

**Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.**  
**ANÁLISIS MATEMÁTICO III**

**APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA**  
*D. Prelat – 2020*

**§ 10. EL TEOREMA DE CAUCHY - GOURSAT Y SUS CONSECUENCIAS.**

Hemos llegado al corazón del análisis de variable compleja: el Teorema de Cauchy - Goursat. César A. Trejo califica a este teorema como “la verdadera piedra basal de la teoría de las funciones analíticas”, en una nota de su libro *Funciones de Variable Compleja* (Harper & Row Latinoamericana - 1974). La nota completa la transcribimos en el Apéndice 10.0. Aclaremos que “teoría de las funciones analíticas” es sinónimo de “análisis de variable compleja”, por razones que veremos en este capítulo.

Aclaración sobre la pronunciación: Cauchy y Goursat son apellidos franceses, como sus portadores ilustres, y se pronuncian “Coshi” y “Gursát”, respectiva y aproximadamente.

En el capítulo anterior hemos definido y estudiado las integrales de funciones de variable compleja continuas. Ahora, nos concentraremos en el caso de integrales de funciones holomorfas en caminos cerrados (circuitos simples). Dada una función  $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en un abierto  $D \subseteq \mathbb{C}$  y un circuito simple  $C \subset D$ , su integral sobre  $C$  es el número complejo

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy = \oint_C \vec{f}_1 \cdot \vec{dl} + i \oint_C \vec{f}_2 \cdot \vec{dl} \quad (10.1)$$

donde  $u$  y  $v$  son las componentes real e imaginaria de  $f$ ,  $\vec{f}_1 : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$  es el campo tal

que  $\vec{f}_1(x, y) = (\overbrace{u(x, y)}^{P_1(x, y)}, \overbrace{-v(x, y)}^{Q_1(x, y)})$ , y  $\vec{f}_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$  es el campo definido por

$\vec{f}_2(x, y) = (\overbrace{v(x, y)}^{P_2(x, y)}, \overbrace{u(x, y)}^{Q_2(x, y)})$ . En el tercer miembro de (10.1) hemos utilizado la notación geométrica de Análisis II, (todo esto lo hemos expuesto en detalle en el capítulo anterior).

Por lo tanto, la integral (10.1) es nula para cualquier circuito  $C \subset D$  si los campos  $\vec{f}_1$  y  $\vec{f}_2$  son conservativos. También hemos repasado las condiciones necesarias y suficientes para esto, y la clave está en el Teorema de Green: para cada circuito simple  $C \subset D$  tal que  $RI(C) \subset D$ , si  $u$  y  $v$  son de clase  $C^1$  tenemos, por dicho teorema:

$$\oint_C \vec{f}_1 \cdot \vec{dl} = \oint_C P_1 dx + Q_1 dy \stackrel{\text{Teorema de Green}}{=} \iint_{RI(C)} \left( \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{RI(C)} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \stackrel{C-R}{=} 0 \quad (10.2)$$

$$\oint_C \vec{f}_2 \cdot \vec{dl} = \oint_C P_2 dx + Q_2 dy \stackrel{\text{Teorema de Green}}{=} \iint_{RI(C)} \left( \frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{RI(C)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \stackrel{C-R}{=} 0$$

Las últimas igualdades se verifican por el teorema de Cauchy – Riemann. Por lo tanto, hasta ahora la conclusión es que: si  $f : D \longrightarrow \mathcal{C}$  es holomorfa en un abierto  $D$  y sus componentes real e imaginaria,  $u$  y  $v$ , son de clase  $C^1$ , entonces la integral de  $f$  sobre cualquier circuito simple  $C \subset D$  tal que  $RI(C) \subset D$  es nula.

El teorema de Cauchy – Riemann afirma que si  $f$  es holomorfa en  $D$ , sus componentes real e imaginaria  $u$  y  $v$  son diferenciables (además de verificar las ecuaciones de Cauchy – Riemann), pero no necesariamente de clase  $C^1$ . Lo que Goursat demostró es que no es necesario que  $u$  y  $v$  sean de clase  $C^1$  para que se anule la integral de  $f$  en cualquier circuito  $C \subset D$  tal que  $RI(C) \subset D$ .

**TEOREMA 10.1 (Cauchy-Goursat):** Si  $f : D \longrightarrow \mathcal{C}$  es holomorfa en un abierto  $D$ , entonces para cualquier circuito simple  $C \subset D$  tal que  $RI(C) \subset D$ :  $\oint_C f(z) dz = 0$ .

**Idea de la demostración:** Primero se demuestra el teorema para el caso en que  $C$  es un triángulo (rectilíneo). Esta es la parte más “técnica” de la demostración y se suele denominar Lema de Goursat (en Análisis de Variable Compleja; existe un Lema de Goursat en Teoría de Grupos). Tal vez algún día tenga tiempo para agregarla a estos apuntes (un apéndice con algunas demostraciones estaría bueno), mientras tanto, se puede consultar cualquier buen libro. Luego se extiende el resultado a poligonales simples cerradas, triangulando el recinto interior de la poligonal, de manera análoga a lo que mostramos en el capítulo anterior para recintos triangulables. Lo ilustramos en la siguiente figura con unos pocos triangulitos, pero que permite entender la idea.

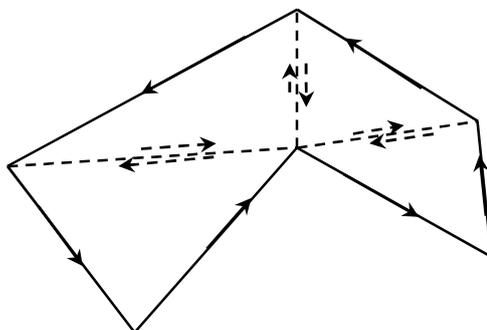


Fig. 1

La integral de  $f$  se anula en cada triángulo y la integral de  $f$  sobre la poligonal (el circuito exterior) es la suma de las circulaciones en cada triángulo (con las orientaciones correspondientes), pues las integrales sobre las aristas comunes se cancelan. Finalmente, mediante el Lema de Aproximación por quebradas (Lema 9.1 – Cap IX página 11) se deduce fácilmente el resultado general. ■

La importancia de esta demostración, insistimos, es que no requiere la continuidad de las derivadas parciales de  $u$  y de  $v$ , lo que permite extender considerablemente el alcance del teorema.

Comencemos a calentar los motores. Todo lo referente a recintos triangulables y orientaciones de sus bordes ha sido repasado en el capítulo anterior.

**Corolario 10.1** (Teorema de Cauchy-Goursat generalizado): Sea  $f : D \rightarrow \mathcal{C}$  una función holomorfa en un abierto  $D \subseteq \mathcal{C}$  y sea  $R \subset D$  un recinto triangulable con borde  $\Gamma \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$ , siendo  $\Gamma$  el circuito exterior y  $C_1, C_2, \dots, C_m$  los circuitos interiores, con las siguientes orientaciones:  $\Gamma$  está orientado positivamente respecto del recinto (“las flechitas dejan el recinto a la izquierda”) y los circuitos interiores están orientados negativamente respecto del recinto (“las flechitas dejan el recinto a la derecha”) (Ver Figura 2 ). Entonces:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \oint_{C_k} f(z) dz \quad (10.3)$$

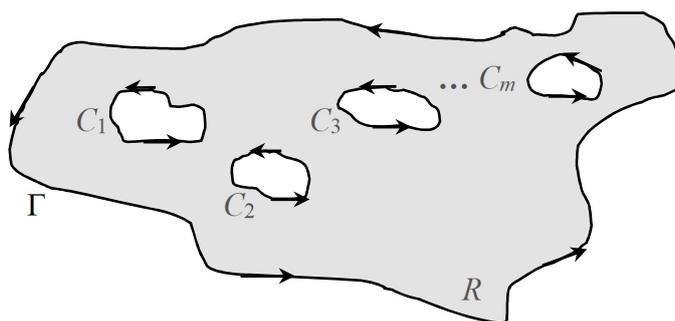


Fig.2

**Demostración:** La idea es la misma que hemos repasado en el capítulo anterior para la forma generalizada (9.7) del teorema de Green. La clave está en aplicar el teorema de Cauchy – Goursat a cada triángulito curvilíneo de una triangulación de  $R$ . ■

**Nota 10.1:** (*Invariancia homotópica o “propiedad elástica” de las integrales de funciones holomorfas*) Un caso particular del corolario 10.1 que utilizaremos muy seguido es el de un solo circuito interior.

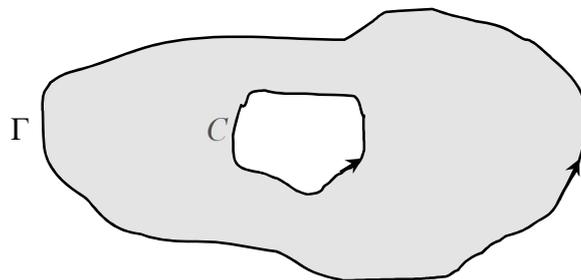


Fig 3

En este caso tenemos que  $\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_C f(z)dz$ . En una visualización animada de la

Figura 3, podríamos decir que el circuito  $C$  se ha “estirado elásticamente” hasta tomar la forma y tamaño (y la posición) de  $\Gamma$ , sin salirse en ningún momento del dominio de  $f$ . Recíprocamente,  $C$  es una “contracción elástica” de  $\Gamma$  (siempre dentro del dominio de  $f$ ). Estas “deformaciones elásticas” pueden definirse con toda precisión mediante el concepto de *homotopía* y permiten definir la conexidad simple en espacios mucho más generales que el plano (Ver Apéndice 10.2). Cuando utilizemos este caso del corolario 10.1, lo mencionaremos como “propiedad elástica” de las integrales de funciones holomorfas, o bien – cuando nos pongamos más serios – *invariancia homotópica* de las mismas.

**Corolario 10.2:** (*Independencia de la integral respecto del camino*) Si  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo  $D \subseteq \mathbb{C}$ , entonces para cada par de caminos  $C_1 \subset D$  y  $C_2 \subset D$  con mismo punto inicial  $p$  y mismo punto final  $q$ , se verifica

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \quad (10.4)$$

**Demostración:**

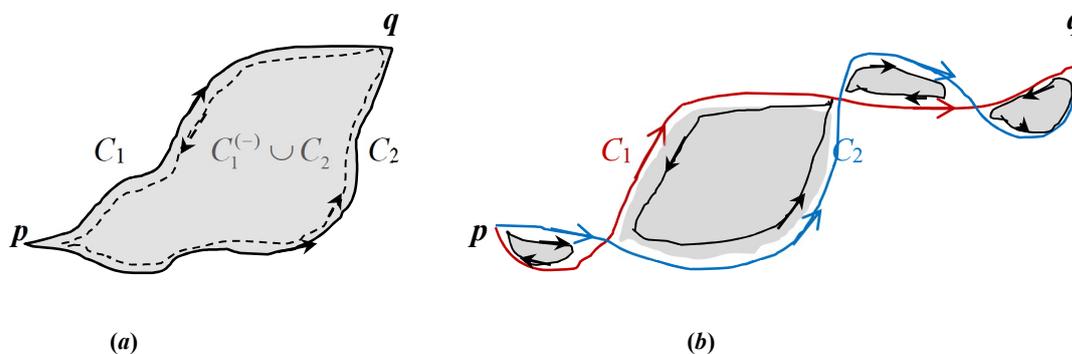


Fig. 3

Si los caminos  $C_1$  y  $C_2$  no se cruzan (entre sus extremos), como en la Figura 3 (a), basta aplicar el Teorema de Cauchy – Goursat al circuito  $C_1^{(-)} \cup C_2$ , cuyo recinto interior está contenido en  $D$ , pues  $D$  es simplemente conexo. Si los caminos se cruzan en una cantidad finita de puntos intermedios, como se ilustra en la Figura 3 (b), basta observar que

$$\int_{C_2} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz \text{ es la suma de las integrales de } f \text{ en cada uno de los}$$

circuitos simples que quedan formados entre los cruces de los caminos, y cada una de estas integrales es nula por el Teorema de Cauchy – Goursat, pues los recintos interiores de estos circuitos están contenidos en  $D$ , por ser  $D$  simplemente conexo. Ahora, queda el problema de una cantidad infinita de cruces. Si usted consideró esta posibilidad, lo felicito. Un ejemplo sencillo de este caso es el siguiente: el camino  $C_1$  parametrizado por

$$\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathcal{C} \text{ tal que } \gamma_1(t) = t + i \left[ t^A \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{t} \right) \right] \text{ si } t \neq 0 \text{ y } \gamma_1(0) = 0, \text{ y por otro lado } C_2$$

parametrizado por  $\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathcal{C}$  tal que  $\gamma_2(t) = t$ . Observe que  $\gamma_1$  es de clase  $C^1$ . Estos dos arcos regulares tienen como punto inicial 0, punto final 1, y se cruzan en los infinitos puntos intermedios  $\gamma_1(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} = \gamma_2(\frac{1}{n})$ ,  $n$  entero positivo cualquiera. Para resolver este problema, se puede recurrir a una variante del Lema de aproximación por quebradas (Lema 9.1) y cuyo enunciado es el siguiente: dada una función  $f : D \longrightarrow \mathcal{C}$  continua en un dominio  $D \subseteq \mathcal{C}$  y dado un camino  $C \subset D$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existe una poligonal  $P_\varepsilon$  inscrita en el camino  $C$  (ver figura 6 del capítulo 9, que acompaña el lema citado) tal

$$\text{que } \left| \int_C f(z)dz - \int_{P_\varepsilon} f(z)dz \right| < \varepsilon. \text{ La prueba puede hacerse utilizando las ideas de la}$$

demostración del Lema 9.1 o bien consultarla en algún buen libro, como por ejemplo el ya citado de César Trejo. [Dicho sea de paso, este libro presenta esta variante del Lema como Lema de Aproximación por Quebradas]. Utilizando esta variante, podemos probar nuestro corolario para cualquiera de los casos que hemos considerado: dado  $\varepsilon > 0$ , sean

$$P_\varepsilon \text{ una poligonal inscrita en } C_1 \text{ tal que } \left| \int_{C_1} f(z)dz - \int_{P_\varepsilon} f(z)dz \right| < \varepsilon, \text{ y sea } Q_\varepsilon \text{ una poligonal}$$

$$\text{inscrita en } C_2 \text{ tal que } \left| \int_{C_2} f(z)dz - \int_{Q_\varepsilon} f(z)dz \right| < \varepsilon. \text{ Ahora las poligonales } P_\varepsilon \text{ y } Q_\varepsilon \text{ no se}$$

pueden cortar en una cantidad infinita de puntos (meditarlo: cada poligonal es la concatenación de una cantidad finita de segmentos de recta), por lo tanto, por lo que ya

hemos probado,  $\int_{P_\varepsilon} f(z)dz = \int_{Q_\varepsilon} f(z)dz$ . Entonces,

$$\left| \int_{C_2} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz \right| = \left| \int_{C_1} f(z)dz - \overbrace{\int_{P_\varepsilon} f(z)dz}^{=0} + \int_{Q_\varepsilon} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{C_1} f(z) dz - \int_{P_\varepsilon} f(z) dz \right| + \left| \int_{Q_\varepsilon} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz \right| < \varepsilon + \varepsilon$$

Hemos probado que  $\left| \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz \right| < 2\varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ , es decir (ejercicio de Salita Naranja), que  $\left| \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz \right| = 0$  ■

**Corolario 10.3:** (Existencia de primitivas de holomorfas en simplemente conexos) Sea  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en un abierto simplemente conexo  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Entonces, existe al menos una primitiva de  $f$  en el dominio  $D$ .

**Demostración (i):** Sea  $z_0 \in D$  un punto (fijo de ahora en más), y, para cualquier punto  $z \in D$ , elijamos un camino simple  $C_{[z_0, z]} \subset D$  de punto inicial  $z_0$  y punto final  $z$  (existe por ser  $D$  arco-conexo). Definamos, entonces,  $F: D \rightarrow \mathbb{C}$  tal que para cada  $z \in D$ ,  $F(z) = \int_{C_{[z_0, z]}} f(w) dw$ . Obsérvese que por ser  $f$  holomorfa y  $D$  simplemente conexo, esta integral no depende del camino elegido entre  $z_0$  y  $z$ .

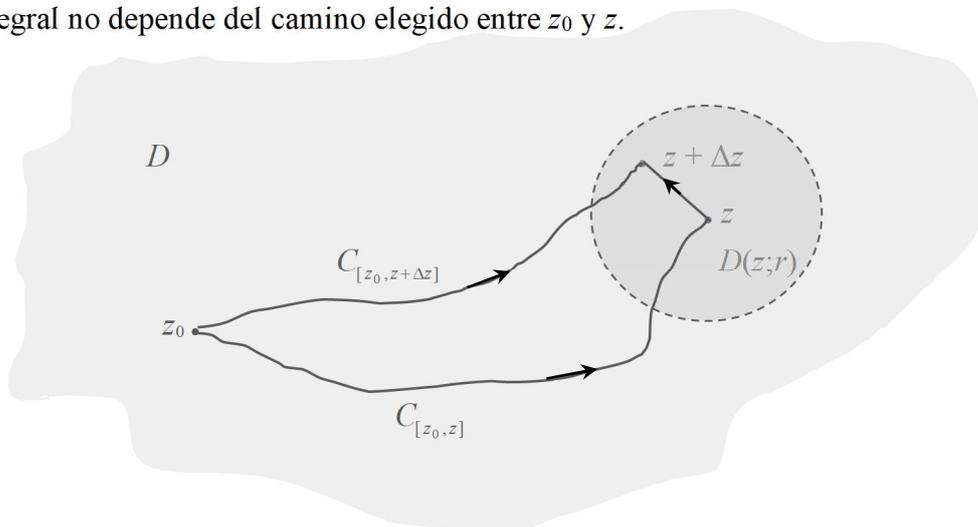


Fig. 4

Ahora, dado  $z \in D$ , por ser  $D$  abierto, existe  $r > 0$  tal que  $D(z; r) \subseteq D$ . Entonces, para cualquier complejo  $\Delta z$  tal que  $|\Delta z| < r$ , el punto  $z + \Delta z$  es un punto de  $D(z; r)$  y por lo tanto todo el segmento de recta  $[z, z + \Delta z]$  de extremos  $z$  y  $z + \Delta z$  está contenido en el disco  $D(z; r)$  (propiedad de los convexos). Todo esto está ilustrado en la figura 4. Consideraremos al segmento de recta  $[z, z + \Delta z]$  orientado desde  $z$  hacia  $z + \Delta z$ , como se indica en la figura. Por el Corolario anterior,

$$\int_{C_{[z_0, z+\Delta]}} f(w)dw = \int_{C_{[z_0, z]}} f(w)dw + \int_{[z, z+\Delta]} f(w)dw \quad (10.5)$$

En términos de nuestra función  $F$ :

$$F(z + \Delta z) = F(z) + \int_{[z, z+\Delta]} f(w)dw . \quad (10.6)$$

Parametricemos el segmento de recta de la manera más sencilla:

$$[z, z + \Delta z] = \left\{ \overbrace{z + t\Delta z}^{w(t)} : 0 \leq t \leq 1 \right\} . \quad (10.7)$$

Entonces,  $dw = \dot{w}(t)dt = \Delta z dt$  y resulta:

$$\int_{[z, z+\Delta]} f(w)dw = \int_0^1 f(z + t\Delta z)\Delta z dt = \Delta z \int_0^1 f(z + t\Delta z)dt . \quad (10.8)$$

Reemplazando en (10.6), para todo  $\Delta z \in \mathcal{C}$  tal que  $0 < |\Delta z| < r$  tenemos que

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \int_0^1 f(z + t\Delta z)dt . \quad (10.9)$$

Ahora, solo nos queda probar que  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_0^1 f(z + t\Delta z)dt = f(z)$ . Es muy tentador escribir

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_0^1 f(z + t\Delta z)dt = \int_0^1 \left\{ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z + t\Delta z) \right\} dt = \int_0^1 f(z)dt = f(z) \int_0^1 dt = f(z)$$

La segunda igualdad se justifica por la continuidad de  $f$ , la tercera y la cuarta no requieren mayores comentarios. Pero la primera es delicada. Un ejemplo de lo que puede ocurrir con el intercambio de límites con integrales puede verse en el Apéndice 10.1 de este

capítulo. Intentemos demostrar, entonces, que  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_0^1 f(z + t\Delta z)dt = f(z)$  y así evitar

problemas jurídicos serios. Recordemos que por ser  $f$  holomorfa en  $D$ , para cada  $z \in D$  existe  $\varphi_z : D \rightarrow \mathcal{C}$  tal que:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \text{Para todo } \tilde{z} \in D: f(\tilde{z}) = f(z) + f'(z)(\tilde{z} - z) + (\tilde{z} - z)\varphi_z(\tilde{z}) \\
\text{(b)} \quad & \lim_{\tilde{z}} \varphi_z(\tilde{z}) = 0
\end{aligned} \tag{10.10}$$

De (a) se deduce que  $\varphi_z$  es continua en  $D - \{z\}$  y de (b) se deduce que  $\varphi_z$  es continua en  $D$  definiendo  $\varphi_z(z) = 0$ . Entonces, para  $\tilde{z} = z + t\Delta z$ :

$$f(z + t\Delta z) = f(z) + f'(z)t\Delta z + t\Delta z \varphi_z(z + t\Delta z)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(z + t\Delta z) dt &= f(z) \int_0^1 dt + f'(z)\Delta z \int_0^1 t dt + \Delta z \int_0^1 t \varphi_z(z + t\Delta z) dt \\
&= f(z) + \frac{1}{2} f'(z)\Delta z + \Delta z \int_0^1 t \varphi_z(z + t\Delta z) dt
\end{aligned}$$

Por lo tanto, solo nos falta probar que el último término del segundo miembro tiende a cero cuando  $\Delta z \rightarrow 0$ . Ahora bien: por ser  $|\varphi_z|: D \rightarrow \mathbb{R}$  continua, es acotada en el compacto  $\overline{D(z; \frac{1}{2}r)} \subset D(z; r) \subseteq D$ . Sea  $M$  una cota superior de  $\{|\varphi_z(\tilde{z})|: \tilde{z} \in \overline{D(z; \frac{1}{2}r)}\}$ .

Entonces, si  $0 \leq |\Delta z| \leq \frac{1}{2}r$ , resulta  $\left| \int_0^1 t \varphi_z(z + t\Delta z) dt \right| \leq \int_0^1 t |\varphi_z(z + t\Delta z)| dt \leq M \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}M$ .

Esta acotación demuestra que  $\Delta z \int_0^1 t \varphi_z(z + t\Delta z) dt \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0$ . Hemos concluido la demostración de (i), sin apelaciones ni objeciones jurídicas posibles. ■

**Observación 10.1:** Recordemos dos hechos importantes en relación con este corolario:

(a) Por ser  $D$  conexo dos primitivas de  $f$  en  $D$  difieren en una constante (pues la conexidad simple implica la conexidad, por definición). Esto fue probado en el Corolario 5.2 del Capítulo V.

(b) Sea  $F: D \rightarrow \mathbb{C}$  una primitiva de  $f$  en  $D$ . Entonces, para cualquier camino  $C_{[p,q]} \subset D$  de origen  $p$  y extremo  $q$  se verifica que  $\int_{C_{[p,q]}} f(z) dz = F(q) - F(p)$ . Esto es válido aunque

$D$  no sea simplemente conexo y fue probado en la última proposición del capítulo anterior.

**Observación 10.2:** Si  $D$  no es simplemente conexo, una función holomorfa en  $D$  puede o no tener primitivas en  $D$ . Por ejemplo, en  $D = \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $J(z) = \frac{1}{z}$  no tiene primitiva y  $J(z)^2 = \frac{1}{z^2}$  sí: la derivada de  $-\frac{1}{z}$  es  $\frac{1}{z^2}$ . Que  $J$  no tiene primitiva en  $\mathbb{C} - \{0\}$  se debe a la “sencilla” razón de que no hay ningún logaritmo definido en  $\mathbb{C} - \{0\}$ . Dados dos puntos  $p$  y  $q$  distintos del origen, la integral  $\int_{C_{[p,q]}} \frac{dz}{z}$  no es necesariamente independiente del camino  $C_{[p,q]} \subset D$ . Por ejemplo, si  $p = 1$  y  $q = -1$ , podemos considerar las dos semicircunferencias orientadas  $C_{[1,-1]} = \{e^{it} : 0 \leq t \leq \pi\}$  y  $C'_{[1,-1]} = \{e^{-it} : 0 \leq t \leq \pi\}$ , ambas con punto inicial 1 y punto final  $-1$ . Entonces:

$$\int_{C_{[1,-1]}} \frac{dz}{z} = \int_0^\pi \frac{ie^{it} dt}{e^{it}} = i \int_0^\pi dt = i\pi \quad \text{y} \quad \int_{C'_{[1,-1]}} \frac{dz}{z} = \int_0^\pi \frac{-ie^{-it} dt}{e^{-it}} = -i \int_0^\pi dt = -i\pi$$

Es decir: las integrales son distintas. Observe que la resta de estas dos integrales es la integral de  $J$  en la circunferencia completa  $C = \{e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ , pues, en efecto:

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \text{ Este ejemplo es, claramente, la versión compleja del}$$

Contraejemplo 9.1 del capítulo IX, pues la componente imaginaria de la integral

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_C \frac{dx + idy}{x + iy} = \oint_C \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right) (dx + idy) = \oint_C \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + i \oint_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

es precisamente la circulación del campo  $W(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  sobre  $C$ . Este

ejemplo puede aprovecharse para observar desde otra perspectiva la cuestión de los cortes y las ramas. La posibilidad de definir una primitiva de  $J$  a partir de la fórmula

$$F(z) = \int_{C[z_0, z]} \frac{dw}{w} \text{ (como hicimos en la demostración del corolario precedente) está dada}$$

por la independencia de la integral respecto del camino. A su vez, la independencia de la integral respecto del camino es equivalente a la anulación de  $\oint_C \frac{dw}{w}$  para cualquier circuito

simple  $C \subset \mathbb{C} - \{0\}$ . Por el Teorema de Cauchy - Goursat, para cualquier circuito simple

$C \subset \mathbb{C} - \{0\}$  tal que  $RI(C) \subset \mathbb{C} - \{0\}$ , se tiene  $\oint_C \frac{dw}{w} = 0$ . Pero la condición

$RI(C) \subset \mathbb{C} - \{0\}$  es equivalente a  $0 \notin RI(C)$ . Dicho de otro modo: el circuito  $C$  no debería “dar una vuelta completa alrededor de 0”. Una manera de evitar que esto ocurra

es restringir el dominio  $D = \mathbb{C} - \{0\}$  de  $J$  a un dominio  $D_0 \subset \mathbb{C} - \{0\}$  que no contenga ningún circuito  $C$  tal que  $0 \in RI(C)$ . Está claro que uno puede elegir, por ejemplo, el semiplano  $D_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ , pero podemos ser más ambiciosos (y delicados) y elegir un dominio más grande, por ejemplo:  $D_0 = \mathbb{C} - \mathfrak{R}_{\leq 0}$ , el plano complejo menos la semirrecta de los reales no positivos. Esta semirrecta es un *corte* que ya conocimos. Eligiendo como punto de partida  $z_0 = 1$ , la función  $F: \mathbb{C} - \mathfrak{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$  tal que

$F(z) = \int_{C[1,z]} \frac{dw}{w}$ , donde  $C[1,z] \subset \mathbb{C} - \mathfrak{R}_{\leq 0}$  es un camino cualquiera con punto inicial 1 y

punto final  $z$ , es una primitiva bien definida en  $D_0 = \mathbb{C} - \mathfrak{R}_{\leq 0}$ , pues este dominio es simplemente conexo. Finalmente, como todas las primitivas de  $J$  en  $D_0 = \mathbb{C} - \mathfrak{R}_{\leq 0}$  difieren en una constante,  $F$  debe ser alguna de las ramas logarítmicas determinadas por el corte  $\mathfrak{R}_{\leq 0}$  (todas estas ramas difieren en una constante imaginaria  $2k\pi i$ , donde  $k$  es un entero). Para saber cuál es, solo debemos observar que  $F(1) = 0$ , pues  $C[1,1] \subset \mathbb{C} - \mathfrak{R}_{\leq 0}$  es un circuito tal que  $RI(C) \subset \mathbb{C} - \mathfrak{R}_{\leq 0}$ . Es decir:  $F$  es el logaritmo principal. Hemos llegado a esta conclusión sin hacer ninguna cuenta, pero si usted prefiere, puede comprobar que, efectivamente  $F(z) = \int_{C[1,z]} \frac{dw}{w} = \operatorname{Log}(z)$ .

Ahora comienza uno de los grandes partidos de Augustin Louis Cauchy.

Primero, unas cuentitas: para cada circunferencia  $C(z_0; r) = \{z_0 + re^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$  de centro  $z_0$  y radio  $r > 0$ , y para cada entero (positivo, negativo o nulo)  $n$ :

$$\oint_{C(z_0; r)} \frac{dw}{(w - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}, \quad (10.11)$$

Veamos por qué: si  $n = 1$ ,

$$\oint_{C(z_0; r)} \frac{dw}{w - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it} dt}{re^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = i2\pi$$

y si  $n \neq 1$ :

$$\oint_{C(z_0; r)} \frac{dw}{(w-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it} dt}{r^n e^{int}} = ir^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt = ir^{1-n} \left( \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos((1-n)t) dt}^{=0} + i \overbrace{\int_0^{2\pi} \text{sen}((1-n)t) dt}^{=0} \right) = 0$$

Una forma de evitar la última cuenta es observar que para  $n \neq 1$  las funciones  $f_n(w) = \frac{1}{(w-z_0)^n}$  tienen primitivas en  $\mathbb{C} - \{z_0\}$ , pues  $\frac{d}{dw} \left[ \frac{(w-z_0)^{-n+1}}{-n+1} \right] = (w-z_0)^{-n}$ .

**Corolario 10.4:** (Primera Fórmula integral de Cauchy: FIC 1). Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en un abierto  $D$ . Entonces para cualquier circuito simple  $C \subset D$  tal que  $RI(C) \subset D$  y para cualquier  $z \in RI(C)$ , se verifica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (10.12)$$

[El circuito  $C$  debe estar orientado positivamente respecto de  $RI(C)$ ]

**Demostración:**

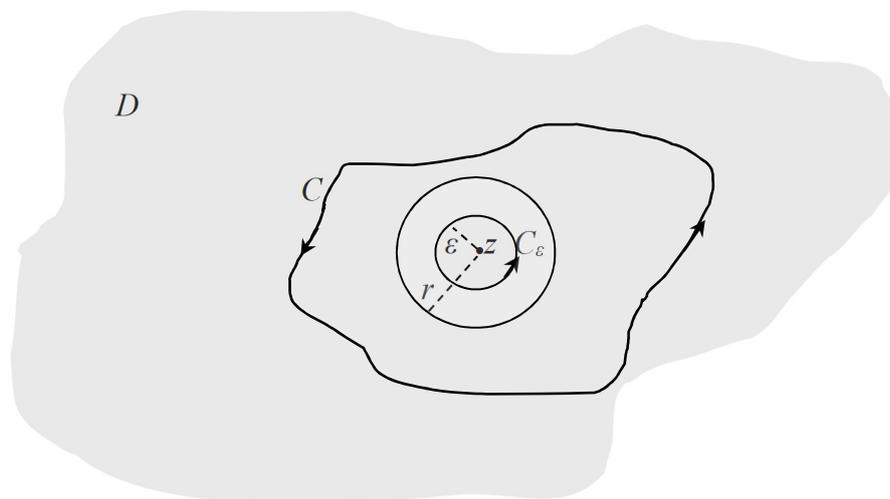


Fig. 5

Dado que el recinto interior de  $C$  es un abierto y  $z$  es un punto del mismo, existe  $r > 0$  tal que  $\overline{D(z;r)} \subseteq RI(C)$ . Para cada  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < \varepsilon < r$ , sea  $C_\varepsilon$  la circunferencia de centro  $z$  y radio  $\varepsilon$ , considerada como circuito simple positivo. La función  $g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$

es holomorfa en  $D - \{z\}$ , por lo tanto, por la "propiedad elástica" de la integral  $\oint_C g(w)dw$

(ver Nota (10.1) arriba),  $\oint_C g(w)dw = \oint_{C_\varepsilon} g(w)dw$ , es decir:

$$\oint_C \frac{f(w)dw}{w-z} = \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(w)dw}{w-z} \quad (10.13)$$

para todo  $\varepsilon$  tal que  $0 < \varepsilon < r$

Ahora bien, dado que  $\oint_{C_\varepsilon} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$  (ver cuenta (10.11)),

$$\begin{aligned} \left| \oint_C \frac{f(w)dw}{w-z} - f(z)2\pi i \right| &\stackrel{(10.13)}{=} \left| \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(w)dw}{w-z} - f(z)2\pi i \right| \stackrel{(10.11)}{=} \left| \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(w)dw}{w-z} - f(z) \oint_{C_\varepsilon} \frac{dw}{w-z} \right| = \\ &= \left| \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(w)dw}{w-z} - \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)dw}{w-z} \right| = \left| \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \right| \end{aligned} \quad (10.14)$$

El integrando  $\frac{f(w) - f(z)}{w-z}$  es una función holomorfa (como función de  $w$ ) en  $D - \{z\}$

y admite límite  $\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} = f'(z)$ . Entonces, la función  $h: D \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$h(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z \\ f'(z) & \text{si } w = z \end{cases}$$

es continua en  $D$ . Por lo tanto, existe  $K = \max\{|h(w)| : w \in \overline{D(z;r)}\}$  (Danke, Herr Weierstrass, ...). Retomando desde (10.14),

$$\left| \oint_C \frac{f(w)}{w-z} - f(z)2\pi i \right| \stackrel{(10.4)}{=} \left| \oint_{C_\varepsilon} h(w)dw \right| \leq \max\{|h(w)| : w \in C_\varepsilon\} L(C_\varepsilon) \leq K L(C_\varepsilon) = K2\pi\varepsilon$$

Hemos demostrado que para todo  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < \varepsilon < r$ :  $\left| \oint_C \frac{f(w)}{w-z} - f(z)2\pi i \right| \leq K2\pi\varepsilon$ ,

de donde se deduce que  $\left| \oint_C \frac{f(w)}{w-z} - f(z)2\pi i \right| = 0$ , es decir: la tesis. ■

**Observación 10.3:** La fórmula (10.12), que acabamos de demostrar, además de ser práctica para el cálculo de integrales complejas, tiene una consecuencia notable: el valor de una función holomorfa en cada punto de su dominio queda completamente determinado por los valores que toma en cualquier circuito alrededor de dicho punto). Más aún, (10.12) establece que  $f(z)$  es el promedio de tales valores, dado que

$\oint_C \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$  (cuentitas (10.11) y “propiedad elástica”). Por ejemplo: sea  $C$  un circuito

$C$  contenido en el dominio  $D$  de  $f$  que  $RI(C) \subset D$ , y supongamos que  $f$  es constante en  $C$ , digamos  $f(z) = c$  para todo  $w \in C$ . Entonces, para todo  $z$  en el recinto interior de  $C$  se

$$\text{tiene: } f(z) \stackrel{(10.2)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{cdw}{w-z} = \frac{c}{2\pi i} \oint_C \frac{dw}{w-z} = c.$$

El siguiente corolario es impresionante. Recordemos que para cada entero  $k \geq 0$ ,  $C^k(I, \mathfrak{R})$  es el espacio vectorial real de las funciones  $f: I \rightarrow \mathfrak{R}$  de clase  $C^k$  en un intervalo abierto  $I \subseteq \mathfrak{R}$ . En particular,  $C^0(I, \mathfrak{R})$  es el espacio de las continuas; en el otro extremo se agrega el espacio  $C^\infty(I, \mathfrak{R})$  de las indefinidamente derivables y el espacio  $C^\omega(I, \mathfrak{R})$  de las analíticas, es decir, de las funciones  $f: I \rightarrow \mathfrak{R}$  desarrollables en series de potencias en torno de cada punto de  $I$  [traducido: tales que para cada  $x_0 \in I$  existe  $r$

$> 0$  para el cual se verifica  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$  para todo  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ ].

Todos estos espacios se pueden ordenar en una cadena infinita de inclusiones estrictas:

$$C^0(I, \mathfrak{R}) \supset C^1(I, \mathfrak{R}) \supset C^2(I, \mathfrak{R}) \supset \dots \supset C^\infty(I, \mathfrak{R}) \supset C^\omega(I, \mathfrak{R}) \quad (10.15)$$

**Remojito 10.1:** Veamos un poquito por qué estas inclusiones son estrictas para el caso en que  $0 \in I$  (elegimos este caso por comodidad; el caso general se lo *traslado* a usted). La primera es sencillita: la función  $f_0(x) = |x|$  es continua en  $I$  pero no derivable en  $I$ . La segunda también es sencillita:  $f_1(x) = x|x|$  es de clase  $C^1$  pero no  $C^2$  (ejercicio;  $f_1$  es una primitiva de  $2f_0$ ). Para la tercera, ya podemos adivinar:  $f_2(x) = x^2|x|$  es de clase  $C^2$  pero no  $C^3$  (ejercicio;  $f_2$  es una primitiva de  $3f_1$ ). Lo dejo seguir y me voy a la última, que no es tan sencillita. El primer ejemplo conocido por la humanidad de una función de clase  $C^\infty$  que no es analítica es de Cauchy:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Puede probarse que todas las derivadas de esta función en 0 son nulas (es un lindo ejercicio de Análisis I), por lo tanto, si fuera desarrollable en series de potencias en un entorno  $(-r, r)$  de 0, tendríamos  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$  para todo  $x \in (-r, r)$ : absurdo.

Ahora, veamos qué pasa con los espacios (vectoriales complejos)  $C^k(D, \mathbb{C})$  de las funciones  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  de clase  $C^k$  en un abierto  $D \subseteq \mathbb{C}$ , incluyendo los espacios  $C^\infty(D, \mathbb{C})$  de las indefinidamente derivables y  $C^\omega(D, \mathbb{C})$  de las analíticas (Capítulo VI). El enunciado del siguiente corolario es impresionante: entre otras cosas, dice que en variable compleja la cadena infinita (10.15) colapsa de manera catastrófica:

$$C^0(D, \mathbb{C}) \supset C^1(D, \mathbb{C}) = C^2(D, \mathbb{C}) = \dots = C^\infty(D, \mathbb{C}) = C^\omega(D, \mathbb{C}) \quad (10.16)$$

Escalofriante, ¿no? Pero hay más aún: no habíamos incluido en esta cadena el espacio  $H(D, \mathbb{C})$  de las holomorfas en  $D$ , que en el análisis de variable compleja juega un papel central, y lo que dice, más precisamente, el corolario es que:

$$C^0(D, \mathbb{C}) \supset H(D, \mathbb{C}) = C^1(D, \mathbb{C}) = C^2(D, \mathbb{C}) = \dots = C^\infty(D, \mathbb{C}) = C^\omega(D, \mathbb{C}) \quad (10.17)$$

Pues la continuidad de las derivadas es una consecuencia necesaria de la holomorfia: este es uno de los puntos en donde se ve el alcance de la demostración de Goursat.

**Corolario 10.5:** (*Analiticidad de las holomorfas – Fórmulas integrales de Cauchy*) Sea  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en un abierto  $D \subseteq \mathbb{C}$ . Entonces,  $f$  es analítica en  $D$ . Más aún: para cada disco abierto  $D(z_0; r) \subseteq D$  y todo  $z \in D(z_0; r)$  se verifica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (10.18)$$

donde

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} \quad (10.19)$$

para todo  $n \geq 0$ , siendo  $C$  cualquier circuito simple positivo contenido en  $D(z_0; r)$  tal que  $z_0 \in RI(C)$ . Además, el radio de convergencia de (10.18) es  $\geq r$ , y si  $D = \mathbb{C}$ , el radio de convergencia es infinito (para cualquier  $z_0 \in \mathbb{C}$ ). [Las identidades (10.19) se denominan Fórmulas Integrales de Cauchy; abreviadamente: *FIC's*]

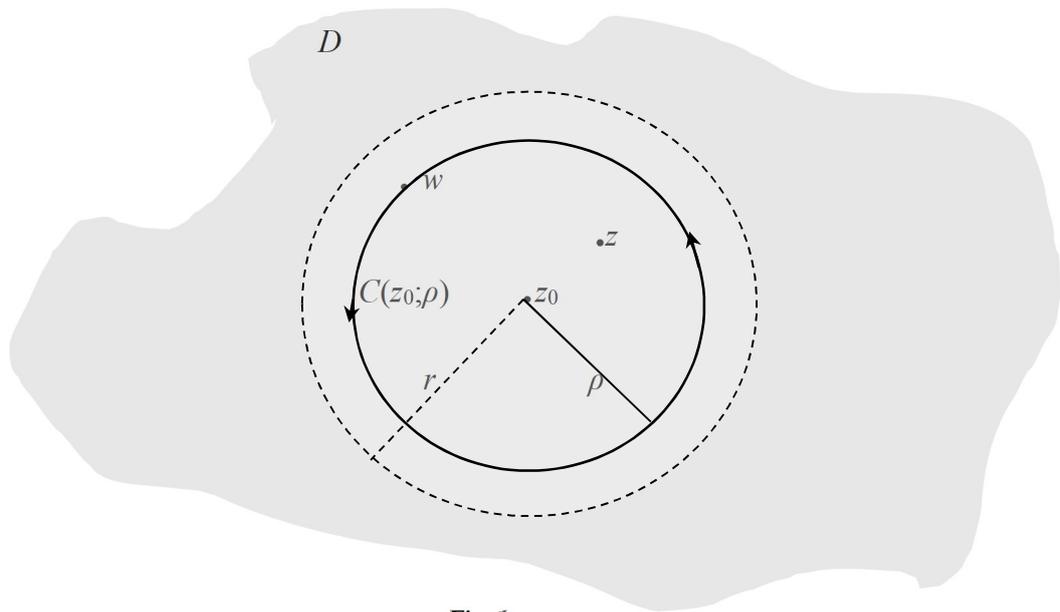
**Demostración:**

Fig. 6

Dado un disco  $D(z_0; r) \subseteq D$  consideremos primero el caso  $z = z_0$  del enunciado: por un lado, (10.18) se reduce a  $f(z_0) = c_0$  y para  $n = 0$ , (10.19) es la primera FIC (con  $c_0 = f(z_0)$ ). Las restantes igualdades (10.19) se van a deducir a continuación. Sea, ahora, un punto  $z \in D(z_0; r)$  distinto de  $z_0$ , y sea  $\rho$  un número real positivo tal que  $|z - z_0| < \rho < r$  (Ver Figura 6). Sea  $C(z_0; \rho)$  la circunferencia de centro  $z_0$  y radio  $\rho$ , considerada como circuito simple positivo. De la primera FIC (Corolario anterior), tenemos que

$2\pi i f(z) = \oint_{C(z_0; \rho)} \frac{f(w)dw}{w - z}$ . Ahora, hagamos una cuentita astuta:

$$2\pi i f(z) = \oint_{C(z_0; \rho)} \frac{f(w)dw}{w - z} = \oint_{C(z_0; \rho)} \frac{f(w)dw}{w - z_0 - (z - z_0)} = \oint_{C(z_0; \rho)} \frac{f(w)}{w - z_0} \left( \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \right) dw \quad (10.20)$$

Claramente, para cada  $w \in C(z_0; \rho)$  se verifica  $|z - z_0| < |w - z_0|$  (volver a mirar la Figura

6). Es decir:  $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1$  y por lo tanto es válida la identidad

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{w - z_0} + \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^2 + \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^3 + \left( \frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^4 + \dots \quad (10.21)$$

(Recordar series geométricas, Capítulo VI). Como las series de potencias se pueden integrar término a término (esta propiedad de las series de potencias es clave en esta demostración y fue mencionada, también, en el Capítulo VI), de (10.20) y (10.21) se tiene

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0; \rho)} \frac{f(w)}{w - z_0} \left( \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \right) dw = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0; \rho)} \left( \frac{f(w)}{w - z_0} + \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} (z - z_0) + \frac{f(w)}{(w - z_0)^3} (z - z_0)^2 + \frac{f(w)}{(w - z_0)^4} (z - z_0)^3 + \dots \right) dw = \\
&= \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0; \rho)} \frac{f(w) dw}{w - z_0}}^{c_0} + \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0; \rho)} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^2} (z - z_0)}^{c_1} + \\
&+ \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0; \rho)} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^3} (z - z_0)^2}^{c_2} + \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0; \rho)} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^4} (z - z_0)^3}^{c_3} + \dots \tag{10.22} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0; \rho)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \right)}^{c_n} (z - z_0)^n
\end{aligned}$$

El resto de las afirmaciones del enunciado se deducen de las fórmulas de Taylor (Corolario 6.1 – Capítulo VI), que exhiben los coeficientes de una serie de potencias en términos de las derivadas de la función, y de la “propiedad elástica” de las integrales que expresan los coeficientes, permitiendo reemplazar la circunferencia  $C(z_0; \rho)$  por cualquier circuito simple positivo  $C$  contenido en  $D(z_0; r)$  tal que  $z_0 \in RI(C)$ . Las ideas básicas de esta demostración son realmente sencillas y en una primera lectura no es bueno que queden oscurecidas por los “detalles técnicos”, como por ejemplo la posibilidad de integrar una serie de potencias término a término (esta propiedad está relacionada con la convergencia uniforme de la serie (10.21), que se verifica en cualquier disco cerrado  $\overline{D}(z_0; r')$  tal que  $\rho < r' < r$ ). ■

**Nota 10.2:** (Sobre el radio de convergencia de las series de Taylor en variable compleja)

Un aspecto notable de los desarrollos en series de potencias de las funciones holomorfas que presenta el corolario anterior es el siguiente. Supongamos que  $f$  es holomorfa en un abierto  $D \subseteq \mathbb{C}$  y que no existe una función  $\tilde{f}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa en un abierto  $\tilde{D} \supset D$  tal que  $\tilde{f}|_D = f$  (una tal función  $\tilde{f}$  se denominaría extensión holomorfa de  $f$  o *prolongación analítica* de  $f$ ). Entonces, el radio de convergencia de la serie de Taylor (10.18) es infinito o bien es mayor o igual que el supremo de todos los radios  $r$  tales que

$D(z_0; r) \subseteq D$ . El caso de radio de convergencia infinito se verifica automáticamente cuando  $D = \mathcal{C}$  (es decir: cuando  $f$  es holomorfa en todo el plano =  $f$  es *entera*). Algunos ejemplos para ilustrar esto:

(a) La función  $f(z) = e^{\operatorname{sen}(z)}$  es entera (= holomorfa en todo el plano), por lo tanto el radio de convergencia de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$  es infinito (lo mismo para cualquier serie de Taylor  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$  de  $f$  centrada en cualquier  $z_0 \in \mathcal{C}$ ).

(b) La función  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$  es holomorfa en  $\mathcal{C} - \{i, -i\}$  y no admite extensiones holomorfas, pues si existiera una holomorfa  $\tilde{f}: \tilde{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $\mathcal{C} - \{-i\} \subset \tilde{D}$ , por ejemplo, existiría el límite finito  $\lim_{z \rightarrow -i} \tilde{f}(z) = \lim_{z \rightarrow -i} f(z)$ : absurdo. De la misma manera se puede probar que  $f$  no admite extensión holomorfa a un dominio que incluya al punto  $-i$ . Por lo tanto, el radio de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$  es mayor o igual a 1, pues el mayor  $r$  tal que  $D(0; r) \subseteq \mathcal{C} - \{i, -i\}$  es  $r = 1$ . (En este ejemplo, es fácil probar que este radio de convergencia es exactamente 1, pero veremos en el ejemplo siguiente que no siempre se verifica la igualdad). Análogamente, podemos afirmar que el radio de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (z - 1)^n$  es mayor o igual que  $\sqrt{2}$ , pues  $\sqrt{2}$  es el mayor de los radios  $r$  tales que  $D(1; r) \subseteq \mathcal{C} - \{i, -i\}$  (ver Figura 6). (Nuevamente, en este ejemplo se puede probar fácilmente que el radio de convergencia es exactamente  $\sqrt{2}$ , pero como ya hemos comentado, en el ejemplo siguiente encontraremos una situación distinta)

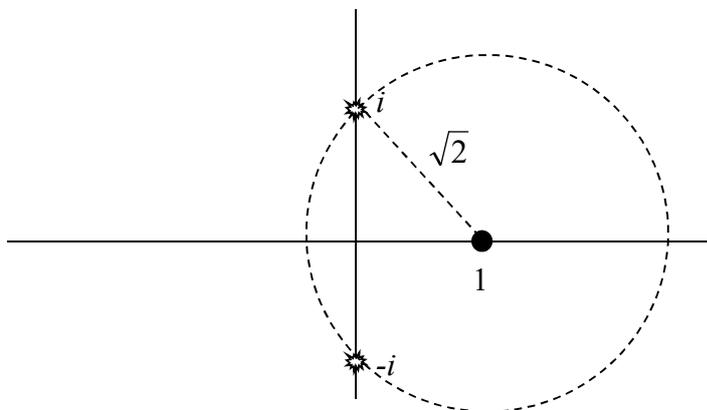


Fig. 6

(c) La función  $\text{Log}$  (logaritmo principal) es holomorfa en  $D = \mathbb{C} - \mathfrak{R}_{\leq 0}$  y sus derivadas son:  $\text{Log}'(z) = z^{-1}$ ,  $\text{Log}''(z) = -z^{-2}$ ,  $\text{Log}'''(z) = 2z^{-3}$ ,  $\text{Log}^{(4)}(z) = -3!z^{-4}$ , y en general, para cada entero positivo  $n$ :  $\text{Log}^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n}$ . Por lo tanto, para cada  $z_0 \in \mathbb{C} - \mathfrak{R}_{\leq 0}$ :

$$\begin{aligned} \text{Log}(z) &= \text{Log}(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!z_0^n} (z-z_0)^n = \text{Log}(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{nz_0^n} (z-z_0)^n = \\ &= \text{Log}(z_0) + \frac{1}{z_0}(z-z_0) - \frac{1}{2z_0^2}(z-z_0)^2 + \frac{1}{3z_0^3}(z-z_0)^3 - \frac{1}{4z_0^4}(z-z_0)^4 + \dots \quad (10.23) \end{aligned}$$

Pero el radio de convergencia de esta serie es  ${}_n \underline{\text{Lim}}_{\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)|z_0|^{n+1}}}{\frac{1}{n|z_0|^n}} = {}_n \underline{\text{Lim}}_{\infty} \frac{n}{n+1}|z_0| = |z_0|$ . Si  $z_0$

es un punto del tercer o cuarto cuadrante (ver Figura 7), el mayor disco abierto de centro en  $z_0$  y contenido en  $D = \mathbb{C} - \mathfrak{R}_{\leq 0}$  tiene radio  $|\text{Im}(z_0)|$  (es el menor de los dos discos de la Figura 7), mientras que la serie converge en el disco (abierto) de centro  $z_0$  y radio  $|z_0| > |\text{Im}(z_0)|$  (es el mayor de los dos discos de la Figura 7), y este disco contiene puntos de la semirrecta  $\mathfrak{R}_{\leq 0}$  que no están en el dominio  $D = \mathbb{C} - \mathfrak{R}_{\leq 0}$ . Esto significa que el logaritmo principal puede prolongarse analíticamente a un dominio mayor, utilizando las series (10.23) con centros cuidadosamente elegidos. Si usted lo intenta, por favor hágalo en compañía de un adulto. Corre el riesgo de marearse seriamente al dar una vuelta alrededor del origen y terminar en una superficie de Riemann. En estos apuntes iniciales no seguiremos con este tema, lo dejamos aquí. Lo que sí haremos es volver más adelante sobre el tema de las prolongaciones analíticas, pero para estudiar su unicidad, problema mucho más fácil de resolver que su existencia.

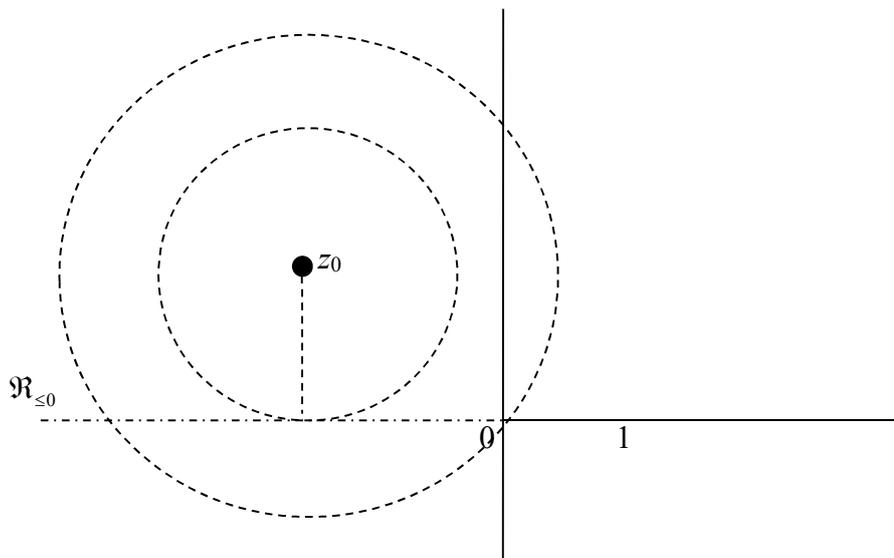


Fig. 7

Estamos llegando al final del Capítulo X. Cinco corolarios importantísimos de un solo teorema, el Teorema de Cauchy - Goursat. En el capítulo siguiente veremos más derivaciones de este mismo teorema, que consisten en otros resultados sorprendentes y aplicaciones de esta teoría a otras áreas de la matemática. Para terminar, debemos mencionar un recíproco de nuestra estrella. A pesar de que también es consecuencia directa de todos los corolarios anteriores, se lo suele mencionar como Teorema de Morera. El autor del teorema, de apellido muy castizo, fue un ingeniero - matemático italiano de la segunda mitad del siglo XIX.

**TEOREMA 10.2 (Teorema de Morera)** Sea  $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$  continua en un abierto  $D \subseteq \mathbb{C}$  tal que  $\oint_C f(z)dz = 0$  para todo circuito  $C \subset D$ . Entonces,  $f$  es holomorfa en  $D$ .

**Demostración:** Dado un punto  $z_0 \in D$ , sea  $r > 0$  tal que  $D(z_0; r) \subseteq D$ . Por hipótesis, para todo circuito  $C \subset D(z_0; r)$  se verifica  $\oint_C f(z)dz = 0$ . Las mismas demostraciones de los Corolarios 10.2 y 10.3 se pueden utilizar para probar que  $f$  admite al menos una primitiva  $F : D(z_0; r) \longrightarrow \mathbb{C}$ , es decir:  $F'(z) = f(z)$  para todo  $z \in D(z_0; r)$ . Esta  $F$  es obviamente holomorfa en  $D(z_0; r)$ , y las holomorfas son analíticas (último corolario), y las derivadas de analíticas son analíticas. Entonces,  $f$  es analítica en  $D(z_0; r)$  y por lo tanto holomorfa en  $D(z_0; r)$ . Hemos demostrado que  $f$  es holomorfa en torno de cada punto de su dominio, es decir: que  $f$  es holomorfa. ■

**Nota 10.3:** (Sobre la inmerecida poca prensa del Teorema de Morera)

Muchos autores no consideran a este teorema como un genuino recíproco del Teorema de Cauchy-Goursat, debido a la hipótesis de la continuidad de  $f$ , que exige de entrada que sus primitivas sean de clase  $C^1$ . Hasta ahora solo hemos considerado integrales de funciones continuas, y para comentar la objeción mencionada deberíamos extender nuestras integrales a funciones más generales (las discontinuidades no podrían ser excesivas ni graves, de todos modos). Esto puede hacerse de la misma manera, por ejemplo, que la que se utiliza para extender la definición de integral de Riemann a funciones seccionalmente continuas. Tengamos presente que las componentes real e imaginaria de cada integral  $\oint_C f(z)dz$  se reducen a integrales de Riemann en intervalos cerrados y acotados, de la forma

$$\int_{t_0}^{t_1} [u(x(t), y(t))\dot{x}(t) - v(x(t), y(t))\dot{y}(t)]dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} [v(x(t), y(t))\dot{x}(t) + u(x(t), y(t))\dot{y}(t)]dt$$

Y los integrandos, como funciones de  $t$ , pueden ser funciones seccionalmente continuas. En particular, si dos funciones  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  y  $g: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  verifican que  $f(z) = g(z)$  para todo  $z \neq 0$ , que  $f(0) \neq g(0)$  y  $g$  es continua (esto implica que  $f$  no es continua en 0), resulta que  $\oint_C f(z) dz = \oint_C g(z) dz$  para todo circuito  $C \subset \mathcal{C}$ .

Ahora sí, aclarado este punto, el de las integrales de funciones no necesariamente continuas, podemos concluir rápidamente que la hipótesis de continuidad en el Teorema de Morera es ineludible, como se puede ver con el siguiente y sencillo ejemplo: sea  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $f(z) = \exp(z)$  si  $z \neq 0$  y  $f(0) = 0$ ; esta función  $f$  verifica que  $\oint_C f(z) dz = 0$  cualquiera sea el circuito  $C \subset \mathcal{C}$  (pase o no por 0), pues  $\oint_C f(z) dz = \oint_C \exp(z) dz = 0$ . Sin embargo  $f$  no puede ser holomorfa en  $\mathcal{C}$ , pues claramente no es continua en 0. Personalmente tengo más aprecio por este teorema que lo que suelen manifestar la mayoría (no absoluta) de los autores. Por ejemplo, una de las consecuencias sorprendentes del Teorema de Morera es que el límite uniforme de funciones holomorfas es una función holomorfa. Este resultado, que en variable real es absolutamente falso, se prueba en tres renglones: dada una sucesión  $f_1, f_2, f_3, \dots$  de funciones holomorfas en un abierto  $D$ , se tienen las siguientes implicaciones inmediatas:

$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  uniformemente en  $D \Rightarrow \oint_C f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \oint_C f$  para todo circuito  $C \subset D$  y además  $f$  es continua, pues es límite uniforme de continuas (gracias otra vez, Weierstrass)

*Cauchy - Goursat*  
 $\Rightarrow 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \oint_C f$  para todo circuito  $C \subset D \Rightarrow \oint_C f = 0$  para todo circuito

*T. de Morera*  
 $C \subset D \Rightarrow f$  es holomorfa en  $D$ .

Un par de autores que mencionan al teorema de Morera como recíproco del de Cauchy-Goursat son Elias M. Stein y Rami Sharkarchi, en su libro *Complex Analysis*, de la serie Princeton Lectures in Analysis. [Princeton University Press - Princeton and Oxford (2003)]. Por si no lo conoce, Elías M. Stein fue el director de tesis de Terence Tao. Ahora, si nunca oyó hablar de Terence Tao, le pido que lo busque en Wikipedia. Son dos minutos.

Cerramos el Capítulo X con tres apéndices y un momento cultural.

**Apéndice 10.0:** Comentario de César A. Trejo sobre el Teorema de Cauchy - Goursat, en una nota de su libro «Funciones de Variable Compleja» (Harper & Row Latinoamericana - 1974). “Este teorema constituye la verdadera piedra basal de la teoría de las funciones analíticas. Fue descubierto por A. L. Cauchy (1789-1857) quien lo probó en 1814 sólo en el caso en que la derivada  $f'(z)$  sea continua en  $D$ . Esta restricción limita radicalmente la utilidad del teorema, y fue superada apenas hacia 1900 al descubrir P. Goursat que basta con que exista derivada finita  $f'(z)$  en cada punto de  $D$ , sin ninguna hipótesis de continuidad, y ni siquiera de acotación en  $D$ , sobre  $f'(z)$ . Por diversas razones, el resultado de Goursat es esencialmente más profundo que el primitivo de Cauchy (...). El teorema restringido (es decir: con la hipótesis de continuidad de la derivada) se prueba hoy en forma comparativamente trivial, pero es insuficiente para obtener las consecuencias que expondremos a continuación.”

**Apéndice 10.1:** Un ejemplo sobre el intercambio de límites e integrales:

Para cada número real  $\lambda$  tal que  $0 < \lambda < 1$ , sea  $\varphi_\lambda : [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$  tal que

$$\varphi_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{2}{\lambda}t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\lambda}{2} \\ \frac{4}{\lambda} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) & \text{si } \frac{\lambda}{2} \leq t \leq \lambda \\ 0 & \text{si } \lambda \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Cada una de estas funciones es continua y para todo  $\lambda \in (0,1)$  es  $\int_0^1 \varphi_\lambda(t) dt = 1$

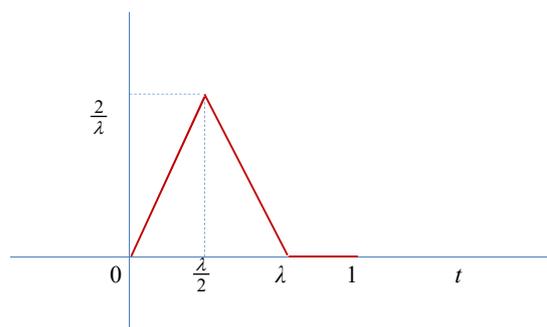


Gráfico de  $\varphi_\lambda$

**Fig. 8**

Por lo tanto,  $\int_0^1 \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \varphi_\lambda(t) dt = 1$ . Por otra parte, para todo  $t \in [0,1]$ :  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \varphi_\lambda(t) = 0$ , pues si  $0 < t \leq 1$ , para  $0 < \lambda < t$  es  $\varphi_\lambda(t) = 0$ ; para  $t = 0$  es  $\varphi_\lambda(0) = 0$  para todo  $\lambda \in (0,1)$ .

Entonces,  $\int_0^1 \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \varphi_\lambda(t) dt = 0$ .

### Apéndice 10.2: Homotopías y conexidad simple

Por razones de brevedad y sentido común, daremos solamente lo estricto y necesario para precisar los conceptos utilizados en este capítulo. No daremos las definiciones en su versión más general, por las mismas razones. Lo que denominamos *trayectoria* en la siguiente definición es usualmente denominado *curva*, lo que es un error pedagógico: una cosa es una curva y otra muy distinta una parametrización de la misma. Peor aún: las trayectorias constantes están permitidas, con lo cual un punto sería una *curva* ...

**Definición 10.2.1:** Una *trayectoria* en un abierto  $D \subseteq \mathfrak{R}^n$  es una función continua  $\gamma: [0,1] \rightarrow D$ ;  $\gamma(0)$  es su *punto inicial* y  $\gamma(1)$  su *punto final*. La función  $\gamma^{(-)}: [0,1] \rightarrow D$  tal que  $\gamma^{(-)}(t) = \gamma(1-t)$  se denomina *trayectoria opuesta* (opuesta a la trayectoria  $\gamma$ ). Si  $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ ,  $\gamma$  se denomina *trayectoria cerrada* o *circuito* de base  $p$ . Para cada  $p \in D$ , el circuito constante  $\gamma_p: [0,1] \rightarrow D$ , es decir, tal que  $\gamma_p(t) = p$  para todo  $t \in [0,1]$  se denomina *circuito trivial* (de base  $p$ ).

**Definición 10.2.2:** Dado un abierto  $D \subseteq \mathfrak{R}^n$  y un punto  $p \in D$ , dos circuitos  $\alpha: [0,1] \rightarrow D$  y  $\beta: [0,1] \rightarrow D$  de base  $p$  se dicen *homotópicos en  $D$*  si existe una función continua  $H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow D$  (denominada *homotopía* entre  $\alpha$  y  $\beta$ ) tal que

- (i)  $\forall t \in [0,1]: H(0,t) = \alpha(t)$
- (ii)  $\forall t \in [0,1]: H(1,t) = \beta(t)$
- (iii)  $\forall s \in [0,1]: H(s,0) = p$
- (iv)  $\forall s \in [0,1]: H(s,1) = p$

Se aconseja hacer algún dibujito. La idea es que para cada  $s \in [0,1]$ , la trayectoria  $\gamma_s: [0,1] \rightarrow D$  tal que  $\gamma_s(t) = H(s,t)$  es un circuito de base  $p$  (por (iii) y (iv)); además  $\gamma_0 = \alpha$  (por (i)) y  $\gamma_1 = \beta$ . Es decir:  $H$  parametriza de manera continua una familia de circuitos  $\gamma_s$ ,  $s \in [0,1]$ , de base  $p$ , comenzando con  $\gamma_0 = \alpha$  y siguiendo hasta  $\gamma_1 = \beta$ . Esta es, precisamente, la idea de *deformación continua* entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

Ahora, la última definición:

**Definición 10.2.3:** Un abierto  $D \subseteq \mathfrak{R}^n$  conexo se dice simplemente conexo si para cada punto  $p \in D$ , todo circuito  $\gamma: [0,1] \longrightarrow D$  de base  $p$  es homotópico al circuito trivial de base  $p$ .

Esta es la definición de conexidad simple para abiertos, que se extiende sin cambios a conjuntos arco-conexos en general (no necesariamente abiertos) de cualquiera de los espacios  $\mathfrak{R}^n$  (y mucho más generales aún). Se puede probar (y para esto es necesario que  $D$  sea arco-conexo) que si existe un punto  $p \in D$  tal que todo circuito  $\gamma: [0,1] \longrightarrow D$  de base  $p$  es homotópico al circuito trivial de base  $p$ , entonces  $D$  es simplemente conexo. Es decir: alcanza con verificar la condición del enunciado para un solo punto de  $D$ .

**Momento cultural 10.1:** En la cadena (10.5) de inclusiones estrictas, cada  $C^k(I, \mathfrak{R})$  es subespacio del anterior,  $C^{k-1}(I, \mathfrak{R})$ . Si  $C^0(I, \mathfrak{R})$  tuviera dimensión finita, esto no podría ocurrir, pues tendríamos una secuencia estrictamente decreciente e infinita  $\dim C^0(I, \mathfrak{R}) > \dim C^1(I, \mathfrak{R}) > \dim C^2(I, \mathfrak{R}) > \dots$  de números enteros positivos: absurdo (si usted encuentra una secuencia de éstas, por favor tráigamela y le doy por aprobada la materia). Es decir:  $C^0(I, \mathfrak{R})$  es de dimensión finita. Pero el mismo argumento se puede utilizar para probar que todos los  $C^k(I, \mathfrak{R})$  son de dimensión infinita, pues para cada uno de ellos también se tiene la cadena  $C^k(I, \mathfrak{R}) \supset C^{k+1}(I, \mathfrak{R}) \supset C^{k+2}(I, \mathfrak{R}) \supset \dots \supset C^\infty(I, \mathfrak{R})$