^x)(1+x^4)} dx$. Lo haremos esquemática e informalmente (el interesado puede completar los detalles fácilmente). Mediante el cambio $x = -t$, la primera queda

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\text{sen}(x)}{(1+e^x)(1+x^4)} dx = \int_{+\infty}^0 \frac{\text{sen}(-t)}{(1+e^{-t})(1+(-t)^4)} d(-t) = - \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(t)}{(1+e^{-t})(1+t^4)} dt$$

y el integrando tiene la acotación absoluta $\left| \frac{\text{sen}(t)}{(1+e^{-t})(1+t^4)} \right| \leq \frac{1}{1+t^4}$. El integrando de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{(1+e^x)(1+x^4)} dx \text{ tiene la misma acotación absoluta: } \left| \frac{\text{sen}(x)}{(1+e^x)(1+x^4)} \right| \leq \frac{1}{1+x^4}. \text{ Dado que}$$

la integral $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ converge, hemos probado que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{(1+e^x)(1+x^4)} dx$ converge absolutamente.

Veremos más ejemplos en este apunte y en el resto del curso.

(C) OTRAS «IMPROPIEDADES»

Las «impropiedades» que vamos a mencionar en este párrafo ocurren en el integrando, y las integrales impropias pueden serlo por este tipo de impropiedades y además por tener dominios de integración no acotados como vimos previamente. Creo que una lista de ejemplos va a facilitar la comprensión de las definiciones generales que iremos dando.

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{x}, (2) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}, (3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}, (4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}, (5) \int_0^1 \frac{dx}{x^2}, (6) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}, (7) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, (8) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, (9) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

$$(10) \int_0^1 \frac{dx}{x(x-1)}, (11) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}, (12) \int_{-9}^{11} \frac{dx}{x-1}, (13) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-1}, (14) \int_{-9}^{11} \frac{dx}{x^2-1}, (15) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx. \quad (C.1)$$

En las integrales (1), (5) y (9), el intervalo de integración es acotado pero el integrando tiene una discontinuidad de salto infinito en uno de los extremos del intervalo de integración. En la integral (10) esto ocurre en ambos extremos del intervalo de integración. Estas integrales son ejemplos del siguiente caso general:

(C.1) Integrales de la forma $\int_a^b f(x)dx$, donde $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es seccionalmente continua en cada intervalo $[c, d] \subset (a, b)$. Diremos que esta integral *converge* sii existe el límite doble

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{(\delta, \varepsilon)} \lim_{(0+, 0+)} \int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Puede verse fácilmente (hacerlo) que eligiendo un punto intermedio $a < c < b$, resulta

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{(\delta, \varepsilon)} \lim_{(0+, 0+)} \int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\delta} \lim_{0+} \int_{a+\delta}^c f(x)dx + \lim_{\varepsilon} \lim_{0+} \int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad (C.2)$$

Esta expresión facilita el estudio de la convergencia de la integral y su correspondiente cálculo, pues se trata de un par de límites simples. Además, tiene como consecuencia inmediata que en el caso en que f tenga límite lateral finito en alguno de los extremos, por ejemplo b , resulta la expresión más sencilla

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{\delta} \lim_{0+} \int_{a+\delta}^b f(x)dx \quad (C.3)$$

pues en este caso: $\lim_{\varepsilon} \lim_{0+} \int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$. Las integrales (1), (5) y (9) son ejemplos sencillos. Puede verse fácilmente que (1) y (5) son divergentes y (9) es convergente. Pero en lugar de estudiar los tres por separado, veamos un ejemplo mucho más general.

Ejemplo 9: Dado un número real β , la integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ converge sii $\beta < 1$. Esto es muy sencillo de ver utilizando (C.3): para cada $\delta > 0$ (y menor que 1):

$$\int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^\beta} = \begin{cases} \frac{1 - \delta^{1-\beta}}{1 - \beta} & \text{si } \beta \neq 1 \\ -\ln(\delta) & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto el límite $\lim_{\delta} \lim_{0+} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^\beta}$ solo puede existir (finito) sii $\beta < 1$, y en ese caso resulta

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{1 - \beta}. \text{ En particular, el valor de la integral (9) es } 2. \text{ mmm - mmm}$$

Observación 4: Si usted observa una semejanza entre este ejemplo y el Ejemplo 5) a), su observación es acertada. El cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ transforma $\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ en $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\beta}}$, que converge sii $2 - \beta > 1$, es decir: sii $\beta < 1$. Antes de concluir la observación, me veo obligado

a confesar que acabo de incurrir en una falta de rigor: la transformación de integrales impropias por cambios de variables debe ser rigurosamente justificada, pues hasta ahora lo que tenemos permitido es el cambio de variables en integrales «propias».

Entonces, lo correcto es: «El cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ transforma $\int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^{\beta}}$ en $\int_1^{\frac{1}{\delta}} \frac{dt}{t^{2-\beta}}$ », y

luego tomar límite para $\delta \rightarrow 0+$. Ahora sí, completemos la observación. La posibilidad de transformar una «impropiedad» en otra, de otra clase, es bastante frecuente y permite reducir la extensa y aburrida lista de todos los tipos de integrales impropias a una mucho más breve. No haremos esto por razones pedagógicas, pero lo que sí no vamos a hacer es dar la lista completa. La idea es entender el método general que estamos presentando para extender la integral de Riemann a determinados casos interesantes.

Sigamos con la lista (C.1). En las integrales (2), (6), (12) el intervalo de integración es acotado pero el integrando tiene una discontinuidad de salto infinito en un punto interior de intervalo, es decir: son de la forma:

(C.2) $\int_a^b f(x)dx$, donde existe un punto interior $c \in (a, b)$ tal que $f : [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ es

seccionalmente continua y tiene límites laterales infinitos en c . Diremos que esta integral converge si existe (y es finito) el límite doble

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{(\delta, \varepsilon) \rightarrow (0+, 0+)} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$$

En algunos casos, puede no existir este límite doble pero sí existir el límite simple

$$vp \int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right)$$

que se denomina (adivine ...) *valor principal* de la integral impropia. Aquí también vale un resultado parecido a la proposición B.1, cuando $c = 0$ y $a = -b$. Si tiene ganas, enuncie la Proposición C.1 con las propiedades correspondientes y demuéstrela. Lo que voy a hacer, en cambio, es dar un par de ejemplos sencillitos como para que se entienda la idea.

Ejemplos 10:

(a) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ diverge y existe $\text{vp} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ (y es 0). Muy sencillo de entender, pues no existe el límite

doble ${}_{(\delta, \varepsilon)} \underline{\text{Lim}}_{(0+, 0+)} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = {}_{(\delta, \varepsilon)} \underline{\text{Lim}}_{(0+, 0+)} [\ln(\delta) - \ln(\varepsilon)]$ pero sí el límite simple

$${}_{\delta} \underline{\text{Lim}}_{0+} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x} \right) = {}_{\delta} \underline{\text{Lim}}_{0+} [\ln(\delta) - \ln(\delta)] = 0.$$

(a)(bis) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ diverge y existe $\text{vp} \int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$ (y es $\ln(2)$). Lo mismo: no existe el límite doble

${}_{(\delta, \varepsilon)} \underline{\text{Lim}}_{(0+, 0+)} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x} \right) = {}_{(\delta, \varepsilon)} \underline{\text{Lim}}_{(0+, 0+)} [\ln(\delta) + \ln(2) - \ln(\varepsilon)]$ pero sí el límite simple

$${}_{\delta} \underline{\text{Lim}}_{0+} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^2 \frac{dx}{x} \right) = {}_{\delta} \underline{\text{Lim}}_{0+} [\ln(\delta) + \ln(2) - \ln(\delta)] = \ln(2).$$

(b) La integral $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ converge y vale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4$. Veamos:

$${}_{(\delta, \varepsilon)} \underline{\text{Lim}}_{(0+, 0+)} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \right) = {}_{(\delta, \varepsilon)} \underline{\text{Lim}}_{(0+, 0+)} (2 - 2\sqrt{\delta} + 2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 4.$$

(b)(bis): La integral $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ converge y vale $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2(1 + \sqrt{2})$, pues

$${}_{(\delta, \varepsilon)} \underline{\text{Lim}}_{(0+, 0+)} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \right) = {}_{(\delta, \varepsilon)} \underline{\text{Lim}}_{(0+, 0+)} (2 - 2\sqrt{\delta} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2 + 2\sqrt{2}.$$

El resto de las integrales de la lista (C.1) presentan más de una «impropiedad» y cada una de esta debe ser considerada aparte. En lugar de dar una tediosa definición del caso más general posible (además de tediosa sería muy poco práctica), vamos a dar ejemplos de cómo deben separarse las «impropiedades» para estudiar su convergencia y – eventualmente – calcular la integral.

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$. Las dos integrales del segundo miembro, que son distintos tipos de integrales impropias, divergen. Por lo tanto, la integral (3) diverge (alevosamente). Es claro, por otra parte, que podríamos haber elegido cualquier número positivo $c > 0$ en lugar de 1, es decir: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_0^c \frac{dx}{x} + \int_c^{+\infty} \frac{dx}{x}$, sin alterar la conclusión. Esta misma observación vale para los ejemplos que siguen.

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x} + \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$. Aquí también, todo es divergente. La diferencia con el caso anterior es que se puede pensar en definir un valor principal (que resultaría nulo, en este caso). Le dejo como ejercicio la definición del valor principal de esta integral.

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. La segunda integral del segundo miembro converge, pero la primera no. Por lo tanto, la integral (7) es divergente.

(8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} + \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Aquí la primera y la tercera integral del segundo miembro convergen, mientras que la segunda diverge, por lo tanto la integral (8) diverge. En este caso, también sería divergente el valor principal (ejercicio).

(11) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Ahora el problema es con la segunda integral del segundo miembro, que es divergente. La primera se porta bien, pero la integral (11) se ve arrastrada al averno de las divergentes por culpa de la segunda.

(13) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-1} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x-1} + \int_0^2 \frac{dx}{x-1} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-1}$. Esta integral se reduce a la (4) mediante una traslación de variables. No es difícil ver que aquí todo es divergente. Se puede pensar en un valor principal considerando la suma

$$\int_{-b+1}^0 \frac{dx}{x-1} + \int_0^{1-\delta} \frac{dx}{x-1} + \int_{1+\delta}^2 \frac{dx}{x-1} + \int_2^{b+1} \frac{dx}{x-1}$$

para $b > 1$ y $0 < \delta < 1$, y luego tomar límite para $b \longrightarrow +\infty$ y $\delta \longrightarrow 0+$. Con el cambio de variable $x = t + 1$ la suma anterior queda

$$\int_{-b}^{-1} \frac{dt}{t} + \int_{-1}^{-\delta} \frac{dt}{t} + \int_{\delta}^1 \frac{dt}{t} + \int_1^b \frac{dt}{t}.$$

Se ve fácilmente que esta suma es 0 cualesquiera sean $b > 1$ y $0 < \delta < 1$, por lo tanto el valor principal de la integral (13) es 0 (supongo que usted ya lo sospechaba)

(15) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$. Ésta es menos sencilla que las anteriores pero mucho más interesante, pues es una de las integrales de Fresnel (un poco disfrazada) que calcularemos más adelante. Para estudiar la convergencia de $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ es decir, del límite

$\delta \lim_{0+} \int_{\delta}^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$, podemos hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$ y tenemos

$$\int_{\delta}^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_{\sqrt{\delta}}^1 \frac{\cos(t^2) 2t dt}{t} = 2 \int_{\sqrt{\delta}}^1 \cos(t^2) dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0+} 2 \int_0^1 \cos(t^2) dt$$

En el último paso hemos utilizado la continuidad de la integral de Riemann de funciones continuas respecto de los extremos de integración. Por lo tanto, la integral $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ es convergente. Finalmente, la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$ también resulta convergente por el criterio de Dirichlet 5)b) (página 9). La cuenta es muy parecida a la del ejemplo 7 (página 10).

Damos por concluida la presentación de las integrales impropias. Pensamos que hemos exhibido la suficiente cantidad de ejemplos como para que se puedan entender las ideas centrales.

(D) ALGUNAS INTEGRALES IMPROPIAS IMPORTANTES

Como hemos mencionado al principio, para integrales impropias con integrandos complejos, basta considerar por separado las partes real e imaginaria. Aprovecharemos los primeros ejemplos no triviales de cálculos de integrales impropias para presentar algunas especialmente importantes.

$$(1) (a) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Prueba: Ya hemos comprobado la convergencia de esta integral en el Ejemplo 8.2), página

13, donde hemos visto además que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Para el cálculo de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ existe,

desde hace un par de siglos, un truco muy ingenioso y muy popular, pero que en general se utiliza con demasiada displicencia. Consideremos la primitiva del integrando que se anula

en 0, es decir, la función $E : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{R}$ tal que $E(\lambda) = \int_0^{\lambda} e^{-t^2} dt$. Si usted ha sido víctima de

la leyenda urbana que sostiene que esta primitiva no existe, es el momento de salvarse. Tal vez prefiera la definición de esta primitiva mediante la serie de potencias

$E(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \lambda^{2n+1}$, que converge maravillosamente en toda la recta real, pero para el

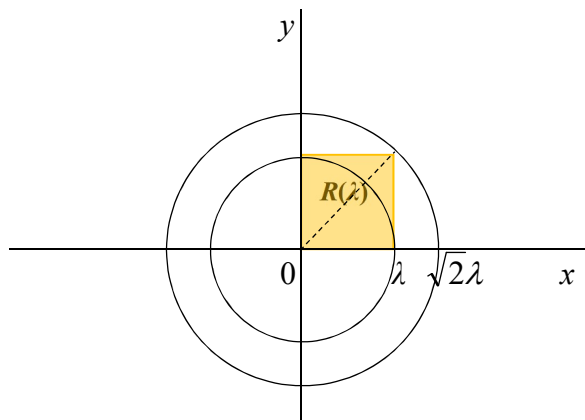
cálculo que vamos a hacer nos viene mejor la expresión integral. El truco mencionado consiste en complicar todo mediante integrales dobles. Para cada $\lambda > 0$:

$$E(\lambda)^2 = \left(\int_0^{\lambda} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{\lambda} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{R(\lambda)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{R(\lambda)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

donde el dominio de integración es el cuadrado $R(\lambda) = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 : 0 \leq x \leq \lambda, 0 \leq y \leq \lambda\}$.

El integrando pide a gritos que utilicemos coordenadas polares, pero esto complica el dominio de integración (las coordenadas polares están destinadas a dominios redonditos).

Pero por suerte no necesitamos calcular esta integral (para cada $\lambda > 0$), necesitamos ver qué pasa cuando $\lambda \longrightarrow +\infty$, y para eso nos alcanza el siguiente par de acotaciones.



Sea $K(\lambda) = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq \lambda^2\}$ el sector del círculo con centro en el origen y radio λ que se encuentra en el primer cuadrante, y análogamente, el de radio $\sqrt{2}\lambda$: $K(\sqrt{2}\lambda) = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2\lambda^2\}$. En la figura están dibujados los círculos completos. Es fácil comprobar que $K(\lambda) \subset R(\lambda) \subset K(\sqrt{2}\lambda)$. Puesto que el integrando es positivo en todo el plano, resulta entonces que

$$\iint_{K(\lambda)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \overbrace{\iint_{R(\lambda)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy}^{E(\lambda)^2} \leq \iint_{K(\sqrt{2}\lambda)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Ahora sí, pasamos a polares en la primera y en la tercera integral, sin olvidarnos del jacobiano (¡que nunca nos pase!), obteniendo $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\lambda} \rho e^{-\rho^2} d\rho \leq E(\lambda)^2 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}\lambda} \rho e^{-\rho^2} d\rho$,

es decir: $\frac{\pi}{2} \int_0^{\lambda} \rho e^{-\rho^2} d\rho \leq E(\lambda)^2 \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}\lambda} \rho e^{-\rho^2} d\rho$. Ahora vemos la idea del truco: la aparición del bendito jacobiano permite calcular la primera y la tercera integral muy fácilmente, pues la función $\rho e^{-\rho^2}$ tiene la sencilla primitiva $-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}$. Entonces, para cada $\lambda > 0$ tenemos que $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-\lambda^2}) \leq E(\lambda)^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2\lambda^2})$, es decir:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-\lambda^2}} \leq \overbrace{\int_0^{\lambda} e^{-x^2} dx}^{E(\lambda)} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 - e^{-2\lambda^2}} \quad (*)$$

Ahora, tomando límites para $\lambda \longrightarrow +\infty$, por el «lema del sandwich» llegamos al resultado

deseado: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Confieso que cada vez que leo esta increíble igualdad me

pregunto qué tiene que hacer $\sqrt{\pi}$ en todo esto. En la integral no hay absolutamente nada relacionado con alguna circunferencia que permita predecir la aparición de π , y mucho menos su raíz. Por último, obsérvese que las desigualdades (*) podrían servir para el cálculo

aproximado de $E(\lambda) = \int_0^{\lambda} e^{-t^2} dt$, pero eso es otro tema.

(1) (b) Para toda constante real positiva k : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{k}$

Prueba: Se deduce del resultado anterior mediante un cambio de variables bastante obvio.

(1) (c) Para todo par de constantes reales a y μ , si $a > 0$:

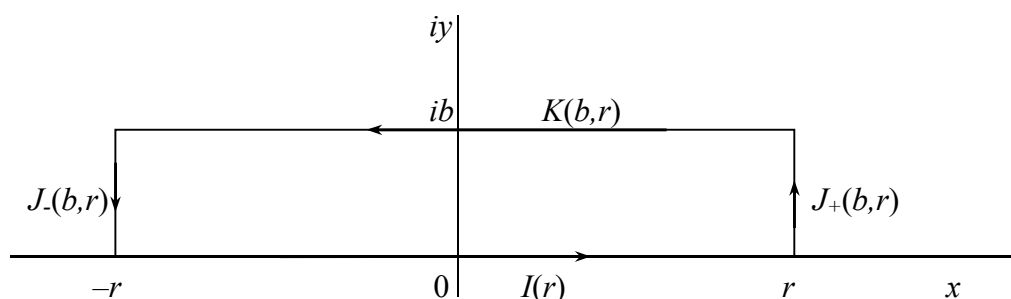
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \theta^2 \pm i\mu\theta} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\mu^2}{4a^2}}$$

Prueba: La convergencia absoluta de esta integral se deduce inmediatamente de la convergencia de la integral anterior, pues módulo del integrando es $e^{-a^2 \theta^2}$. Lo que no es tan inmediato es el cálculo. Para esto vamos a utilizar el Teorema de Cauchy-Goursat, aplicado a la función entera $f(z) = e^{-a^2 z^2}$ y los circuitos $I(r) \cup J_+(b,r) \cup K(b,r) \cup J_-(b,r)$ (para cada $b > 0$ y cada $r > 0$) ilustrado en la siguiente figura. Es el borde orientado positivamente del rectángulo de vértices $r, r+ib, -r+ib, -r$ y la notación que hemos utilizado es:

$$I(r) = \{x \in \mathfrak{R} : -r \leq x \leq r\} \quad , \quad J_+(b,r) = \{r + iy \in \mathfrak{R} : 0 \leq y \leq b\}$$

$$K(b,r) = \{x + ib \in \mathfrak{R} : -r \leq x \leq r\} \quad , \quad J_-(b,r) = \{-r + iy \in \mathfrak{R} : 0 \leq y \leq b\}$$

Obsérvese que en $K(b,r)$ el sentido es $x: r \rightarrow -r$ y en $J_-(b,r)$ es $y: b \rightarrow 0$.



El Teorema de Cauchy - Goursat afirma que para cualquier $r > 0$ y cualquier $b > 0$:

$$\int_{I(r)} f(z) dz + \int_{J_+(b,r)} f(z) dz + \int_{K(b,r)} f(z) dz + \int_{J_-(b,r)} f(z) dz = 0 \quad (*)$$

Veamos cada una de estas integrales por separado, con la idea de hacer tender $r \longrightarrow +\infty$ (manteniendo b fijo).

$$(a) \int_{I(r)} f(z) dz = \int_{-r}^r e^{-a^2 x^2} dx \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{a} \text{ (por lo calculado en el ejemplo anterior)}$$

$$(b) \int_{J_+(b,r)} f(z) dz = \int_0^b e^{-a^2 [r+iy]^2} idy \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0. \text{ Probemos esto:}$$

$$\left| \int_0^b e^{-a^2 [r+iy]^2} idy \right| \leq \int_0^b \left| e^{-a^2 [r+iy]^2} \right| dy = \int_0^b \left| e^{-a^2 (r^2 + 2iry - y^2)} \right| dy = \int_0^b e^{-a^2 r^2} e^{a^2 y^2} dy = e^{-a^2 r^2} \int_0^b e^{a^2 y^2} dy$$

claramente tiende a cero cuando $r \longrightarrow +\infty$

$$(c) \int_{K(b,r)} f(z) dz = - \int_{-r}^r e^{-a^2 [x+ib]^2} dx = - \int_{-r}^r e^{-a^2 x^2 - 2ia^2 xb} e^{a^2 b^2} dx = -e^{a^2 b^2} \int_{-r}^r e^{-a^2 x^2 - 2ia^2 bx} dx$$

tiende a $-e^{a^2 b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2 - 2ia^2 bx} dx$ cuando $r \longrightarrow +\infty$.

$$(d) \int_{J_-(b,r)} f(z) dz = - \int_0^b e^{-a^2 [-r+iy]^2} idy \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0. \text{ Se prueba de manera totalmente análoga a}$$

lo probado para $\int_{J_+(b,r)} f(z) dz$.

En resumen, haciendo tender $r \longrightarrow +\infty$ (manteniendo b constante) en (*), se tiene

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a} - e^{a^2 b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2 - 2ia^2 bx} dx = 0$$

es decir: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2 - 2ia^2 bx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-a^2 b^2}$. Ahora, eligiendo $b = \frac{\mu}{2a^2}$ (para el caso en que μ es

positivo o nulo), resulta $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2 - i\mu x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\mu^2}{4a^2}}$. Faltaría probar el caso en que μ es

negativo, y se podría hacer de manera monótonamente análoga. Lo mejor, creo, es observar que el miembro derecho de la última igualdad no cambia cuando μ cambia de signo.

(2) Para toda constante real λ :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda x)}{x} dx = \pi \text{sign}(\lambda) = \begin{cases} -\pi & \text{si } \lambda < 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ \pi & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

Este es un ejemplo de una integral que existe en el sentido de Riemann pero no en el de Lebesgue, pues $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\text{sen}(x)}{x} \right| dx$ diverge, y una función es integrable Lebesgue sii su módulo es integrable Lebesgue.

Resolución: En el Ejemplo 7 (página 10) probamos la convergencia de $\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$

aplicando el criterio de Dirichlet. Recordemos que al integrando le asignamos el valor 1 en 0, por lo tanto es continuo en toda la recta. Ahora, como el integrando es par, de la

Proposición B.1 (página 12) tenemos que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$ converge y que su valor es

$2 \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$. Calcularemos primero el caso $\lambda = 1$. El caso general se sigue, cuando $\lambda \neq 0$,

mediante un cambio de variables bastante obvio, y el caso $\lambda = 0$ no requiere demasiadas cuentas.

Para calcular el valor de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$ utilizaremos la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, holomorfa en

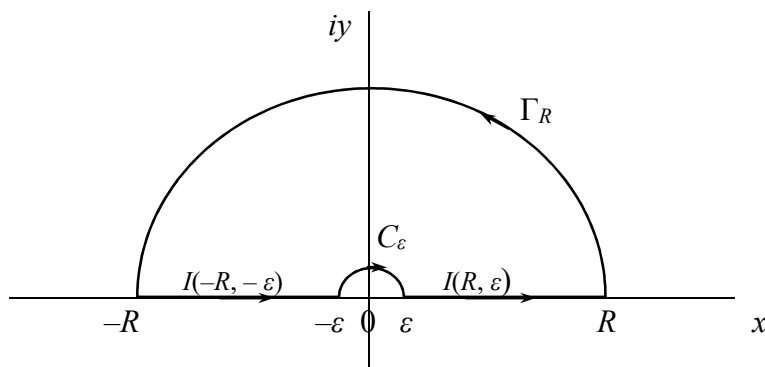
$\mathbb{C} - \{0\}$ y, para cada par de números reales ε y R tales que $0 < \varepsilon < R$, el circuito

$$I(-R, -\varepsilon) \cup C_\varepsilon \cup I(\varepsilon, R) \cup \Gamma_R$$

ilustrado en la figura siguiente, donde:

$$I(-R, -\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : -R \leq x \leq -\varepsilon\} \quad , \quad C_\varepsilon = \{\varepsilon e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\} \text{ (sentido } \theta : \pi \rightarrow 0)$$

$$I(\varepsilon, R) = \{x \in \mathbb{R} : \varepsilon \leq x \leq R\} \quad \text{y} \quad \Gamma_R = \{R e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$$



Por el Teorema de Cauchy-Goursat tenemos, para todos ε y R tales que $0 < \varepsilon < R$:

$$\int_{I(-R,-\varepsilon)} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz + \int_{I(\varepsilon,R)} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0 \quad (*)$$

Estudiemos estas integrales con la idea de hacer tender $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ y $R \longrightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} (a) \quad \int_{I(-R,-\varepsilon)} f(z)dz + \int_{I(\varepsilon,R)} f(z)dz &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \stackrel{t=-x}{=} \int_R^{-\varepsilon} \frac{e^{-ix}}{-x} d(-x) + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \\ &= -\int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow +\infty}]{\quad} 2i \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx \end{aligned}$$

$$(b) \quad \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = -\int_0^\pi f(\varepsilon e^{i\theta}) \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = -\int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -i\pi.$$

En el último paso hemos utilizado la igualdad $\varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = \int_0^\pi (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{i\varepsilon e^{i\theta}}) d\theta$, que requiere una buena

justificación: el intercambio de límites con integrales puede ser muy peligroso. En nuestro caso, la continuidad uniforme del integrando en el rectángulo cerrado $\{(\varepsilon, \theta) : 0 \leq \varepsilon \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ es suficiente. Pero si la continuidad uniforme no le gusta, puede probar la acotación, válida para todo $\varepsilon > 0$ y todo $\theta \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} |e^{i\varepsilon e^{i\theta}} - 1| &= \left| (1 + i\varepsilon e^{i\theta} + \frac{1}{2!} i^2 \varepsilon^2 e^{2i\theta} + \frac{1}{3!} i^3 \varepsilon^3 e^{3i\theta} + \dots) - 1 \right| = \left| i\varepsilon e^{i\theta} + \frac{1}{2!} i^2 \varepsilon^2 e^{2i\theta} + \frac{1}{3!} i^3 \varepsilon^3 e^{3i\theta} + \dots \right| \leq \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 + \frac{1}{3!} \varepsilon^3 + \dots = e^\varepsilon - 1, \text{ De esta desigualdad se sigue que } \left| \int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta - \pi \right| = \left| \int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta - \int_0^\pi d\theta \right| = \\ &\left| \int_0^\pi (e^{i\varepsilon e^{i\theta}} - 1) d\theta \right| \leq \int_0^\pi |e^{i\varepsilon e^{i\theta}} - 1| d\theta \leq \int_0^\pi (e^\varepsilon - 1) d\theta = (e^\varepsilon - 1)\pi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

(c) $\int_{\Gamma_R} f(z)dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$. Para probar esto, utilizaremos – por primera vez en este apunte –

el popular *Lema de Jordan*, demostrado en el apéndice, que establece que para todo $R > 0$ se

$$\text{verifica: } \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta \leq \frac{\pi}{R}.$$

Dicho sea de paso: es el mismo Jordan de las formas canónicas de matrices, que usted tal vez recuerde de su paso por álgebra lineal. Se trata de Camille Jordan (1838-1922).

Lo que se hace habitualmente es acotar el módulo de la integral por una función que tiende a cero.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \right| &= \left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{i[R \cos(\theta) + iR \operatorname{sen}(\theta)]}}{R e^{i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta \right| = \left| \int_0^\pi e^{iR \cos(\theta)} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} i d\theta \right| \leq \\ &\leq \int_0^\pi |e^{iR \cos(\theta)} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} i| d\theta = \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta \stackrel{\text{Lema de Jordan}}{\leq} \frac{\pi}{R}. \end{aligned}$$

Ya tenemos todo lo necesario para tomar límites en (*) para $\varepsilon \rightarrow 0^+$ y $R \rightarrow +\infty$, y obtenemos:

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx - i\pi = 0$$

Es decir: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \pi$, que es lo que teníamos que probar (para el caso $\lambda = 1$). Dejamos como ejercicio deducir el resto de los casos mediante un cuidadoso cambio de variable.

$$(3) \text{ Para toda constante real } \lambda: \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx = i\pi \text{sign}(\lambda) = \begin{cases} -\pi & \text{si } \lambda < 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ \pi & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

Prueba: Basta aplicar la definición de valor principal y utilizar el cálculo anterior (y algunas otras cosas que hemos aprendido en el camino):

$$\begin{aligned} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx &= \lim_{(\varepsilon, b) \rightarrow (0^+, +\infty)} \left(\int_{-b}^{-\varepsilon} \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx \right) = \\ &= \lim_{(\varepsilon, b) \rightarrow (0^+, +\infty)} \left(\overbrace{\int_{-b}^{-\varepsilon} \frac{\cos(\lambda x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{\cos(\lambda x)}{x} dx}^{=0} + i \left(\int_{-b}^{-\varepsilon} \frac{\text{sen}(\lambda x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{\text{sen}(\lambda x)}{x} dx \right) \right) = \\ &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda x)}{x} dx \stackrel{(2)}{=} i\pi \text{sign}(\lambda). \end{aligned}$$

(4) Para todo par de constantes reales $\alpha > 0$ y ω :

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\alpha x) e^{\pm i\omega x}}{x} dx = \Phi_{\alpha}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega < -\alpha \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \omega = -\alpha \\ \pi & \text{si } -\alpha < \omega < \alpha \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } \omega = \alpha \\ 0 & \text{si } \omega > \alpha \end{cases}$$

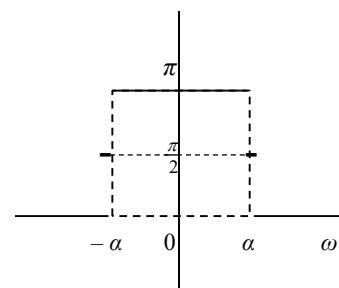


Gráfico de la función Φ_{α}

Observación: Como ya es habitual, se considera que en el punto $x = 0$ el integrando toma el valor α , resultando ser una función continua en toda la recta.

Prueba: Este resultado es consecuencia de (2) y de las siguientes cuentas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha x)e^{i\omega x} &= \operatorname{sen}(\alpha x)[\cos(\omega x) + i\operatorname{sen}(\omega x)] = \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\omega x) + i[\operatorname{sen}(\alpha x)\operatorname{sen}(\omega x)] = \\ &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha x + \omega x) + \operatorname{sen}(\alpha x - \omega x)] + \frac{i}{2}[\cos(\alpha x - \omega x) - \cos(\alpha x + \omega x)] \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $x \neq 0$:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha x)e^{i\omega x}}{x} = \frac{\operatorname{sen}((\alpha + \omega)x)}{2x} + \frac{\operatorname{sen}((\alpha - \omega)x)}{2x} + i \overbrace{\frac{\cos((\alpha - \omega)x)}{2x} - \frac{\cos((\alpha + \omega)x)}{2x}}^{\text{impar}} \quad (*)$$

(Ya hemos observado que para $x = 0$, el valor del integrando es α ; de todos modos, el valor de la integral no depende del valor del integrando en un solo punto, siempre y cuando este integrando sea seccionalmente continuo). Ahora, aplicando la definición de valor principal (como en la integral (3)) y teniendo en cuenta que la parte imaginaria de (*) es impar, resulta

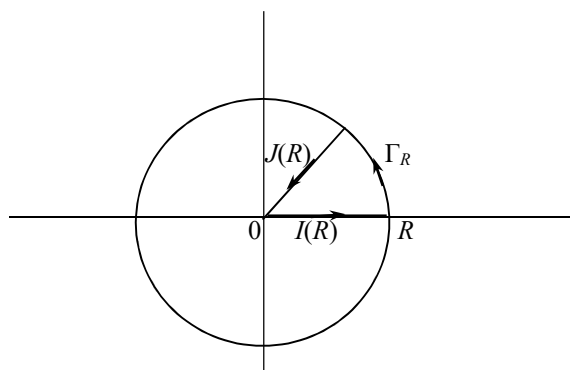
$$\begin{aligned} \operatorname{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)e^{i\omega x}}{x} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}((\alpha + \omega)x)}{x} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}((\alpha - \omega)x)}{x} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} [\operatorname{sign}(\alpha + \omega) + \operatorname{sign}(\alpha - \omega)] \stackrel{\text{ejercicio}}{=} \Phi_{\alpha}(\omega) \end{aligned}$$

$$(5) \int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad (\text{Integrales de Fresnel}).$$

Prueba: Mediante el cambio de variable $t = x^2$ se tiene $\int_1^b \operatorname{sen}(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{b}} \frac{\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{t}} dt$ y

$\int_1^b \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{b}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$ para todo $b > 0$. Ahora, el criterio de convergencia de Dirichlet

permite deducir la convergencia de estas integrales. Para el cálculo, consideremos la función entera $f(z) = e^{-z^2}$ y, para cada $R > 0$, el circuito indicado en la figura siguiente:



El segmento $J(R)$ se encuentra en la bisectriz del primer cuadrante, y las otras dos partes del circuito ya son como de la familia. Ahora, comenzando por el Teorema de Cauchy-Goursat:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{I(R)} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{J(R)} f(z)dz = \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz - \int_0^R e^{-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)t\right]^2} \frac{1+i}{\sqrt{2}} dt = \\ &= \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-it^2} dt = \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R [\cos(t^2) - i\operatorname{sen}(t^2)] dt \end{aligned}$$

Es decir: para todo $R > 0$:

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R [\cos(t^2) - i\operatorname{sen}(t^2)] dt = 0 \quad (*)$$

Veamos ahora que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} f(z)dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-[Re^{i\theta}]^2} Rie^{i\theta} d\theta \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos(2\theta) - iR^2 \operatorname{sen}(2\theta)} Rie^{i\theta} d\theta \right| \leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{-R^2 \cos(2\theta)} e^{-iR^2 \operatorname{sen}(2\theta)} \cdot ie^{i\theta} \right| d\theta \\ &= R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos(2\theta)} d\theta \stackrel{t=2\theta}{=} \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \cos(t)} dt = \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right)} dt \stackrel{\theta=t+\frac{\pi}{2}}{=} \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \operatorname{sen}(\theta)} d\theta \stackrel{\text{Integrando positivo}}{\leq} \\ &\leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \operatorname{sen}(\theta)} d\theta \stackrel{\text{Lema de Jordan}}{\leq} \frac{R}{2} \times \frac{\pi}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando límites en (*) para $R \rightarrow +\infty$ obtenemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx + 0 - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} [\cos(t^2) - i\operatorname{sen}(t^2)] dt = 0 \quad (**)$$

La primera integral la calculamos en (1) y es $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Haciendo cuentas para separar partes

real e imaginaria en (**) obtenemos, finalmente: $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Nota 4: Debo confesar que tenía la intención de incluir en este apunte otras integrales impropias que definen funciones muy importantes, como las funciones Gamma y Beta de Euler, además de un teorema muy importante (el Lema de Riemann - Lebesgue). Pero la inesperada extensión de este apunte me decidió relegar estos temas a los correspondientes apuntes sobre la Transformada de Fourier (el Lema) y la Transformada de Laplace (las funciones de Euler).

(E) TRES EJEMPLOS ADICIONALES

Damos ahora, con cierto detalle, tres ejemplos que exhiben algunos métodos de cálculo de integrales impropias que no aparecieron en la lista anterior. El primero nos va a venir muy bien cuando estudiemos la Transformada de Fourier, una de las principales razones para el estudio de integrales impropias en este curso. La función que aparece en el primer ejemplo es, precisamente, la transformada de Fourier de $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$. Los presentamos a modo de ejercicios resueltos. No todas las resoluciones tienen el mismo nivel de detalle.

Ej.1) Estudiar la convergencia y calcular, para cada $\omega \in \mathfrak{R}$, la integral $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{a^2 + t^2} dt$ donde a es un número real positivo. (Por ahora, el símbolo \hat{f} es simplemente una notación)

Resolución: El módulo del integrando admite la acotación $\left| \frac{e^{-i\omega t}}{a^2 + t^2} \right| \leq \frac{1}{a^2 + t^2}$, válida para

todo $t \in \mathfrak{R}$ (y cualquier $\omega \in \mathfrak{R}$). Por ser $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2}$ convergente (adaptar el Ejemplo 5)b),

resulta que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{a^2 + t^2} dt$ converge absolutamente cualquiera sea $\omega \in \mathfrak{R}$. En

particular, coincide con su valor principal, que es lo que calcularemos. Para cada $\omega \in \mathfrak{R}$,

consideremos la función $h_\omega(z) = \frac{e^{-i\omega z}}{a^2 + z^2} = \frac{e^{-i\omega z}}{(a - iz)(a + iz)}$, cuyas únicas singularidades son

los polos simples ia y $-ia$. Ahora, para cada $R > a$, integraremos esta función en el circuito

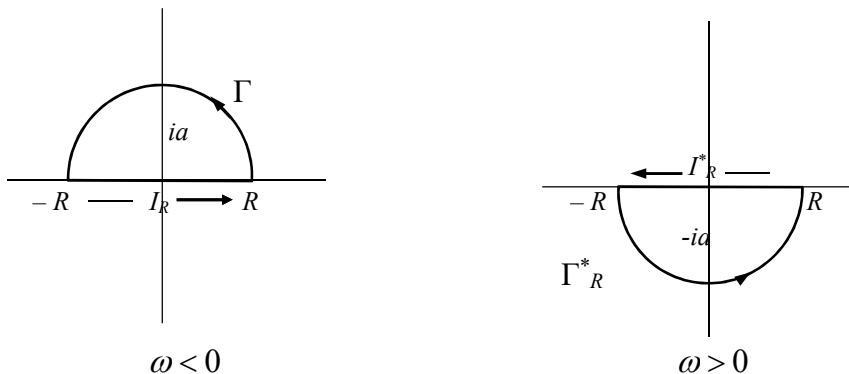
$I_R \cup \Gamma_R$, si $\omega < 0$, o bien en el circuito $I_R^* \cup \Gamma_R^*$, si $\omega > 0$, donde (ver figura a continuación):

$$I_R = \{x \in \mathfrak{R} : -R \leq x \leq R\} \text{ (con orientación } x : -R \rightarrow R),$$

$$\Gamma_R = \{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\} \text{ (con orientación } \theta : 0 \rightarrow \pi),$$

$$I_R^* = \{x \in \mathfrak{R} : -R \leq x \leq R\} \text{ (con orientación } x : R \rightarrow -R) \text{ y}$$

$$\Gamma_R^* = \{Re^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq 0\} \text{ (con orientación } \theta : -\pi \rightarrow 0)$$



Para $\omega < 0$, integrando h_ω en el intervalo real y en la semicircunferencia superior indicada en la figura se tiene (Teorema de los Residuos)

$$\int_{I_R} h_\omega(z) dz + \int_{\Gamma_R} h_\omega(z) dz = 2\pi i \operatorname{RES}(h_\omega, ia) = 2\pi i \frac{e^{-i\omega ia}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{a\omega} \quad (*)$$

La primera integral es

$$\int_{I_R} h_\omega(z) dz = \int_{-R}^R h_\omega(t) dt = \int_{-R}^R \frac{e^{-i\omega t}}{a^2 + t^2} dt$$

Para $R \longrightarrow +\infty$ esta integral tiende a la integral que queremos calcular. Por otra parte, el segundo miembro de (*) no depende de R , por lo tanto, si demostramos que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} h_\omega(z) dz = 0 \quad (**)$$

habremos probado que para cada $\omega < 0$ es $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{a^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{a} e^{a\omega}$. Para probar (**), la clave

es, otra vez, el Lema de Jordan: $\forall r > 0: \int_0^\pi e^{-rsen(\theta)} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-rsen(\theta)} d\theta \leq \frac{\pi}{r}$ (la demostración se puede ver en el apéndice). Un recurso habitual para este tipo de pruebas es demostrar la

igualdad equivalente $\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Gamma_R} h_\omega(z) dz \right| = 0$, pues las acotaciones de los módulos de los números complejos suelen ser más sencillas y efectivas. Veamos:

$$\left| \int_{\Gamma_R} h_\omega(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma_R} |h_\omega(z)| |dz| = \int_{\Gamma_R} \left| \frac{e^{-i\omega z}}{a^2 + z^2} \right| |dz| = \int_0^\pi \left| \frac{e^{-i\omega R \cos(\theta) + \omega R sen(\theta)}}{a^2 + R^2 e^{i2\theta}} \right| |ie^{i\theta} d\theta| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \frac{e^{\omega R \operatorname{sen}(\theta)}}{\left| a^2 + R^2 e^{i2\theta} \right|} d\theta = \int_0^\pi \frac{e^{\omega R \operatorname{sen}(\theta)}}{\left| a^2 - (-R^2 e^{i2\theta}) \right|} d\theta \stackrel{|\alpha-\beta| \geq \left| |\alpha| - |\beta| \right|}{\leq} \int_0^\pi \frac{e^{\omega R \operatorname{sen}(\theta)}}{\left| |a^2| - |R^2 e^{i2\theta}| \right|} d\theta = \\
&= \int_0^\pi \frac{e^{\omega R \operatorname{sen}(\theta)}}{\left| |a^2| - |R^2| \right|} d\theta \stackrel{R > a}{=} \frac{1}{R^2 - a^2} \int_0^\pi e^{\omega R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta \stackrel{\omega < 0}{=} \frac{1}{R^2 - a^2} \int_0^\pi e^{-|\omega R| \operatorname{sen}(\theta)} d\theta \stackrel{r=|\omega|R}{\leq} \quad (\text{Lema de Jordan}) \\
&\leq \frac{1}{R^2 - a^2} \left(\frac{\pi}{|\omega|R} \right) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

Hemos probado (**) para $\omega < 0$. Para $\omega > 0$, integramos h_ω en el circuito $I_R^* \cup \Gamma_R^*$ y aplicamos el lema de Jordan (para $R \rightarrow +\infty$) obteniendo, de manera totalmente análoga al caso anterior (lo dejamos como ejercicio: prestar atención a las orientaciones de I_R^* y de Γ_R^*) el resultado correspondiente:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{a^2 + t^2} dt = -2\pi i \operatorname{RES}(h_\omega, -ia) = -2\pi i \frac{e^{-i\omega(-ia)}}{-2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-a\omega}$$

Para $\omega = 0$ es, sencillamente, $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + t^2} dt = \frac{1}{a} \left[\operatorname{artg}\left(\frac{t}{a}\right) \right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{a}$.

Resumiendo: para cada $\omega \in \mathfrak{R}$ es $\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$.

Ej. 2) Estudiar convergencia y calcular (si corresponde) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$.

RESOLUCIÓN: El integrando es par, continuo y positivo en toda la recta, y además, para todos $a \geq 1$ y $b \geq 1$:

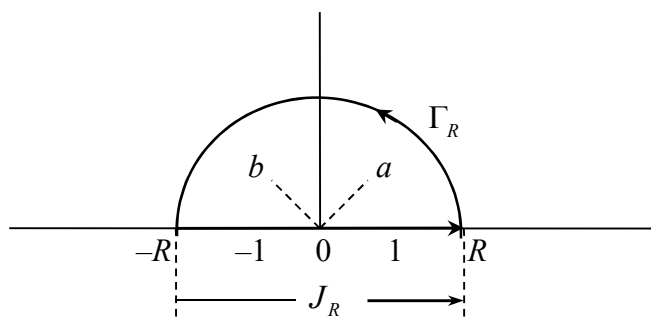
$$\begin{aligned}
\int_{-a}^b \frac{x^2}{1+x^4} dx &= \int_{-a}^{-1} \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_1^b \frac{x^2}{1+x^4} dx = \int_1^a \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_1^b \frac{x^2}{1+x^4} dx \leq \\
&\leq \int_1^a \frac{x^2}{x^4} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^4} dx + \int_1^b \frac{x^2}{x^4} dx \leq \int_1^a \frac{dx}{x^2} + \int_{-1}^1 dx + \int_1^b \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{a} + 2 + 1 - \frac{1}{b} \leq 4
\end{aligned}$$

lo que demuestra la convergencia de la integral por el criterio de acotación. Desde luego, una manera más breve de probar la convergencia de esta integral es aplicar el criterio de comparación asintótica, comparando la integral $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ con la convergente $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Para el cálculo, consideremos la función

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{z^2}{z^4 - i^2} = \frac{z^2}{(z^2 - i)(z^2 + i)} = \frac{z^2}{(z-a)(z+a)(z-b)(z+b)},$$

holomorfa en $C - \{a, -a, b, -b\}$, donde $a, -a, b$ y $-b$ son las cuatro raíces cuartas de -1 , es decir: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ y $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$



Para cada $R > 1$, consideremos el circuito simple positivo $J_R \cup \Gamma_R$ indicado en la figura, donde $J_R = \{x \in \mathfrak{R} : -R \leq x \leq R\}$ y $\Gamma_R = \{R.e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Tenemos, para cada $R > 1$:

$$\begin{aligned} \int_{J_R} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz &= 2\pi i [\text{res}(f, a) + \text{res}(f, b)] = 2\pi i \left[\frac{a^2}{2a(a-b)(a+b)} + \frac{b^2}{(b-a)(b+a)2b} \right] = \\ &= \pi i \left[\frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{b}{b^2 - a^2} \right] = \pi i \frac{a-b}{a^2 - b^2} = \pi i \frac{1}{a+b} = \pi i \frac{1}{\frac{2i}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Por otra parte, $\int_{J_R} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ y además:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| &\leq \int_{\Gamma_R} |f(z)| |dz| = \int_{\Gamma_R} \frac{|z|^2}{|1+z^4|} |dz| = \int_0^\pi \frac{R^2}{|1+R^4 e^{i4\theta}|} |iR e^{i\theta} d\theta| = \\ &= R^3 \int_0^\pi \frac{1}{|R^4 e^{i4\theta} + 1|} d\theta \leq R^3 \int_0^\pi \frac{1}{|R^4 e^{i4\theta} - 1|} d\theta = R^3 \int_0^\pi \frac{1}{R^4 - 1} d\theta = \frac{\pi R^3}{R^4 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Observación: Recuérdese que estamos considerando $R > 1$, y por lo tanto se tiene la desigualdad $|1 + R^4 e^{i4\theta}| \geq |1| - |R^4 e^{i4\theta}| = |1 - R^4| = R^4 - 1$, válida para todo θ .

Finalmente, tenemos el resultado:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

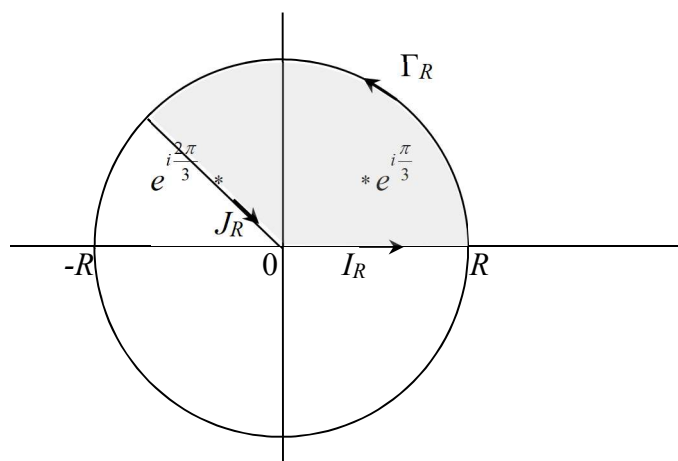
Ej. 3: Estudiar la convergencia de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ y calcular su valor, si corresponde.

Resolución: Puesto que el integrando es positivo en el dominio de integración y para todo $x \geq 1$ se verifica que $\frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{1+x^2}$, se deduce por el criterio de comparación que la integral

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ converge, y por lo tanto que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ converge. Para intentar calcular el valor de

esta integral, hay que resistir la tentación de considerar la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ y utilizar el

circuito del ejemplo anterior. Hay dos problemas con esta última integral: el primero es grave, evidente y se produce en el punto $x = -1$ del circuito. El segundo es que esta integral no daría ninguna información sobre la que necesitamos calcular, puesto que el integrando no es par ni impar. Dicho sea de paso, si el integrando fuera impar, tampoco tendríamos esa información. Por lo tanto, debemos recurrir a otro método. A alguien se le ocurrió, hace mucho tiempo, considerar el circuito $I_R \cup \Gamma_R \cup J_R$ como se muestra en la figura, donde R es un número real mayor que 1.



El recinto interior de este circuito es la región sombreada. Consideremos ahora la función

$$f(z) = \frac{1}{1+z^3} = \frac{1}{(z+1)\left(z - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}, \text{ que es holomorfa en todo el plano excepto en las}$$

tres raíces de -1 : -1 , $e^{i\frac{\pi}{3}}$ y $e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, que son polos simples. Aplicando el Teorema de los Residuos (que en este caso coincide con la primera FIC) tenemos, para todo $R > 1$:

$$\int_{I_R} f(z)dz + \int_{\Gamma_R} f(z)dz + \int_{J_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{RES}\left(f, e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \quad (*)$$

Estudiemos por separado los términos de esta igualdad, con la idea de tomar límites para $R \longrightarrow +\infty$. El segundo miembro es constante para $R > 1$, obviamente.

$$(a) \operatorname{RES}\left(f, e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \frac{1}{\left(e^{\frac{i\pi}{3}} + 1\right)\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)} \stackrel{\text{cuentas}}{=} -\frac{1}{6}(1+i\sqrt{3})$$

$$(b) \int_{I_R} f(z) dz = \int_0^R \frac{dx}{1+x^3} \text{ tiende a nuestra integral } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \text{ cuando } R \longrightarrow +\infty$$

(c) La integral $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$ tiende a 0 cuando $R \longrightarrow +\infty$. Dejamos como ejercicio la comprobación de esto, que es muy parecida a la que escribimos con detalle en los ejemplos

anteriores. Obsérvese que $\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{1+R^3 e^{3i\theta}} \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{|1+R^3 e^{3i\theta}|} \leq \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{|1+R^3 e^{3i\theta}|}$.

$$(d) \int_{J_R} f(z) dz = -\int_0^R f\left(te^{\frac{2\pi i}{3}}\right) e^{\frac{2\pi i}{3}} dt = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_0^R \frac{dt}{1+\left(te^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^3} = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_0^R \frac{dt}{1+t^3}. \text{ Por lo tanto,}$$

$${}_R \underline{\operatorname{Lim}}_{+\infty} \int_{J_R} f(z) dz = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

Entonces, tomando límites en (*) para $R \longrightarrow +\infty$ obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} + 0 - e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = 2\pi i \frac{-(1+i\sqrt{3})}{6} = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-i)$$

Despejando:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{\pi(\sqrt{3}-i)}{3\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)} = \frac{\pi(\sqrt{3}-i)}{3\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\pi(\sqrt{3}-i)}{3\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

APÉNDICE: ALGUNAS (POCAS) DEMOSTRACIONES

1) Criterio de Bolzano - Cauchy:

Dada una función $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ seccionalmente continua, la integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge sii para todo $\varepsilon > 0$ existe $\lambda_\varepsilon \in (a, +\infty)$ tal que para todos $\lambda \geq \mu \geq \lambda_\varepsilon$ se verifica

$$\left| \int_\mu^\lambda f(x) dx \right| < \varepsilon .$$

Demostración:

Sea $F : [a, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Entonces, la integral $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge sii existe el límite $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l$ y es finito (esta es la definición de convergencia de integrales impropias). Utilizaremos la notación clásica $[x]$ para la parte entera de un número real x , es decir: $[x]$ es el único número entero tal que $[x] \leq x < [x] + 1$.

(\Leftarrow) La hipótesis es: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\lambda_\varepsilon \in (a, +\infty)$ tal que para todos $\lambda \geq \mu \geq \lambda_\varepsilon$ se

verifica $\left| \int_\mu^\lambda f(x) dx \right| < \varepsilon$, es decir: $\lambda > \mu \underline{\lim}_{(\lambda, \mu) \rightarrow (+\infty, +\infty)} [F(\lambda) - F(\mu)] = 0$. En particular, tenemos

que $m > n \underline{\lim}_{(m, n) \rightarrow (+\infty, +\infty)} [F(m) - F(n)] = 0$ y por lo tanto la sucesión $(F(n))_{n=[a]+1}^{+\infty}$ es una sucesión de Cauchy en \mathfrak{R} . Sea $l = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} F(n)$ (existe por el Teorema de Completitud). Probemos que $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (mayor que $[a] + 1$) tal que para todo $n > n_\varepsilon$: $|F(n) - l| < \varepsilon$. Por otra parte, dado este mismo ε , por hipótesis existe $x_\varepsilon > a$ tal que para todos $\lambda > \mu > x_\varepsilon$: $|F(\lambda) - F(\mu)| < \varepsilon$. Entonces, para todo $x > \max\{n_\varepsilon, x_\varepsilon\}$, eligiendo $n > \max\{n_\varepsilon, x_\varepsilon\}$

$$|F(x) - l| \leq |F(x) - F(n)| + |F(n) - l| < \varepsilon + \varepsilon$$

(\Rightarrow) Supóngase ahora que $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l \in \mathfrak{R}$. Entonces,

$$\lim_{\substack{(\lambda, \mu) \\ \mu < \lambda}} \underline{\lim}_{(\lambda, \mu) \rightarrow (+\infty, +\infty)} [F(\lambda) - F(\mu)] = l - l = 0$$

■

2) Criterio de Dirichlet para integrales impropias

H.1) $\alpha : [a, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ continua y de clase C^1 en $(a, +\infty)$

H.2) $\forall x \in [a, +\infty) : \alpha(x) > 0$

H.3) $\forall x \in (a, +\infty) : \alpha'(x) < 0$

H.4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$

H.5) $\beta : [a, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ continua

H.6) $\exists M > 0 : \forall b > a : \left| \int_a^b \beta(x) dx \right| \leq M$

T) $\int_a^{+\infty} \alpha(x)\beta(x) dx$ converge.

Observación: Algunas de las cuatro primeras hipótesis están «solapadas» (por ejemplo: H.3) y H.4) implican H.2)), pero esta lista simplifica su uso en la demostración y – por otra parte – no dificulta su aplicación en muchos casos importantes (v.gr.: $\alpha(x) = x^{-\lambda}$ ($\lambda > 0$) y $\beta(x) = \text{sen}(\omega x)$ en la semirrecta $[1, +\infty)$).

Demostración: Sea $B : [a, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $B(x) = \int_a^x \beta(t) dt$. Por hipótesis H.5) y H.6),

B está bien definida, es de clase C^1 en $(a, +\infty)$, y es la primitiva de β en $[a, +\infty)$ que se anula en a . Además, $\forall x > a : |B(x)| \leq M$. Demostraremos la convergencia de la integral

$\int_a^{+\infty} \alpha(x)\beta(x) dx$ mediante el criterio de Bolzano - Cauchy. Dados $c > b > a$:

$$\int_b^c \alpha(x)\beta(x) dx = \int_b^c \{ [\alpha(x)B(x)]' - \alpha'(x)B(x) \} dx = \alpha(c)B(c) - \alpha(b)B(b) - \int_b^c \alpha'(x)B(x) dx \quad (1)$$

Por lo tanto:

$$\left| \int_b^c \alpha(x)\beta(x) dx \right| \leq |\alpha(c)| |B(c)| + |\alpha(b)| |B(b)| + \left| \int_b^c \alpha'(x)B(x) dx \right| \quad (2)$$

Ahora bien: $|\alpha(c)| = \alpha(c)$, $|\alpha(b)| = \alpha(b)$ (hipótesis (H.2)), $|B(c)| \leq M$ y $|B(b)| \leq M$ (como ya hemos observado). Por lo tanto, de (2) se tiene

$$\left| \int_b^c \alpha(x)\beta(x) dx \right| \leq [\alpha(c) + \alpha(b)]M + \left| \int_b^c \alpha'(x)B(x) dx \right| \quad (3)$$

Ahora bien: $\forall x > a$:

$$|B(x)| \leq M \Rightarrow -M \leq B(x) \leq M \stackrel{H.3}{\Rightarrow} -\alpha'(x)M \geq \alpha'(x)B(x) \geq \alpha'(x)M$$

Por lo tanto:
$$-M \int_b^c \alpha'(x) dx \geq \int_b^c \alpha'(x) B(x) dx \geq M \int_b^c \alpha'(x) dx$$

o bien:
$$-M[\alpha(c) - \alpha(b)] \geq \int_b^c \alpha'(x) B(x) dx \geq M[\alpha(c) - \alpha(b)] .$$

Puesto que $\alpha(c) - \alpha(b) < 0$ (por H.3), α es estrictamente decreciente), lo que resulta es

$$\left| \int_b^c \alpha'(x) B(x) dx \right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(c)] \quad (4)$$

Finalmente, de (3) y (4) se obtiene:

$$\left| \int_b^c \alpha(x) \beta(x) dx \right| \leq [\alpha(c) + \alpha(b)]M + M[\alpha(b) - \alpha(c)] = 2M\alpha(b) \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 0$$

(en el último paso hemos utilizado la hipótesis H.4)). Obsérvese que $b \rightarrow +\infty$ implica que también $c \rightarrow +\infty$, pues $b < c$ ■

3) Lema de Jordan: $\forall R > 0 : \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta \leq \frac{\pi}{R} .$

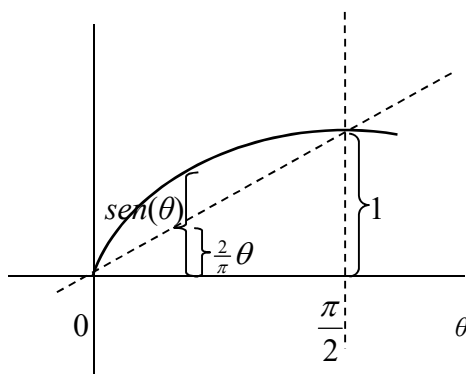
P/ En primer lugar, la igualdad $\int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta$ se deduce de la identidad $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$ y de un cambio de variables:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta \stackrel{\alpha = \pi - \theta}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R \operatorname{sen}(\pi - \alpha)} d\alpha = \\ &\stackrel{\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen}(\alpha)} d\alpha = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta \end{aligned}$$

Ahora, para demostrar la desigualdad, observemos que para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ se verifica

$$0 \leq \frac{2}{\pi} \theta \leq \text{sen}(\theta) \quad (*)$$

Esta desigualdad puede entenderse a partir de la siguiente figura ¹ :



Entonces, para todo $R > 0$:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq R \frac{2}{\pi} \theta \leq R \text{sen}(\theta) \Rightarrow 1 \leq e^{\frac{2R}{\pi} \theta} \leq e^{R \text{sen}(\theta)} \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{e^{\frac{2R}{\pi} \theta}} \geq \frac{1}{e^{R \text{sen}(\theta)}}$$

y resulta finalmente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \text{sen}(\theta)} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi} \theta} d\theta = \left[-\frac{\pi}{2R} e^{-\frac{2R}{\pi} \theta} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R} (-e^{-R} + 1) \leq \frac{\pi}{2R} \quad \blacksquare$$

¹ Esta desigualdad puede probarse analíticamente de la siguiente manera (es un ejercicio de Análisis I): la función $f(x) = \text{sen}(x) - \frac{2}{\pi}x$ verifica $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$. Si f se anulara en algún punto $a \in (0, \frac{\pi}{2})$, entonces la derivada de f se anularía en un punto $b \in (0, a)$ y también en algún punto $c \in (a, \frac{\pi}{2})$ (Teorema de Rolle). Pero $f''(x) = -\text{sen}(x) < 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, lo que implica que la derivada primera es estrictamente decreciente en $(0, \frac{\pi}{2})$ y por lo tanto no puede anularse en dos puntos distintos, en contra de la conclusión $f'(b) = 0 = f'(c)$ (absurdo). Por lo tanto, f no se anula en ningún punto del intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Por ser $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} > 0$, es entonces $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Observación: La desigualdad (*) es bastante fina, pues implica que $\frac{2}{\pi}x < \text{sen}(x) < x$ para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, donde $\frac{2}{\pi} \approx 0.6366$.
