Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA
D. Prelat – 2020

§3) REPASO DE LA TOPOLOGÍA BÁSICA DEL PLANO COMPLEJO

Lista de definiciones y propiedades que se suponen conocidas por los alumnos de Análisis Matemático III. NO es un texto didáctico.

La única diferencia con los conceptos vistos en Análisis Matemático II es la notación. Por lo tanto, solamente haremos un resumen muy compacto de las definiciones y propiedades básicas necesarias para los temas que siguen.

§ 3.1) *Discos*

Dados un complejo $z_0 \in \mathbb{C}$ y un número real positivo *r*, se definen los siguientes subconjuntos del plano complejo:

$D(z_0;r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$: "Disco abierto de centro z_0 y radio *r*"
$\overline{D}(z_0;r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$: "Disco cerrado de centro z_0 y radio *r*"
$D_0(z_0;r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$: "Disco abierto reducido de centro z_0 y radio *r*"

También son habituales las notaciones $B(z_0;r)$, $\overline{B}(z_0;r)$ y $B_0(z_0;r)$ para estos conjuntos, que en el contexto más general de los espacios $\Re^n$ se suelen llamar "bolas". En el plano es más sugerente el término "disco" y en la recta, simplemente "intervalo". Es cuestión de gustos y hábitos.

Adicionalmente se establecen las siguientes convenciones de notación:

$$D(z_0;\infty) = \mathbb{C} \ , \ D(z_0;0) = \varnothing \ , \ \overline{D}(z_0;\infty) = \mathbb{C} \ , \ \overline{D}(z_0;0) = \{z_0\} \ , \ D_0(z_0;\infty) = \mathbb{C} - \{z_0\}$$

§ 3.2) *Puntos interiores y puntos de acumulación*

Definición: Dado un conjunto no vacío $U \subseteq \mathbb{C}$ y un punto $z_0 \in \mathbb{C}$:
(*i*) z_0 es punto interior de *U* sii existe $r > 0$ tal que $D(z_0,r) \subseteq U$
(*ii*) z_0 es punto de acumulación de *U* sii para todo $r > 0$ se verifica $U \cap D_0(z_0;r) \ne \varnothing$
(*iii*) z_0 es punto adherente a *U* sii para todo $r > 0$ se verifica $U \cap D(z_0;r) \ne \varnothing$

Observe la “sutil” diferencia entre las definiciones (*ii*) y (*iii*). Para repasar estos conceptos, pongamos como ejemplo el conjunto

$$U = \{x+iy \in \mathbb{C} : 3 < x \leq 4, 0 < y \leq 1\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{-i, i\} \; , \qquad (3.2)$$

que tiene un poco de todo (se recomienda hacer un dibujito). El conjunto de sus puntos interiores es $\{x+iy : 3 < x < 4 \, , 0 < y < 1\}$, el conjunto de sus puntos de acumulación es $\{x+iy : 3 \leq x \leq 4 \, , 0 \leq y \leq 1\} \cup \{0\}$, y el conjunto de sus puntos adherentes es

$$\{x+iy \in \mathbb{C} : 3 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{-i, i\} \cup \{0\} \; .$$

Los puntos pertenecientes a un conjunto que no son de acumulación se denominan *aislados*. En este ejemplo, serían los del conjunto $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{-i, i\}$. También recordemos que la *frontera* de un conjunto es el conjunto de puntos que son adherentes al conjunto y a su complemento. En nuestro ejemplo, la frontera de *U* es

$$\begin{aligned} &\{x+i0 \in \mathbb{C} : 3 \leq x \leq 4\} \cup \{4+iy : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{x+i : 3 \leq x \leq 4\} \cup \\ &\cup \{3+iy : 0 \leq y \leq 1\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{-i, i\} \cup \{0\} \end{aligned}$$

No debe confundirse el concepto de *frontera* con el de *borde*. No todos los conjuntos tienen borde, pues el borde de un conjunto es su frontera siempre y cuando esta frontera sea una unión finita de curvas seccionalmente regulares. No es el caso de nuestro ejemplo, obviamente. Un ejemplo más alevoso es el del conjunto

$$\mathbb{Q}^2 = \{x+iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{Q} \, , y \in \mathbb{Q}\},$$

cuya frontera es todo el plano complejo. No hay que dejarse llevar por el “sonido” de las palabras que se utilizan para denominar conceptos matemáticos. Muchas de ellas son utilizadas también en el lenguaje cotidiano, pero en general con un significado muy distinto. Es parte de la historia de la matemática. Por otra parte, un ejemplo sencillo de borde es la frontera de $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$, que es la unión de dos circunferencias disjuntas.

Terminamos con el enunciado de una propiedad muy sencilla que utilizaremos con frecuencia.

Propiedad: Sean $U \subseteq \mathbb{C}$ no vacío y un punto $z_0 \in \mathbb{C}$:

(1) Si z_0 es punto interior de U, entonces pertenece a U.
(2) Si z_0 es punto interior de U, entonces es punto de acumulación de U.
(3) Si z_0 es punto de acumulación de U, entonces es adherente a U. ■

Dejamos la prueba de estas afirmaciones como ejercicio de meditación. Ninguna de las recíprocas de estas afirmaciones es válida. En el ejemplo (3.2) puede encontrar puntos de U que no son interiores, puntos de acumulación que no son interiores y puntos adherentes que no son de acumulación.

§ 3.3) *Conjuntos abiertos, conjuntos cerrados, conjuntos compactos*

Definición: Dado un conjunto $U \subseteq \mathbb{C}$:
(*i*) U es *abierto* sii es vacío o bien todos sus puntos son interiores, es decir, si para cada $z_0 \in U$ existe $r > 0$ tal $D(z_0, r) \subseteq U$.
(*ii*) U es *cerrado* sii su complemento $\{z \in \mathbb{C} : z \notin U\}$ es abierto.
(*iii*) U es *acotado* sii existe $r > 0$ tal $U \subseteq D(0, r)$.

Nuevamente, se recomienda no atenerse al significado que las palabras "abierto" y "cerrado" tienen en el idioma cotidiano. Obsérvese que el conjunto del ejemplo (3.2) no es ni abierto ni cerrado y que los conjuntos $\varnothing$ y $\mathbb{C}$ son abiertos y cerrados simultáneamente. En cuanto al término "cerrado", tal vez lo ayude la siguiente:

Propiedad: Un conjunto no vacío $U \subseteq \mathbb{C}$ es cerrado sii contiene a su frontera.

Recordemos que la frontera de U es el conjunto de puntos que son adherentes a U y a su complemento, es decir:

$$Fr(U) = \{z \in \mathbb{C} : \forall r > 0 : U \cap D(z,r) \neq \varnothing\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \forall r > 0 : [\mathbb{C} - U] \cap D(z,r) \neq \varnothing\}$$

Exhibiremos una prueba de esta importante propiedad por una razón muy simple: nostalgia. El alumno que no siente curiosidad ni nostalgia puede omitirla olímpicamente. Lo que sí tiene que hacer es entender y recordar el enunciado.

Prueba de «*U es cerrado* $\Rightarrow Fr(U) \subseteq U$» : Supongamos que $z \in Fr(U)$. <u>Si z no perteneciera a U</u>, entonces pertenecería a su complemento $\mathbb{C} - U$. Por ser U cerrado, $\mathbb{C} - U$ es abierto y por lo tanto existe $r_0 > 0$ tal que $D(z, r_0) \subseteq \mathbb{C} - U$. Pero esto implica que $D(z,r_0)\cap U=\varnothing$: absurdo, pues *z* es adherente a *U* (por estar en su frontera). Por lo tanto, si $z\in Fr(U)$, la suposición subrayada no puede ser cierta, es decir: $z\in U$.

Prueba de «$Fr(U)\subseteq U \Rightarrow U$ *es cerrado*»: Debemos probar que $\mathbb{C}-U$ es abierto a partir de la inclusión $Fr(U)\subseteq U$. Dado $z\in\mathbb{C}-U$, debemos probar que *z* es interior a $\mathbb{C}-U$, es decir, que existe $r_0>0$ tal que $D(z,r_0)\subseteq\mathbb{C}-U$. Supongamos que no existe tal *r*, es decir, supongamos que para todo $r>0$: $D(z,r)\not\subseteq\mathbb{C}-U$. Pero esto significaría que para todo $r>0$: $D(z,r)\cap U\neq\varnothing$, es decir, que *z* es adherente a *U*. Por otra parte, dado que $z\in\mathbb{C}-U$, es obvio que para todo $r>0$: $D(z,r)\cap[\mathbb{C}-U]\neq\varnothing$, pues el mismo *z* está en la intersección. Pero entonces, *z* está en la frontera de *U*. Por la hipótesis $Fr(U)\subseteq U$ tenemos entonces que $z\in U$. Pero también $z\in\mathbb{C}-U$, es decir: $z\in U\wedge z\notin U$: la contradicción paradigmática. Por lo tanto, la suposición arriba subrayada no puede ser cierta y entonces existe $r_0>0$ tal que $D(z,r_0)\subseteq\mathbb{C}-U$. ■

Finalmente, queda la definición de *conjunto compacto*. Se trata de un concepto mucho más general y abstracto de lo que necesitamos en este curso y el curioso puede encontrarlo en cualquier texto básico (y decente) de topología. A nosotros nos va a ser mucho más útil la siguiente caracterización de los compactos, que la tomaremos como definición.

Teorema (Bolzano - Weierstrass - Heine - Borel): Un subconjunto $U\subset R^n$ es compacto sii es cerrado y acotado. ■

Puede aquilatarse la importancia de este teorema observando la ilustre lista de autores.

Momento cultural: En realidad los dos primeros demostraron que un subconjunto $U\subset R^n$ es cerrado y acotado sii toda sucesión de puntos de *U* admite una subsucesión convergente a un punto de *U*, propiedad que se denomina compacidad secuencial.

§ 3.4) *Conexos*

La definición de conjunto conexo tiene un enunciado muy sencillo pero suele ser difícil de manejar. Por suerte, los conexos que vamos a necesitar son abiertos conexos, y para éstos hay una caracterización bastante más intuitiva. Algo parecido a lo que ocurre con los compactos.

Definición: Dado un conjunto no vacío $U \subseteq \mathbb{C}$:

(*i*) U es conexo sii no existen dos abiertos A y B que verifiquen simultáneamente que:

(a) $U = (A \cap U) \cup (B \cap U)$ y

(b) $(A \cap U) \cap (B \cap U) = \varnothing$

(*ii*) U es arco-conexo sii para todo par de puntos $z_0 \in U$ y $z_1 \in U$ existe una función continua $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

(a) $\forall t \in [0,1] : \gamma(t) \in U$ y

(b) $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z_1$

***Observación* 3.4.1**: Desde luego que podemos simplificar el ítem (*i*), dado que $(A \cap U) \cup (B \cap U) = (A \cup B) \cap U$ y $(A \cap U) \cap (B \cap U) = (A \cap B) \cap U$. Pero la forma en que hemos escrito las condiciones (a) y (b) suele expresarse mucho más sencillamente así: (*a*) $U = \widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ y (b) $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \varnothing$, donde $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$ son dos *abiertos relativos* a U, cuya definición es la obvia pero que no utilizaremos en estos apuntes.

***Observación* 3.4.2**: Las funciones que aparecen en (*ii*) pueden imaginarse, en principio, como parametrizaciones de curvas contenidas en *U*. Pero no hay que exagerar con esta idea, salvo que *U* sea abierto, como veremos a continuación. En primer lugar, observe que solo se pide continuidad. No se piden ni derivabilidad ni inyectividad. Por ejemplo, si *U* es un conjunto formado por un solo punto, es arco-conexo, pues las funciones constantes son continuas. Pero, como dijimos, cuando *U* es abierto, todo esto se simplifica.

Teorema: Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto no vacío. Entonces, *U* es conexo si y solamente si es arco-conexo**.** Además, en ese caso, para cada par de puntos $z_0 \in U$ y $z_1 \in U$ existe una curva regular Γ contenida en *U* de extremos z_0 y z_1. También, para cada par de puntos $z_0 \in U$ y $z_1 \in U$ existe una poligonal Λ contenida en *U* de extremos z_0 y z_1. ■

No daremos aquí la demostración de este teorema, que no es tan ilustre como el de la sección anterior y que es bastante más sencilla. Lo que sí es necesario aclarar es que la implicación $arco - conexo \Rightarrow conexo$ vale para cualquier conjunto, no necesariamente abierto.

Por último, recordemos que los dominios abiertos arco-conexos de campos vectoriales son los adecuados para el cálculo de las integrales de línea, y esta misma idea va a aparecer en el capítulo de integración de funciones de variable compleja.

§ 3.5) *Simplemente Conexos*

Esta parada es la más brava…. Yo una vez intenté explicarle el concepto de conjunto simplemente conexo a una tía mía, muy inquieta (y muy buena cocinera). Luego de un gran esfuerzo pedagógico, la conclusión de mi tía fue de una sublime candidez: “Pero entonces, ¡un conjunto es simplemente conexo cuando no tiene agujeritos!” Y bueno, es lo que suele ocurrir. Desistí de mencionarle a mi inefable tía que si bien $\Re^2 - \{(0,0)\}$ no es simplemente conexo, en cambio $\Re^3 - \{(0,0,0)\}$ sí es simplemente conexo. Y me dediqué a disfrutar de sus exquisitas empanadas….

Por suerte, nosotros necesitaremos solamente el concepto de <u>abierto</u> simplemente conexo <u>en el plano</u>, y en este caso el concepto se simplifica enormemente. Por lo tanto, no daremos la definición de conexidad simple en general y en cambio daremos una caracterización práctica a los efectos de la teoría de la integración (capítulo VIII). Lo mismo que hicimos en el caso de los compactos. Para eso necesitamos un teorema famoso cuyo enunciado es muy intuitivo pero que la demostración excede en mucho el alcance de estos apuntes. Como los teoremas son de uso público y gratuito (en algunos casos su uso es obligatorio), lo usaremos libremente, aunque no presentemos su demostración. Algo habitual, lamentablemente.

Se solicita al alumno que en este mismo instante recuerde el significado de “curva cerrada simple”. En el enunciado que sigue, una curva cerrada simple es la imagen (o “recorrido”) de una función continua $\gamma : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t_1) = \gamma(t_0)$ (a esto nos referimos con *cerrada*: “termina en el mismo punto inicial”) y además es inyectiva en el intervalo abierto (t_0, t_1) (a esto nos referimos con *simple*: no “pasa” por el mismo punto “dos veces”, salvo el inicial, es decir: “la curva no se corta a sí misma”). En Análisis II usted consideraba en general parametrizaciones $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de clase C^1 en intervalos $I \subseteq \Re$ para calcular integrales de línea. El siguiente teorema no trata de integrales de línea y solo requiere la continuidad de γ.

Teorema de la curva cerrada simple (Camille Jordan. 1838 –1922)

Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ una curva cerrada simple. Entonces, existen dos abiertos no vacíos A y B tales que
(a) $\mathbb{C} = A \cup \Gamma \cup B$.
(b) Los tres conjuntos A, B y Γ son disjuntos dos a dos, es decir: $A \cap B = \varnothing$, $A \cap \Gamma = \varnothing$ y $B \cap \Gamma = \varnothing$.
(c) Uno de los conjuntos A o B es acotado y el otro no. ■

El abierto acotado del enunciado se denomina *recinto interior* de Γ y se indica $RI(\Gamma)$, mientras que el no acotado se denomina *recinto exterior* de Γ y se indica $REX(\Gamma)$. Si usted piensa en una circunferencia o en una elipse o en el borde de un cuadradito, el teorema le va a resultar de una obviedad espeluznante, y no va a tener dificultad alguna de reconocer los recintos interiores y exteriores en cada caso. Pero le puedo asegurar que existen curvas cerradas simples donde la intuición se hace añicos. El matemático Camille Jordan no pasó a la historia demostrando pavadas, precisamente. (Ya que estamos: también es el autor de las *formas canónicas de Jordan*, que usted estudió en su paso por la teoría de matrices).

Con este teorema, podemos caracterizar de manera bastante práctica a los abiertos simplemente conexos del plano. Insistimos en que <u>no es la definición</u>.

Teorema: Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto <u>conexo</u> no vacío. Entonces, U es simplemente conexo si y solamente si: para toda curva cerrada simple $\Gamma \subset U$ se verifica que también $RI(\Gamma) \subset U$. ■

Una vez más, omitimos la demostración. En este caso, porque ni siquiera dimos la definición de conexidad simple. Lo que sí mencionaremos es que la definición comienza así: "Un conjunto $U \subseteq \mathbb{C}$ es simplemente conexo sii es conexo y además ….". Es decir: por definición la conexidad simple requiere a conexidad como condición necesaria no suficiente. Para aclarar un poco con ejemplos sencillos:

(a) el abierto $U_1 = \{x + iy \in \mathbb{C} : y \neq 0\}$ no es simplemente conexo porque no es conexo;

(b) el abierto $U_2 = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ es conexo pero no simplemente conexo: la curva cerrada simple $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ está contenida en U_1 pero su recinto interior <u>no</u> está contenido en U_1;

(c) el abierto $U_3 = \mathbb{C}$ es simplemente conexo pues es conexo y además verifica trivialmente la condición del teorema: para toda curva cerrada simple $\Gamma \subset \mathbb{C}$ se verifica que también $RI(\Gamma) \subset \mathbb{C}$