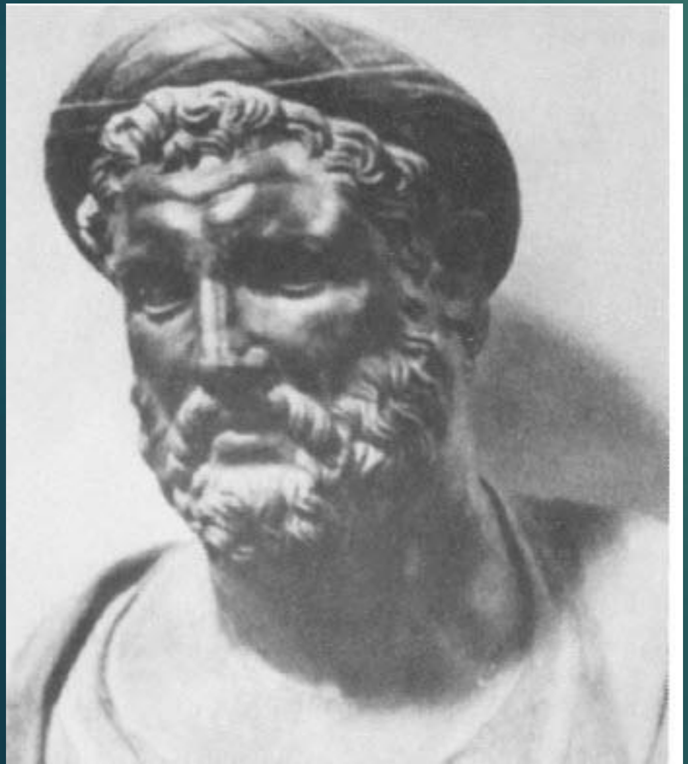
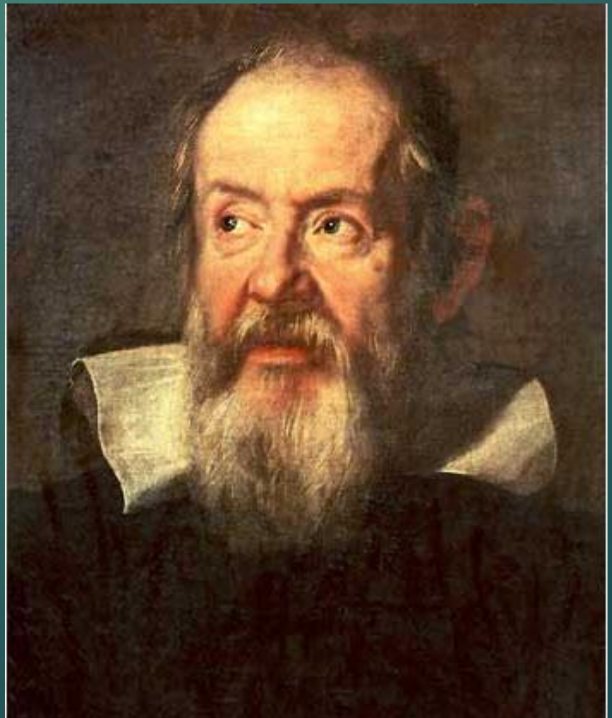
67.29 Proyectos de Máquinas

VIBRACIONES

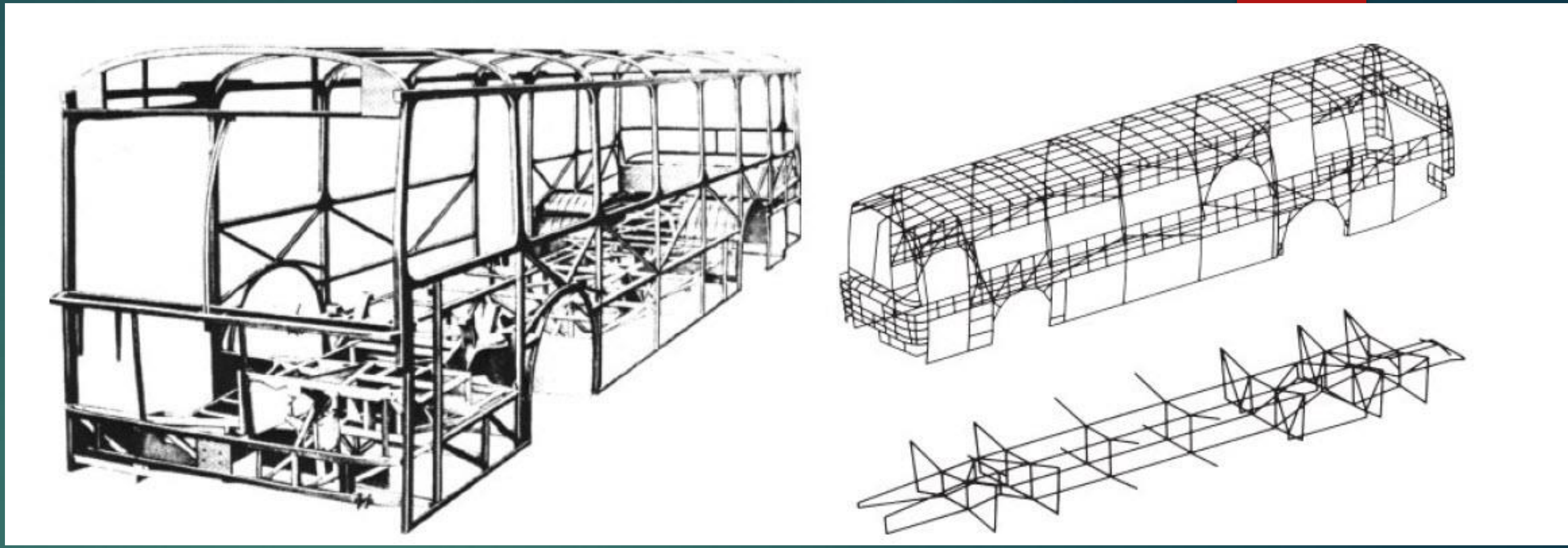
Breve Historia

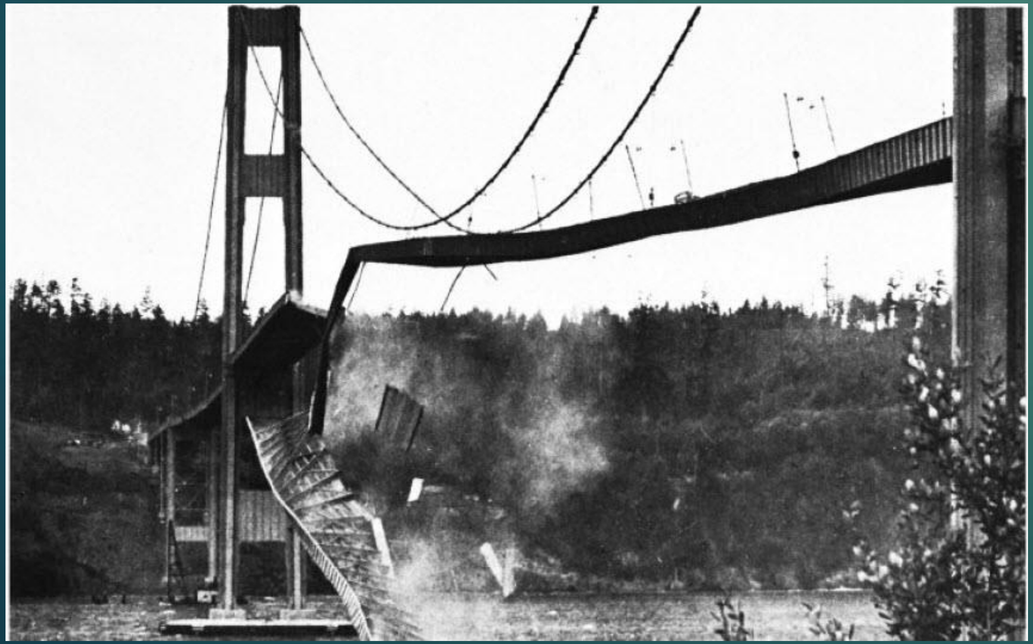
- Pitágoras
- Galileo Galilei escribió el primer tratado de dinámica moderna
- Obras respecto al péndulo simple y la vibración de las cuerdas son de importancia fundamental de la teoría de las vibraciones.





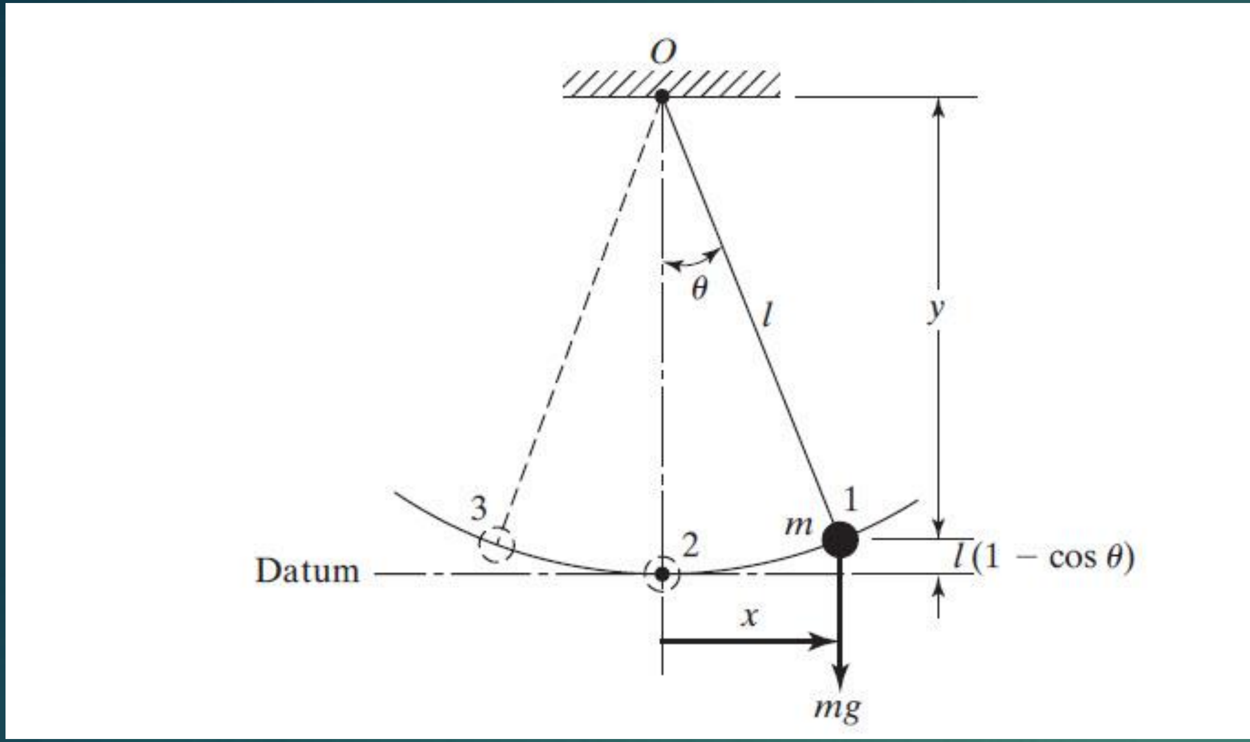
El conocimiento de la respuesta a las vibraciones es fundamental en el diseño Mecánico tanto de Estructuras Mecánicas como de las partes en movimiento sobre todo las que giran o se desplazan a altas velocidades





Definición

- Cualquier movimiento que se repite después de un intervalo de tiempo se llama “vibración u oscilación”. El vaivén de un péndulo y el movimiento de una cuerda pulsada son ejemplos comunes de vibración. La teoría de la vibración tiene que ver con el estudio de los movimientos de los cuerpos y las fuerzas asociadas con ellos.
- Por lo común un sistema vibratorio incluye un medio para almacenar energía potencial (resorte o elasticidad) , un medio para conservar energía cinética (masa o inercia) y un medio por el cual la energía se pierde gradualmente (amortiguación)



Ep = mg*l (1-cos *o*)

La fuerza de Gravedad mg induce un par de torsión mg*lsen *o* con respecto al punto O.
La masa comienza a oscilar hacía la izquierda de la posición 1.
Esto impone a la masa una aceleración angular en el sentido de las agujas del reloj y en el momento que llega a la posición 2 se convierte en energía cinética. De esta manera la masa no se detiene en la posición 2 , sino continua oscilando respecto a la posición 3. Sin embargo , al pasar por la posición 2 un par de torsión en sentido contrario a las agujas del reloj debido a la gravedad la desacelera . En la posición 3 la velocidad se reduce a cero.
Toda la energía se convierte en potencial. De nuevo al par de torsión , la masa adquiere aceleración en sentido contrario a las agujas del reloj.
Este proceso continua repitiéndose y el péndulo tendrá movimiento oscilatorio

Grados de Libertad: Son el mínimo de coordenadas independientes requeridos para determinar por completo todas las partes del sistema.

El péndulo simple tiene un grado de libertad. Este sistema se puede fijar en función del ángulo tita o en función de la coordenada X,Y. Las que las relaciona es la función $X^2+Y^2 = l^2$

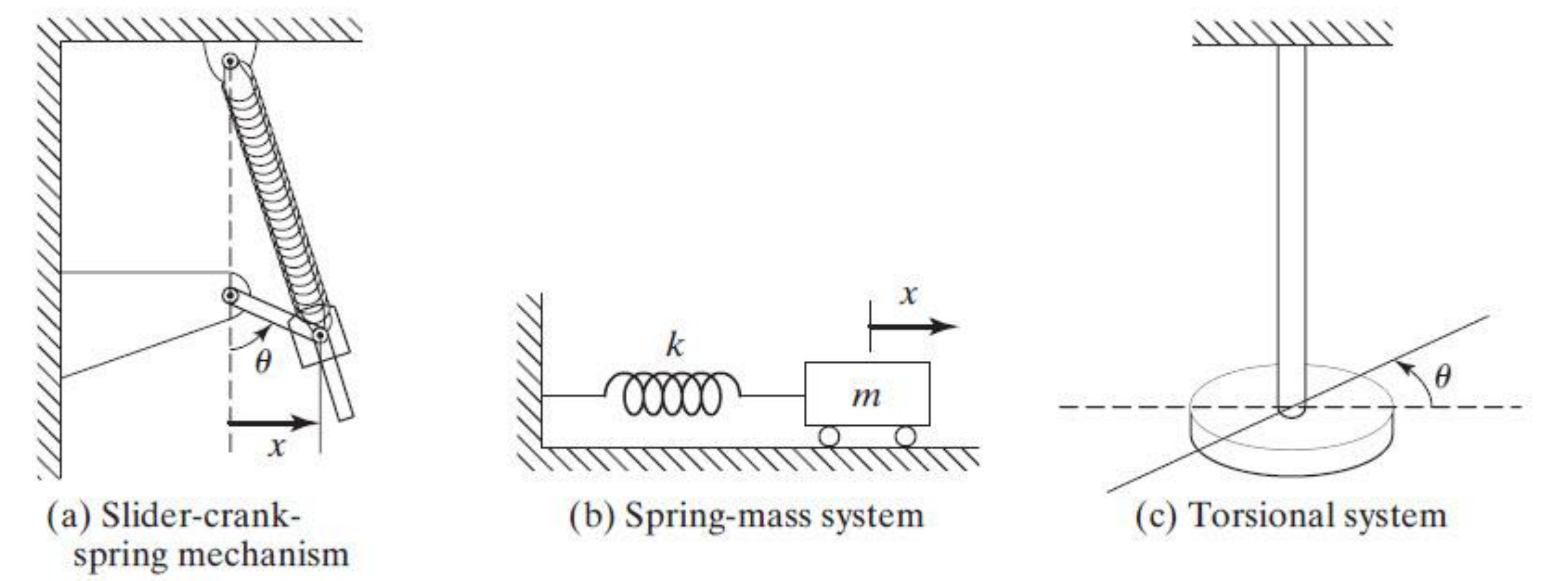


FIGURE 1.11 Single-degree-of-freedom systems.

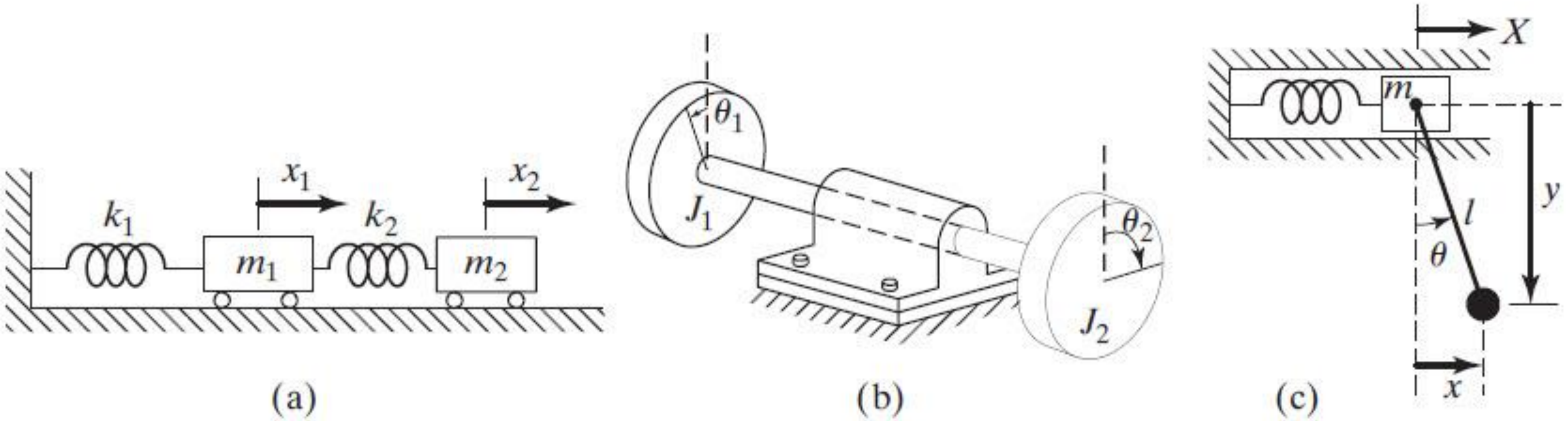
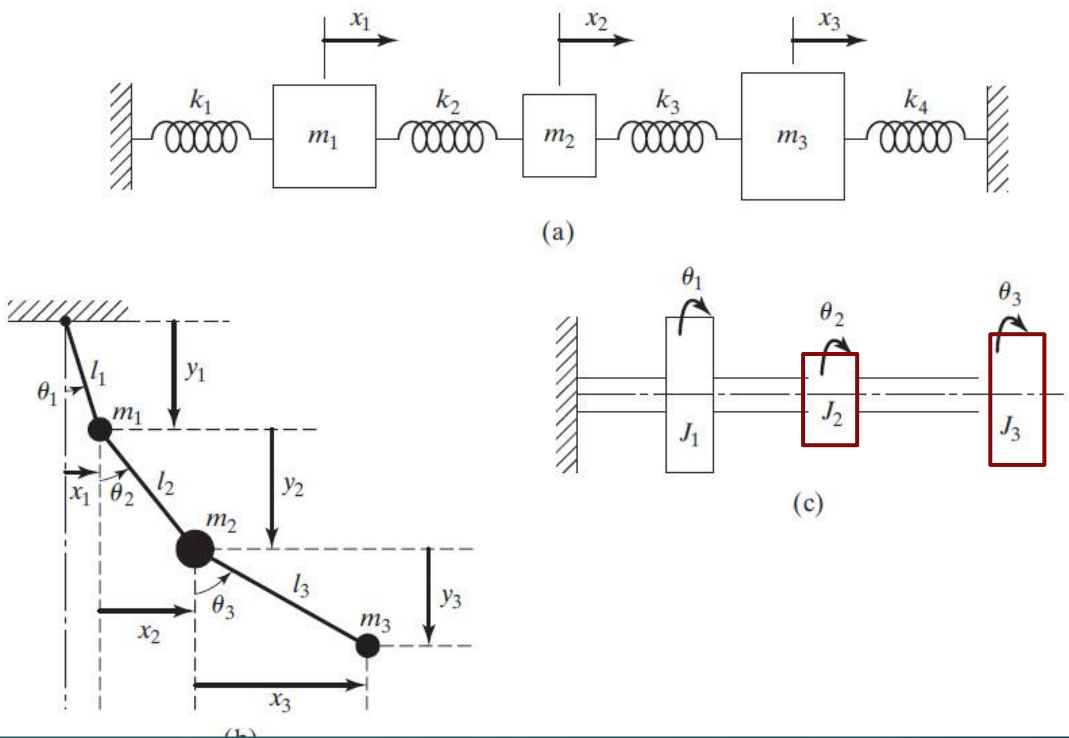


FIGURE 1.12 Two-degree-of-freedom systems.



Tres grados de libertad

Clasificación

- **Vibraciones Libres:** Si se deja que un sistema vibre por si mismo después de una perturbación inicial , la vibración resultante se denomina vibración libre. Ninguna fuerza externa actúa en el sistema.
- La oscilación de un péndulo simple es un ejemplo de vibración simple
- **Vibraciones Forzadas:** Si un sistema se somete a una fuerza externa la vibración resultante se conoce como vibración forzada. La oscilación que aparece en máquinas como motores diesel es un ejemplo de vibración forzada.
- Si la frecuencia de la vibración forzada coincide con una de las frecuencias naturales del sistema ocurre una condición conocida como resonancia y el sistema sufre oscilaciones peligrosamente grandes. Las fallas de estructuras como edificios , puentes, turbinas y alas de avión se han asociado a que ocurra resonancia.

- Si no se pierde o disipa energía por fricción u otra resistencia durante la oscilación , la vibración se conoce como *vibración no amortiguada*
- Si se pierde energía se llama *vibración amortiguada*.
- En muchos sistemas físicos , la cantidad de amortiguamiento es tan pequeña que puede ser ignorada en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería. Sin embargo, la consideración del amortiguamiento se vuelve extremadamente importante al analizar sistemas vibratorios próximos a la resonancia.

VIBRACIONES MECANICAS

MODELO ELEMENTAL DE 1 GDL DE VIBRACON NATURAL LIBRE

__ Estáticamente $W = k * \delta st$

A[redacted]o libre con peso W

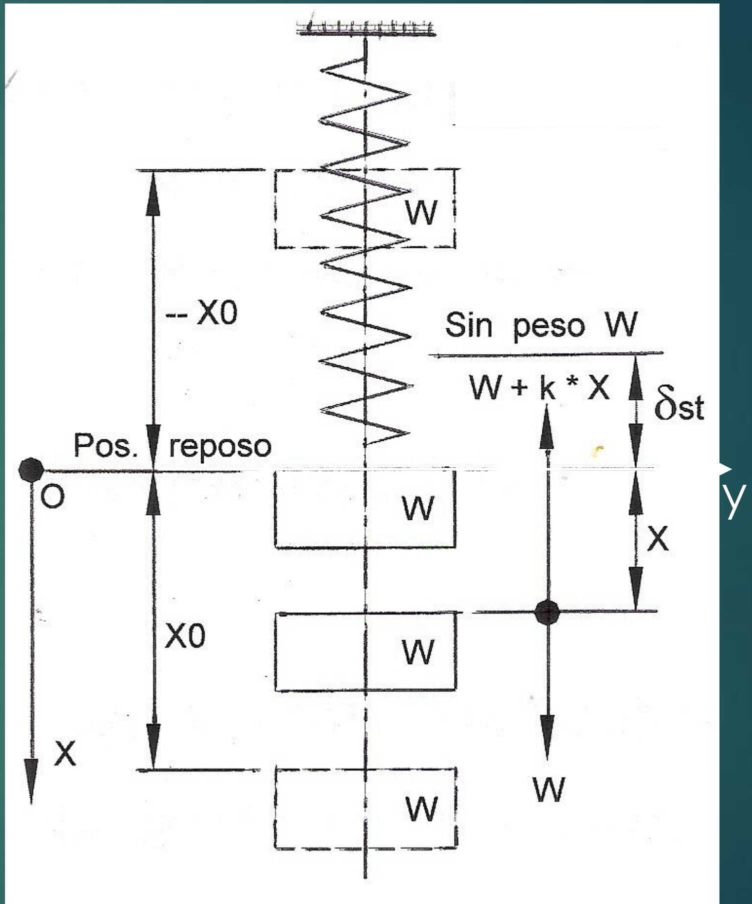
$$m*ax = W - (W + k*X)$$

$$\rightarrow \quad m* d^2X/dt^2 + k*X = 0$$

$$d^2X/dt^2 + k/m * X = 0$$

SIN AMORTIGUACION

solución ??????



VIBRACIÓN NATURAL LIBRE

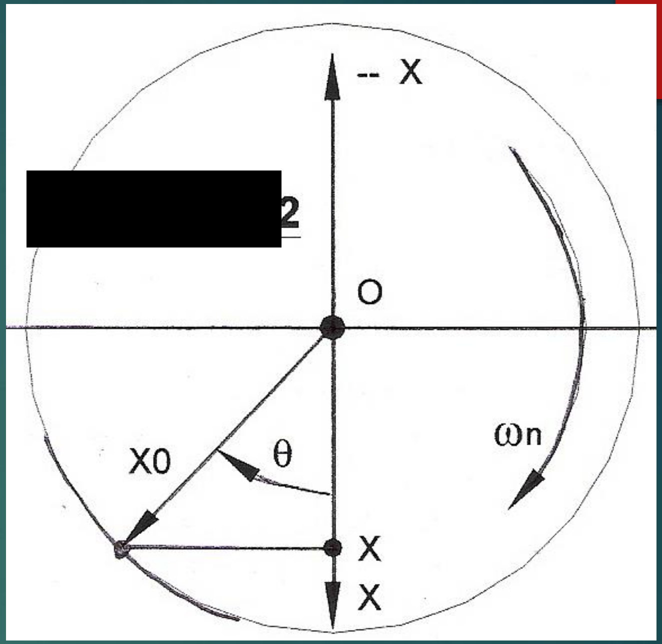
SOLUCION COMO PROYECCION TRANSVERSAL DE MOV. DE ROTACION

$$d^2X/dt^2 + \omega n\text{^}2 * X = 0$$

Solucionada por $x = A1 * e^{a1*t} + A2 * e^{a2*t}$

En que $a_1 = a_2 = \{- k/m\}^{1/2} = i\ \{ k/m\}^{1/2} = i * wn$

$\rightarrow\ X = Xo * \cos\theta = Xo * \cos(\omega n * t) = X \rightarrow$



Es el modelo matemático del desplazamiento
$x = f(t)$ de la vibración transversal libre si

$\rightarrow \omega n\text{^}2 = k/m \rightarrow \omega n = (k/m)^{1/2} \rightarrow$ ¿Cuál es, ¿cuantas hay?

En que $k = W / \delta st = m*g/ \delta st$ (independiente de acciones externas)

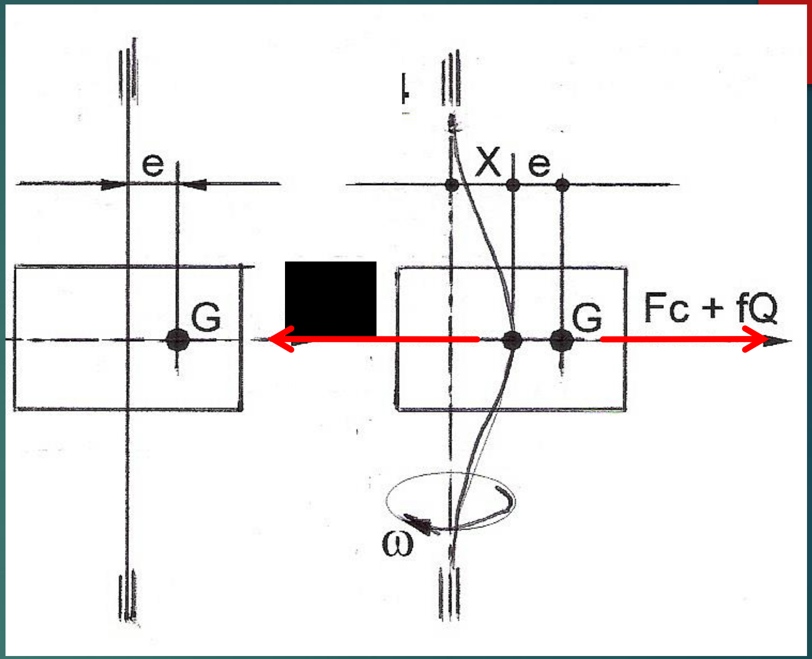
Resultan $\rightarrow\ \omega n = (g/ \delta st)^{1/2}$;

Frecuencia $fn = \omega n/(2*\pi) = [1 /(2*\pi)] * (k/m)^{1/2} = [1 /(2*\pi)] * (g/ \delta st)^{1/2}$

1er.VELOCIDAD CRITICA DE ÁRBOLES POR DEFORMACION TRANSVERSAL

e = excentricidad propia del árbol
x = desplazamiento transversal
fQ → carga externa cte. (ej: fuerza radial de montaje correa) NO AMORTIGUADO

Análisis de equilibrio de fuerzas transversales del cuerpo rotante a velocidad w forzada



$$k * x – m * \omega^2 * (x + e) - fQ = 0$$

Siendo $k/m = \omega n^2$

$$x = \frac{e * (\omega^2 / \omega n^2) + (fQ / k)}{1 - (\omega^2 / \omega n^2)}$$

= 0 resulta x = fQ / k

→ ωn resulta x → ∞

Eliminando la indeterminación matemática, para ω → ∞

$$x = \frac{e + ((fQ * \omega n^2) / (k * \omega^2)}{(1 / (\omega^2 / \omega n^2)) - 1}$$

→ ∞ resulta x → - e

¿y en realidad?

OBSERVACIONES:

-En todos los casos se asumió cuerpos perfectamente elásticos (amortiguación nula)

En la realidad (explicar no infinito)

Cuando $\omega=\omega n=(k/m)^{1/2} \rightarrow X \rightarrow \infty$

ωn no depende de fQ ni de e

Por ser $k = W / \delta st = m*g/ \delta st$

$\rightarrow \omega n = (g/ \delta st)^{1/2}$

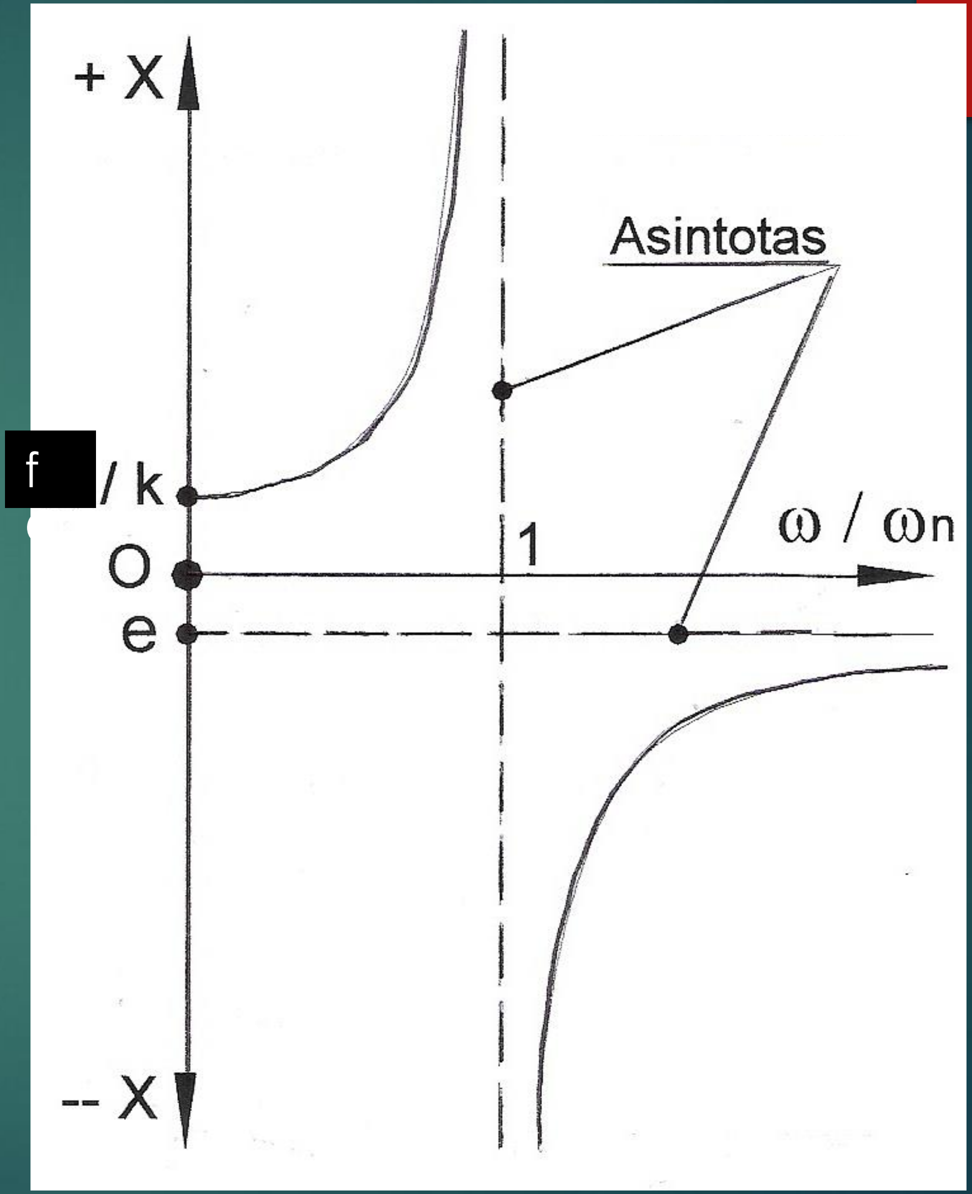
ωn depende

a) De la sustentación del árbol

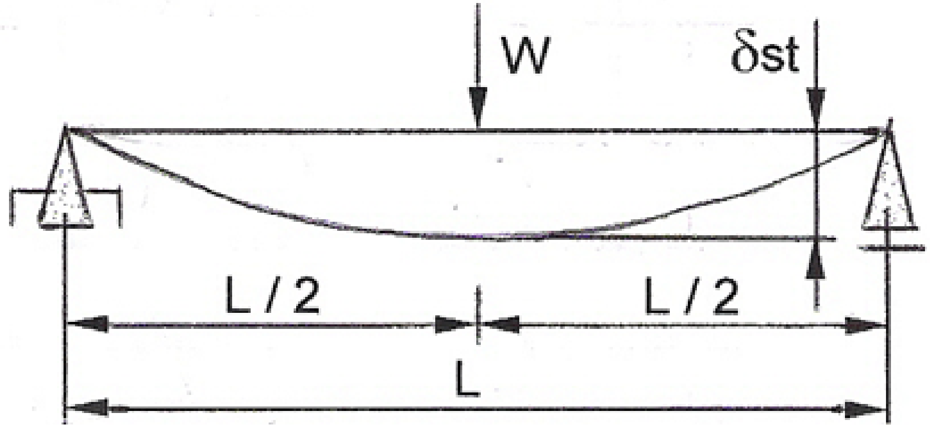
b) De las masas montadas

c) De las dimensiones del árbol

d) Del material del árbol



CASO DE VIGA CON CARGA TRANSVERSAL CENTRADA
(ASIMILABLE AL CASO DE ARBOL
ROTANTE CON APOYO ISOSTATICO)



$\delta st = (W * L^3) / (48 * E * J)$

$fn = [1 / (2 * \pi)] * [(48 * g * E * J)/(W * L^3)]^{1/2}$

CONCLUSIONES

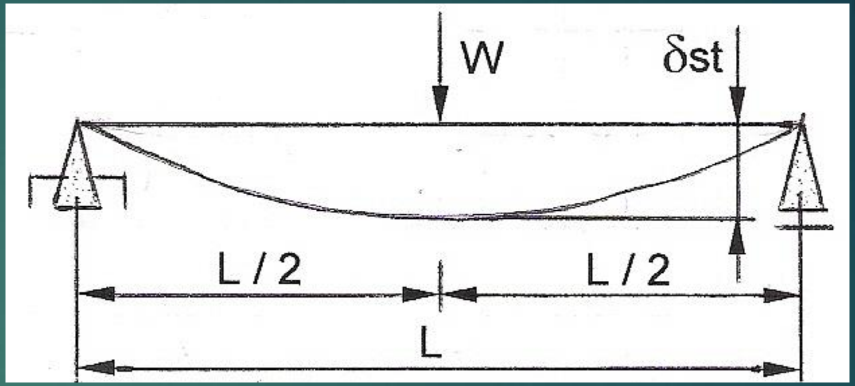
La frecuencia natural (velocidad critica en un eje) de la pieza, depende de la geometría del eje, del material y de los vínculos.

Árboles largos y de poco diámetro → baja frecuencia natural

Árboles cortos y de alto diámetro → mayor frecuencia natural

COMPARACION

CASO: CARGA TRANSVERSAL CENTRAL CON APOYOS A ROTULA

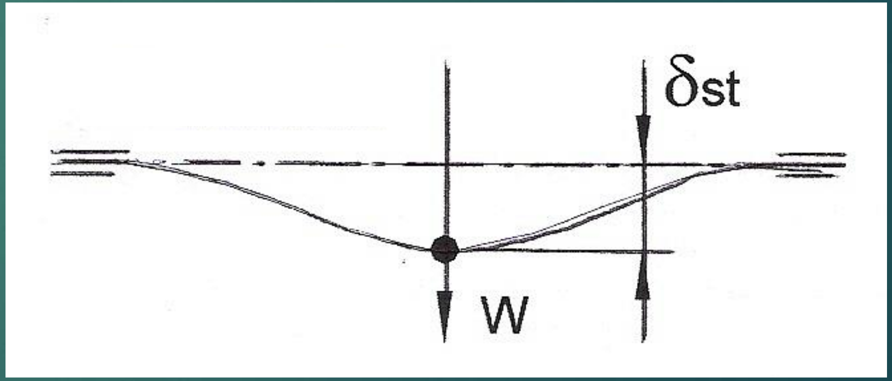


$\delta st = (W * L^3) / (48 * E * J)$

$\omega nr = (g/ \delta st)^{1/2} =$

$= [(48 * E * g * J) / (W * L^3)]^{1/2}$

CASO: CARGA TRANSVERSAL CENTRAL CON APOYOS RIGIDOS



$\delta st = (W * L^3) / (192 * E * J)$

$\omega nf = (g/ \delta st)^{1/2} =$

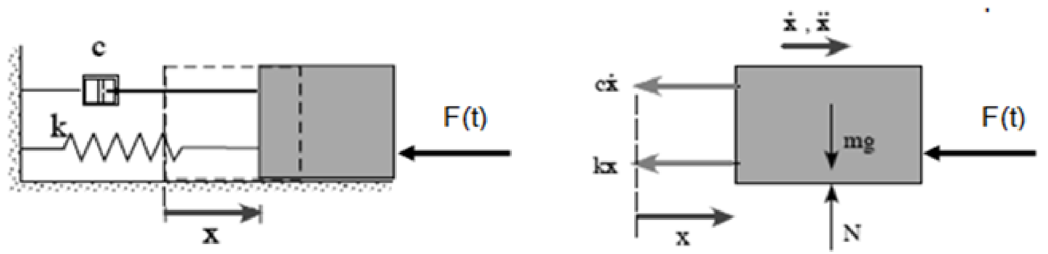
$= [(192 * E * g * J) / (W * L^3)]^{1/2}$

CONCLUSION:

$\omega nf = 2 * \omega nr$ por la diferencia de apoyos el caso 2 es mas rígido

→ se deforma menos → mayor ωn

Caso de Vibración forzada de un sólido con un grado de libertad con amortiguación C



Su expresión de equilibrio es $m*d^2x/dt + c*dx/dt + k*x = F * \text{sen}(w*t)$

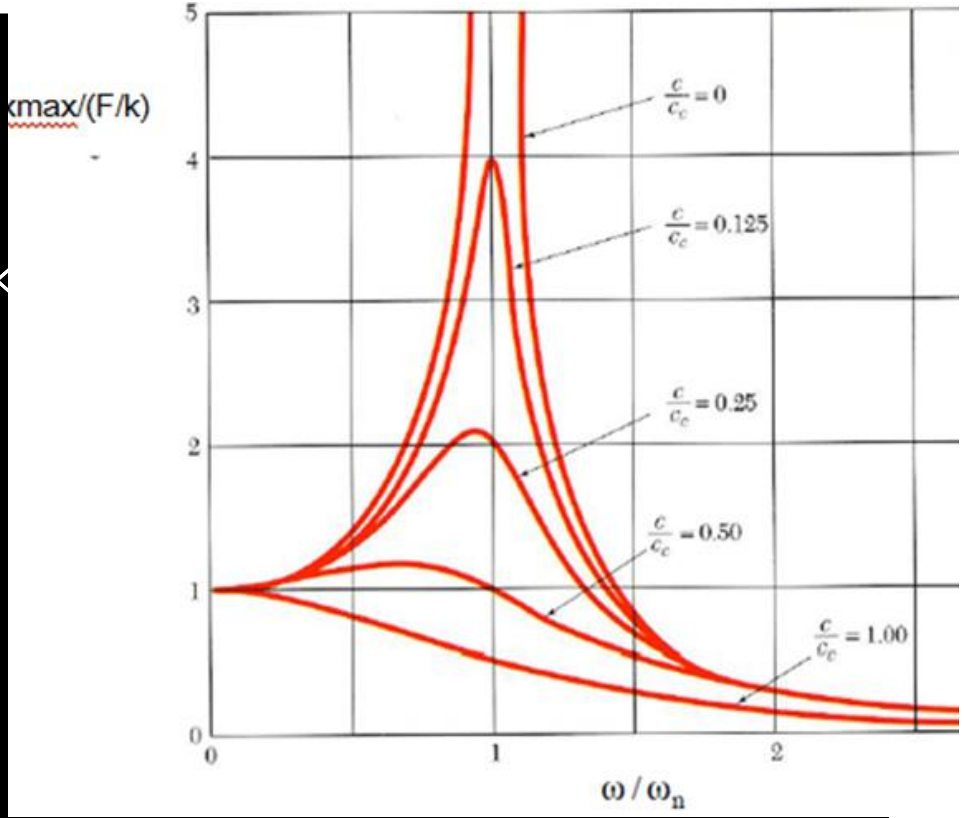
Que mediante la solución homogénea y la particular $x = x_{max}*\text{sen}(w*t + \phi)$

relación entre máximo desplazamiento (Xmax), el modulo de la excitación (F) y la elasticidad(k, (Xmax/(F/k) en función de w/wn.

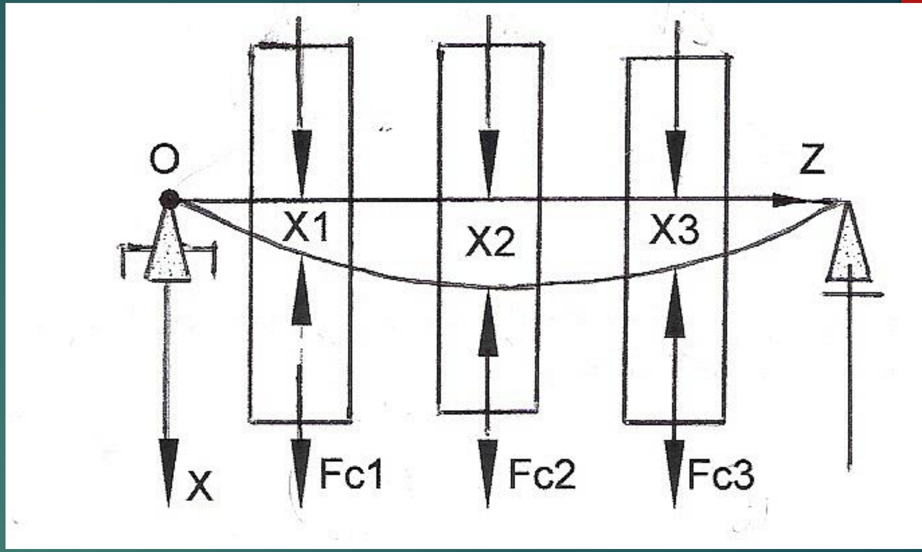
PARA TODO C/Ccrit →

Xmax CORRESPONDE A w/wn = 1

CONCLUSION APLICABLE A VELOCIDAD CRITICA DE ARBOLES



CASO: ARBOL MODELABLE CON VARIAS MASAS



Siendo

$xi = Xi * \cos(w*t) \rightarrow$

$Vi = dxi/dt = - Xi * \omega * \mathrm{sen}(w*t)$

$xi = 0 \rightarrow Vi = Vi\ max \quad (1)$

$xi = Xi \rightarrow Vi = 0$

En las oscilaciones transversales en un árbol perfectamente elástico (C=0) se conserva la energía total, es decir Ec + U = cte .
En las posiciones extremas del plano de vibración (1) Umx = Emx

$Umx = \sum (Fci * Xi / 2)$

$Emx = \omega^2 * \sum (mi * Xi^2)/2$

En el caso que $\omega \quad \omega n \rightarrow Xi \quad Xin$

$$\rightarrow \omega n^2 = \sum (Fci * Xin) / \sum (mi * Xin^2) \quad \text{ecuac.}(2)$$

En la que los Fci y Xin son <u>DESCONOCIDOS</u>

Para la condición de comportamiento perfectamente elástico

$k = Fcin / Xin = Wi / \delta sti$, sustituyendo y operando en la (2) obtenemos la Expresión del método de Rayleigh- Ritz para el caso considerado.

$$\omega n^2 = \frac{\Sigma\ (Wi * \delta sti)}{\Sigma\ (Mi * \delta sti^2)} = g * \frac{\Sigma\ (Wi * \delta sti)}{\Sigma\ (Wi * \delta sti^2)}$$

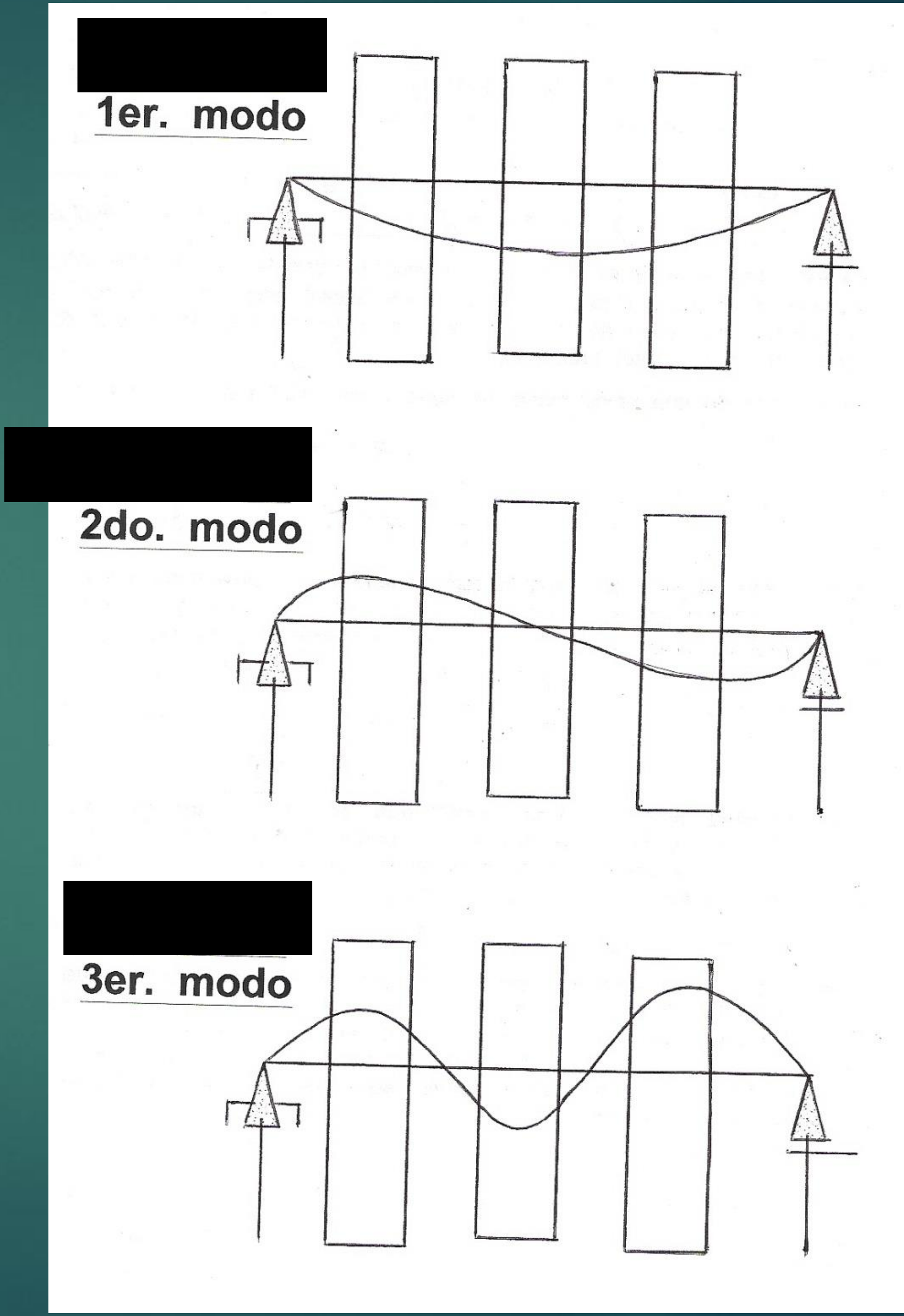
A partir de esta expresión para una sola masa → $wn^2 = g / \delta st$

Por superposición de efectos se Dunkerley obtuvo la siguiente

$$\frac{1}{\omega n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega ni^2}$$

TODOS LOS CALCULOS CORRESPONDEN AL 1ER. MODO.

EN LOS ARBOLES MODELADOS POR VARIAS MASAS EXISTEN OTRAS FRECUENCIAS “ARMONICAS” MUCHO MAYORES CON IGUALES PROPIEDADES.
RESULTAN DE DISTINTOS MODOS DE DEFORMACION TRANSVERSAL (GRADOS DE LIBERTAD) DEL ARBOL



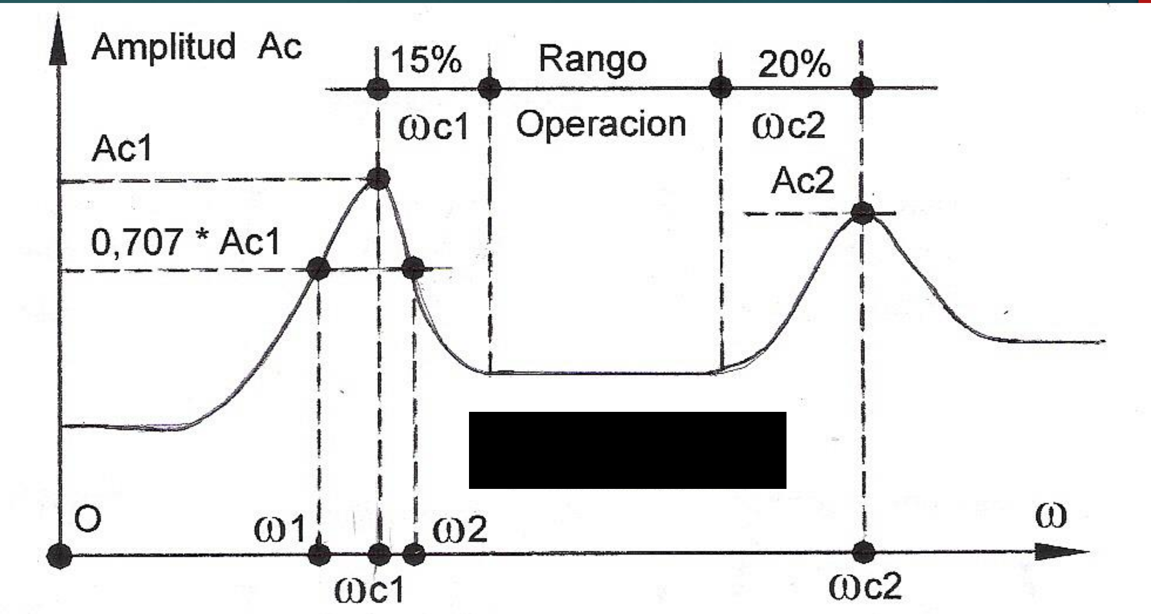
RANGOS DE OPERACIÓN

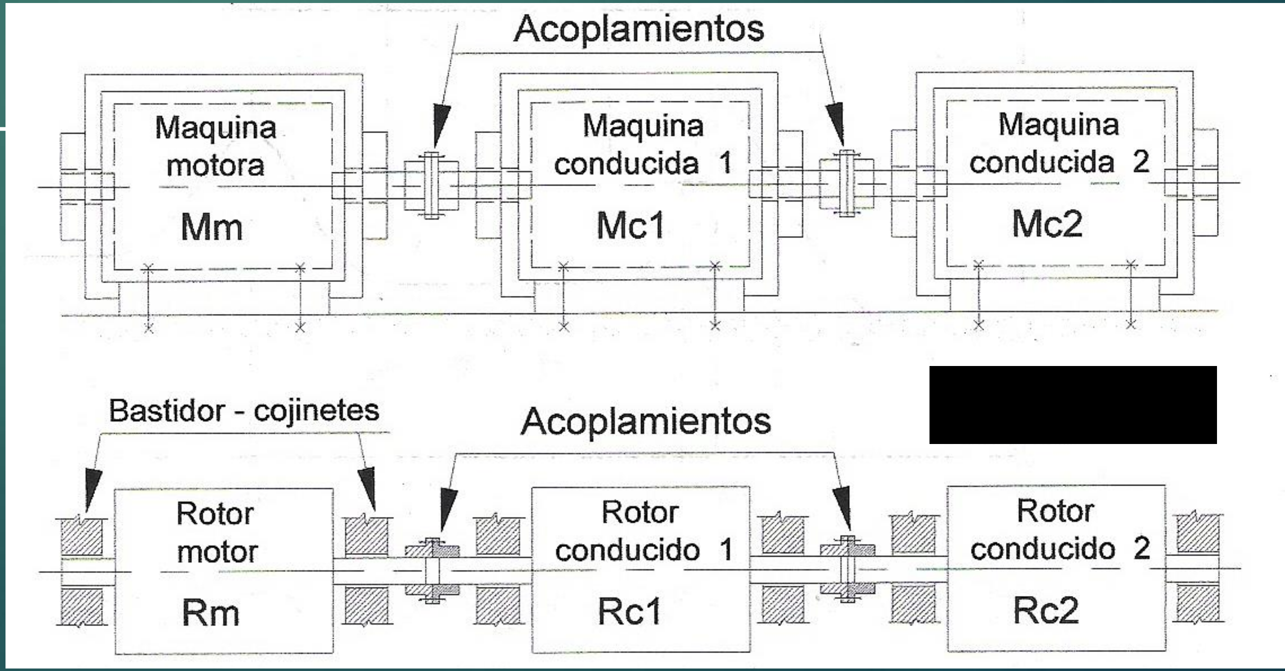
(Caso normalizado API-
Bombas centrifugas)

Factor de amplificación Af

Af = wc1 / (w2 – w1) <5

VELOCIDADES CRITICAS L
ARBOLES CONECTADOS
COAXILES





Vibraciones Ecuaciones

- M ü + C ú + K u = Fe

- Armónicas
- M ü + C ú + K u = F . Sen (t)
- Análisis Modal
- Mü + Ku = 0

- D[Mü + K U] = 0 Autovalores f1, f2 , f3 ,

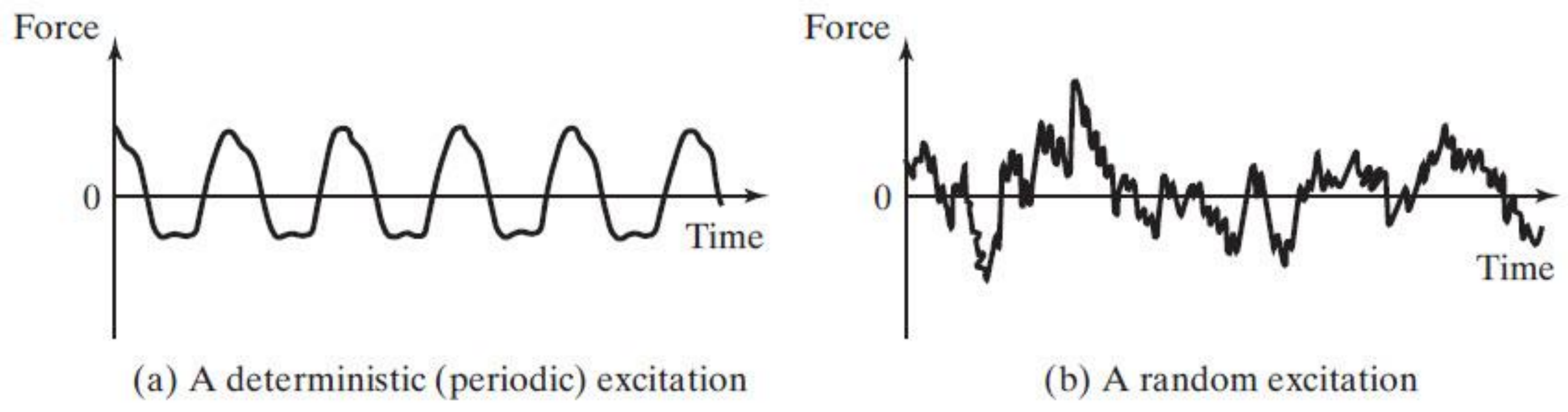
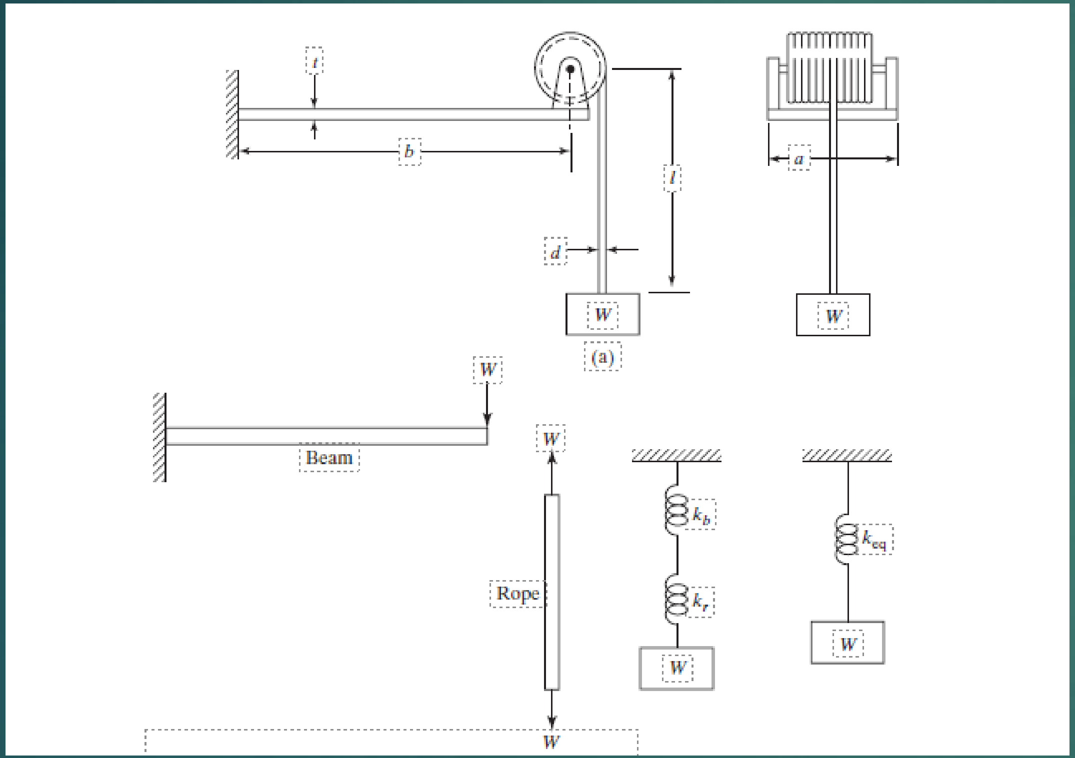


FIGURE 1.15 Deterministic and random excitations.

Amortiguamiento Modal

- El amortiguamiento modal se define como la relación del Amortiguamiento crítico por el modo actual.
- La amortiguación crítica es la menor cantidad de amortiguación que hace que un sistema regrese a su posición de equilibrio sin oscilar.
- Se determina con ensayos de campo . Varia entre 0,01 y 0,15 o mas para sistemas con gran amortiguamiento.
- λ= Amortiguamiento Actual / Amortiguamiento crítico

Ejemplo Grùa



Stiffness of Beam

$$k_b = \frac{3EI}{b^3} = \frac{3E}{b^3}\left(\frac{1}{12}at^3\right) = \frac{Eat^3}{4b^3}$$

Stiffness of Wire

$$k_r = \frac{AE}{l} = \frac{\pi d^2 E}{4l}$$

Equivalent Stiffness

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_r} = \frac{4b^3}{Eat^3} + \frac{4l}{\pi d^2 E}$$

$$k_{eq} = \frac{E}{4}\left(\frac{\pi a t^3 d^2}{\pi d^2 b^3 + l a t^3}\right)$$

Ejemplo Grua

Masa Equivalente : Viga : Mv = ρ*b*a*t

Cable : $\rho * L \,.\, \pi r^2$

Meq = Mv+ Mc= ρ*b*a*t+$\rho * L \,.\, \pi r^2$

Frecuencia Natural : $\zeta = \frac{1}{2\pi} * \sqrt{keq}/Meq$