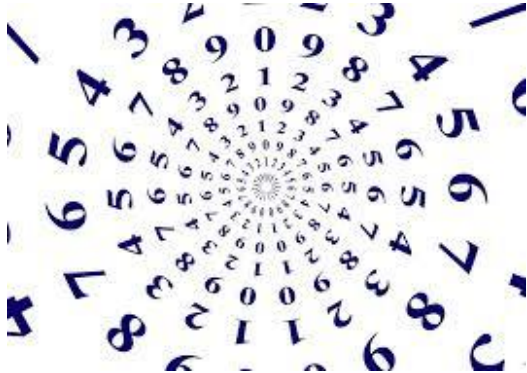


Actividad 3 de Algoritmia y Programación

Uso de estructuras de control de repeticiones

Los números naturales y sus divisores



En el ámbito de las matemáticas se asocia a los números, en particular, a los números naturales, cualidades humanas. Existen números amigos, sociables, novios, narcisistas, felices, tristes, hambrientos, intocables, ambiciosos, afortunados, poderosos, malvados, odiosos, prácticos o raros, pero también, con otras denominaciones curiosas, como números vampiros, parásitos, perniciosos, apocalípticos, perfectos, poligonales, cíclicos, automorfos, sublimes, abundantes, escasos o intocables.

Algunas de estas familias de números deben su propiedad definitoria al comportamiento de sus divisores propios, es decir, entre los divisores no se considera al propio número.

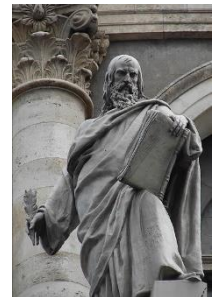
Números perfectos

Un número se dice que es **perfecto** si es igual a la suma de sus divisores (propios), como ocurre con los números $6 = 1 + 2 + 3$ y $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Se los denominó perfectos porque en tiempos antiguos se dio a esta propiedad una interpretación divina. Por ejemplo, San Agustín relaciona el hecho de que Dios crease el mundo en 6 días, con la perfección de este número.

Los siguientes números perfectos, después de 6 y 28, conocidos ya desde la antigüedad, son

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 248$$

$$8.128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1.016 + 2.032 + 4.064$$



SAN AGUSTÍN



EUCLIDES

Se desconoce el origen exacto de los números perfectos, aunque ya eran conocidos por los matemáticos griegos. Euclides de Alejandría (aprox. 325 – 265 a.n.e.¹) los estudia en su obra *Los Elementos*, aunque antes los había estudiado Pitágoras (aprox. 570 – 495 a.n.e.), e incluso podrían haber sido conocidos por los egipcios.

Euclides demostró que para algunos números primos p , los números de la forma $2^{p-1} (2^p - 1)$ son perfectos, por ejemplo, para $p = 2, 3, 5$, y 7 , se obtienen los perfectos anteriores. Dos milenios después, el matemático suizo Leonhard Euler (1707 – 1783) demostraría que todos los números perfectos pares son de esta forma, con $(2^p - 1)$ un número primo.

El quinto número primo encontrado fue 33.550.336, para $p = 13$, que aparece en un manuscrito del siglo XV. El sexto y séptimo –para $p = 17$ y 19 – fueron descubiertos por el matemático italiano Pietro Cataldi (1548 – 1626) en 1588, en concreto, 8.589.869.056 y 137.438.691.328. Y Euler, en 1772, descubrió el octavo, que es $2^{30} (2^{31} - 1) = 2.305.843.008.139.952.128$.

Obtener números perfectos es una tarea muy difícil, luego podemos decir que “la perfección es difícil de conseguir”. Antes del siglo XX solo se conocían 9 números perfectos. El noveno fue obtenido, para $p = 61$, por el matemático ruso Iván Pervushin (1827 – 1900), en 1883. De hecho, en la fórmula de Euclides-Euler no basta con que p sea primo, ya que para $p = 11$, $2^{11} - 1 = 2.047 = 23 \times 89$, no es primo, con lo cual $2^{10} (2^{11} - 1)$ no es perfecto.

Con la ayuda de los ordenadores ha sido posible calcular muchos más, pero no demasiados. Solo se conocen, hasta la fecha, 51 números perfectos. El último descubierto, en 2018, fue el correspondiente al primo $p = 82.589.933$.

Se desconoce si existe un número infinito o finito de números perfectos. Además, todos los números perfectos conocidos son pares, y no se sabe si existen impares. Lo que se ha conseguido demostrar es que de existir tendrían que cumplir una serie de propiedades, como tener al menos 9 divisores primos distintos o ser mayores que $10^{1.500}$, entre muchas otras.

¹ antes de nuestra era

Números abundantes y deficientes

Ya los griegos dividieron a los números naturales que no son perfectos en dos categorías, los abundantes y los deficientes. Los números que no son perfectos pueden ser **abundantes**, cuando el número es menor que la suma de los divisores, como el $12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$, **deficientes** en el caso contrario, como el $14 > 1 + 2 + 7 = 10$ o todos los números primos, cuyo único divisor propio es el 1. Estos conceptos, como la perfección, formaron parte de la numerología griega.

El religioso, teólogo y matemático anglosajón Alcuino de York² (735 – 804) relacionaba la “segunda creación” de Dios, el diluvio universal y el Arca de Noé, con el número 8, ya que la humanidad desciende de las 8 almas que se salvaron del diluvio refugiándose en el Arca de Noé. Por lo tanto, esta es una creación imperfecta, puesto que el número 8 es deficiente, $8 > 1 + 2 + 4$.

Los números llamados abundantes no son, sin embargo, tan abundantes como su nombre indica. Existen 245 números abundantes menores que 1.000, aunque solo uno de ellos impar, el número $945 = 3^3 \times 5 \times 7$, los demás son pares, y solo 3 números perfectos (por supuesto, pares), el resto son deficientes. Entre los primeros 50.000 números hay 37.602 deficientes, 4 perfectos y 12.394 abundantes. Entre estos 12.394 números abundantes, solo 114 son impares.



CARLOMAGNO Y
ALCUINO

Así como lo bello y lo excelente es raro de encontrar y se cuenta pronto, pero lo feo y lo malo siempre es prolífico, así también los números abundantes y deficientes resultan ser muchos y en desorden, y su descubrimiento no obedece a sistema alguno. Pero los perfectos, son a un tiempo escasos en número y se hallan dispuestos en un orden apropiado.

Nicomaco de Gerasa (aprox. 60 – 120 n.e.), *Introducción a la Aritmética*

Entre los números deficientes, es decir, aquellos que son mayores que la suma de sus divisores, se considera que son números **casi perfectos** aquellos tales que la suma de sus divisores es uno menos que el número. Así, el 16 es un número casi perfecto ya que $1 + 2 + 4 + 8 = 15$. De hecho, todas las potencias de 2 son casi perfectas:

$$\begin{aligned} &\text{NÚMERO } 2^n \\ &\text{SUMA DE SUS DIVISORES} \\ &1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = A \\ &\downarrow \\ &2 \cdot A = 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + 2^n \\ &\downarrow \\ &2 \cdot A + 1 = A + 2^n \\ &\downarrow \\ &\boxed{A = 2^n - 1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Los únicos números casi perfectos que se conocen son las potencias de 2, y es un problema abierto demostrar que estos son los únicos que existen.

Otra familia de números relacionada con la perfección, son los números **múltiplo-perfectos** o **multi-perfectos**, aquellos tal que la suma de sus divisores (recordemos que todo el tiempo estamos refiriéndonos a los divisores propios) no es el número, sino un múltiplo de este. Por ejemplo, los divisores del número $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40 y 60, cuya suma es $240 = 2 \times 120$. Solo se conocen 6 números multi-perfectos cuya suma sea el doble del número, 120, 672, 523.776, 459.818.240, 1.476.304.896, 51.001.180.160, y todos son pares. O, se conocen 36 cuya suma es el triple, de nuevo todos pares, de los cuales el más pequeño es 30.240.

Más aún, un número se dice que es **ambicioso** si puede llegar a ser perfecto de la siguiente forma. Dado el número se toma la suma de sus divisores, con este nuevo número se vuelve a considerar la suma de sus divisores, y se continúa así, de forma que el número es ambicioso si llega un momento que se alcanza un número perfecto, como en el caso del número 95, cuyos divisores

² Le decían "el hombre más sabio del mundo", fue maestro de Carlomagno y dejó unos acertijos que son el fundamento de la combinatoria, la rama de las matemáticas que es base de la Teoría de Codificación y de la Criptografía.

suman $1 + 5 + 19 = 25$, y los divisores de este suman $1 + 5 = 6$, que es perfecto. Números no ambiciosos son el 24 o los números primos (cuyo único divisor es el 1).

Veamos que el $24 = 2^3 \times 3$ no es ambicioso. Sus divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 8 y 12, cuya suma es $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 = 36$. Ahora, los divisores de $36 = 2^2 \times 3^2$ son 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12 y 18, cuya suma es 55. Ahora este número, $55 = 5 \times 11$, tiene solo tres divisores 1, 5 y 11, cuya suma es 17, que es primo, luego su único divisor es 1 y se estaciona la sucesión. En consecuencia, el 24 no es ambicioso. Solo se conocen 16 números ambiciosos, 25, 95, 119, 143, 417, 445, 565, 608, 650, 652, 675, 685, 783, 790, 909, 913, e incluso un número tan bajo como 276 se desconoce si es, o no, ambicioso (aunque seguramente no).

Y también relacionados con la perfección están los números **sublimes**, aquellos tales que tanto el número de sus divisores (incluido ahora el propio número), como la suma de estos son perfectos, como el 12, que tiene 6 divisores y su suma es $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$, aunque solo se conoce otro número sublime más, que es el siguiente

6.086.555.670.238.378.989.670.371.734.243.169.622.657.830.773.351.885.970.528.324.860.512.791.691.264.

Números amigos

En el magnífico libro “La fórmula preferida del profesor”, de la escritora japonesa Yoko Ogawa, uno de los personajes principales, el profesor, le explica a otro de los personajes principales que los números 220 y 284 son números amigos. Los divisores del número 284 (sin contar el propio número), son {1, 2, 4, 71, 142}, cuya suma es $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Los divisores de 220 son {1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110}, y la suma de estos es $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$, precisamente el primer número. Por este motivo, se dice que los números 220 y 284 son números amigos. Es decir, dos números son amigos si la suma de los divisores del primero (sin contar al número) es igual al segundo, y viceversa.

Este par de números amigos (220, 284) ya era conocido por los pitagóricos, quienes les atribuían propiedades místicas. En general, en la antigüedad se pensaba que estos números tenían poderes místicos, y eran utilizados en textos religiosos y de magia, en particular, en relación con el amor y la amistad. Los astrónomos griegos los incorporaron en sus horóscopos, talismanes y amuletos.

“Las personas expertas en los talismanes afirman que los números amigos 220 y 284 ejercen una fuerte influencia para establecer una unión o una amistad muy fuerte entre dos personas”

Ibn Jaldún (1332-1406), Muqaddima (prolegómenos), 1377

Cuenta una leyenda que había un sultán aficionado a los acertijos, que al descubrir que tenía a un matemático como prisionero, decidió plantearle la siguiente cuestión. El sultán le dijo al matemático que le planteara un reto, un problema, y que estaría libre durante el tiempo que él necesitara para resolverlo, pero una vez resuelto por el sultán, el matemático sería ejecutado. El matemático le explicó que los números 220 y 284 son números amigos, y le planteó que buscara otro par de números amigos. El sultán no lo consiguió y el matemático murió de viejo y siendo un hombre libre.



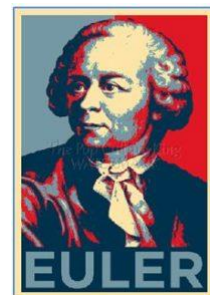
De hecho, calcular más pares de números amigos no es una tarea sencilla. Muchos matemáticos árabes estudiaron los números amigos, entre los siglos IX y XIV, como el iraquí Thábit ibn Qurra (826 – 901), quien dio una fórmula para obtener números amigos. En particular, se obtuvieron dos nuevos pares de números amigos: (17.296, 18.416) y (9.363.584, 9.437.056).

En el siglo XVII los grandes matemáticos Pierre de Fermat (1601 – 1665) y René Descartes (1596 – 1650) redescubrieron la fórmula del matemático árabe, así como los dos anteriores pares de números amigos, que en ocasiones son atribuidos a ellos.

Otro matemático ya mencionado, Leonhard Euler (siglo XVIII) extendió la fórmula de Qurra y obtuvo 64 nuevos pares de números amigos.

Curiosamente, a todos ellos se les pasó el siguiente par de números amigos más pequeño, después de (220, 284), el par (1.184, 1.210), descubierto por el adolescente Nicolo Paganini, del 16 años, en 1866.

La tarea siguió siendo compleja y hasta 1946 solo se consiguieron descubrir 390 pares de números amigos, hasta que llegó la era de las computadoras, y su potencia de cálculo que, junto a nuevos algoritmos, ha permitido calcular (según la wikipedia) hasta marzo de 2019 exactamente 1.223.386.359 parejas de números amigos. Sin embargo, hoy en día no se sabe aún si existen infinitos pares de números amigos.



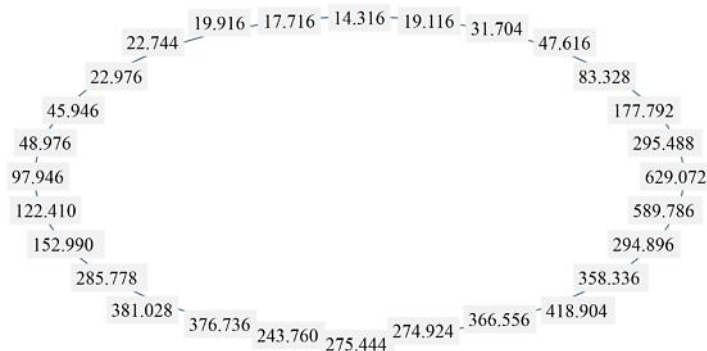
Otro punto de unión entre números. Se dice que dos números son **novios** o **casi-amigos** si cada uno de ellos es igual a la suma de los divisores del otro menos 1, como el $48 = 1 + 3 + 5 + 15 + 25 - 1$ y el $75 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 16 + 24 - 1$. Las primeras parejas de números novios son (48, 75), (140, 195), (1.050, 1.925), (1.575, 1.648), (2.024, 2.295) y (5.775, 6.128). Los números de todas las parejas de novios conocidas tienen paridad opuesta, es decir, uno es par y el otro impar.

Números sociables

La propiedad de amistad puede generalizarse a un grupo de números, de forma que la suma de los divisores de cada uno es igual al siguiente, y la del último igual al primero, entonces se habla de números **sociables**. El grupo de números más pequeños que son sociables son 12.496, 14.288, 15.472, 14.536 y 14.264. Comprobémoslo:

- 1) $12.496 = 2^4 \times 11 \times 71$, divisores: 1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 44, 71, 88, 142, 176, 284, 568, 781, 1.136, 1.562, 3.124 y 6.248, cuya suma es 14.288;
- 2) $14.288 = 2^4 \times 19 \times 47$, divisores: 1, 2, 4, 8, 16, 19, 38, 47, 76, 94, 152, 188, 304, 376, 752, 893, 1.786, 3.572 y 7.144, cuya suma es 15.472;
- 3) $15.472 = 2^4 \times 967$, divisores: 1, 2, 4, 8, 16, 967, 1.934, 3.868 y 7.736, cuya suma es 14.536;
- 4) $14.536 = 2^3 \times 23 \times 79$, divisores: 1, 2, 4, 8, 23, 46, 79, 92, 158, 184, 316, 632, 1.817, 3.634 y 7.268, cuya suma es 14.264;
- 5) $14.264 = 2^3 \times 1.783$, divisores: 1, 2, 4, 8, 1.783, 3.566 y 7.132, cuya suma es 12.496.

Se conocen 5.410 grupos de números sociables, la mayoría formados por 4 números, aunque existe un grupo formado por 28 números.



Otras tribus de números naturales

Se dice que un número es **práctico** si todos los números naturales más pequeños que él pueden ser expresados como suma de distintos divisores del número. Así, el número 12 es un número práctico ya que todos los números menores que él, desde el 1 al 11, pueden ser expresados como suma de algunos de los divisores de 12. Veámoslo: los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4 y 6, luego $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 4$, $5 = 1 + 4$, $6 = 2 + 4$, $7 = 1 + 2 + 4$, $8 = 2 + 6$, $9 = 3 + 6$, $10 = 4 + 6$ y $11 = 1 + 4 + 6$.

Los números prácticos menores que 100 son: 1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 64, 66, 72, 78, 80, 84, 88, 90 y 96.

El concepto fue definido en 1948 por el matemático indio A. K. Srinivasan, números que en su opinión eran interesantes de estudiar por su relación con las subdivisiones del dinero, los pesos y las medidas. Aunque estos números ya fueron utilizados por el matemático italiano Fibonacci (Leonardo de Pisa, 1170 – 1240), en su obra Liber Abaci (Libro del Ábaco, 1202), en relación con las fracciones egipcias³.

Claramente, todas las potencias de 2 son prácticas, ya que dado 2^n , se puede expresar cualquier número entre 1 y $2^n - 1$ como suma de potencias de 2, menores que 2^n , que son sus divisores. Es solamente una cuestión de divisibilidad y el fundamento del sistema binario. Se conocen muchas propiedades de los números prácticos, como que existen infinitos, el producto de dos números prácticos es un número práctico, los números perfectos pares, luego de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, son prácticos, o que, salvo el 1 y el 2, todos los números prácticos son divisibles por 4 o 6, entre otras.

Y no podían faltar los números **raros**, o **extraños**, que son aquellos que son abundantes, es decir, la suma de los divisores es mayor que el número, pero no se puede obtener el número exacto quitando algunos de los divisores, es decir, como suma de un

³ Una fracción egipcia es la suma de fracciones unitarias distintas, es decir, de fracciones de numerador 1 y cuyos denominadores sean enteros positivos distintos. Se puede demostrar que cualquier número racional positivo se puede escribir como fracción egipcia.

subconjunto de divisores propios. Por ejemplo, el 12 es abundante, pero como $12 = 2 + 4 + 6$, no es raro, y el número raro más pequeño es 70 (cuyos divisores son 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35).

Aunque se sabe que existen infinitos números raros, estos son relativamente escasos, por ejemplo, solamente hay 7 números raros menores que 10.000, que son 70, 836, 4.030, 5.830, 7.192, 7.912 y 9.272. Todos los números raros conocidos son pares y si existe alguno impar deberá ser, por lo menos, mayor que 10^{21} .

Cerramos este repaso a algunas tribus numéricas con los números **poderosos**, que son aquellos tales que, si un número primo p es divisor suyo, también lo es su cuadrado p^2 , como el 36, cuyos divisores primos son 2 y 3, y sus cuadrados también son divisores de 36. Curiosamente, un número m es poderoso si, y sólo si, se puede expresar como $m = a^2 b^3$, para algún par de números a y b . Claramente, si un número es de la forma $a^2 b^3$ es poderoso (ya que los cuadrados de los primos de la descomposición en primos de a y b claramente dividen a $a^2 b^3$), pero, además, todos los números poderosos son de esta forma. Veámoslo:

m PODEROSO

$$m = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}, \quad a_i \geq 2$$

definimos
$$\begin{cases} b_i = 3, & \text{si } a_i \text{ es impar} \\ b_i = 0, & \text{si } a_i \text{ es par} \end{cases}$$

y $c_i = a_i - b_i$, luego estas son enteros para no negativos.

$$m = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} = p_1^{c_1} \cdots p_r^{c_r} \cdot p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$$

$$= \left[p_1^{a_1/2} \cdots p_r^{a_r/2} \right]^2 \cdot \left[p_1^{b_1/3} \cdots p_r^{b_r/3} \right]^3$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_a \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_b$

$$\underline{\underline{m = a^2 \cdot b^3}}$$

Por ejemplo, para el número $m = 21.600 = 2^5 \times 3^3 \times 5^2$, tendríamos que $b = 2 \times 3 = 6$ y $a = 2 \times 5 = 10$.

Problema para resolver

Desarrollar un programa que solicite números naturales mayores a 0, o 0 para terminar el programa, y para cada uno de ellos muestre, en una misma línea, sus divisores propios y la suma de ellos.

En Python, para imprimir el valor de una variable v sin saltar de línea, se debe usar un parámetro especial en la función `print()` llamado **end**, al que se debe asignar el carácter de separación con el próximo valor a imprimir, por ejemplo:

```
print(v, end=' ') # separación con un espacio
```

o

```
print(v, end=', ') # separación con coma
```

o

```
print(v, end=' +')
```

o

```
print(v, end=' =')
```

Para probar el programa, utilice como datos de prueba números mencionados previamente: un abundante, un deficiente, un perfecto, un casi perfecto, un ambicioso, un par de amigos, un par de casi amigos, y uno sociable con todos sus socios.

ⁱ **Un acertijo de Alcuino**

Temprano una mañana, sales para el mercado. Vas a vender un lobo, una cabra y una col. El camino es escabroso y peligroso, y tú tienes que vigilar constantemente al lobo para que no se coma a la cabra, y a la cabra, para que no se coma la col.

Estás por llegar, pero te falta salvar un obstáculo más: un río. Afortunadamente hay un bote, pero es demasiado pequeño así que solo puedes llevar una cosa por viaje.

¿Cómo haces para pasar todo al otro lado sin que nada termine en el estómago de tus dos animales?

En el primer viaje, tienes que llevarte la cabra en el bote. Regresas y te llevas el lobo, lo dejas en la otra orilla, pero te traes la cabra, a la que dejas donde empezaste para traer la col y finalmente, puedes traer la cabra contigo.