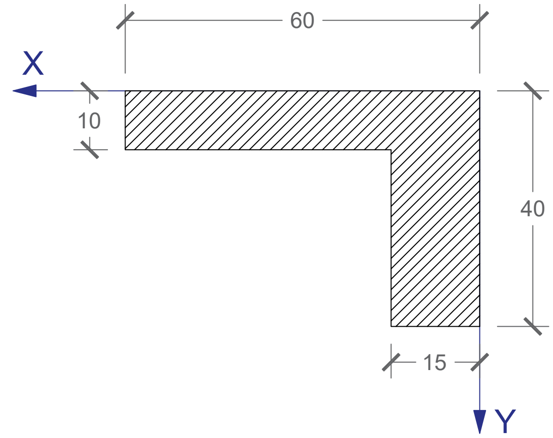


<u>Enunciado:</u> Para la siguiente figura

a) Calcular los momentos de inercia para los ejes X e Y.

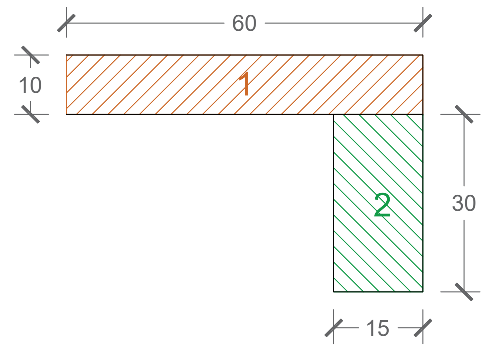
b) Calcular el momento centrífugo XY.

c) Calcular la posición del baricentro de la figura.

d) Calcular los momentos de inercia para ejes X e Y baricéntricos.

e) Calcular los momentos de inercia principales, y el ángulo que forma con el eje X.

<u>Resolución:</u>



Dividimos nuestra figura en dos rectángulo como se indica en la figura:

Área del rectángulo 1: $A_1 := 10\text{cm}\cdot 60\text{cm} = 600\cdot\text{cm}^2$

Área del rectángulo 2: $A_2 := 15\text{cm}\cdot 30\text{cm} = 450\cdot\text{cm}^2$

Área total: $A_t := A_1 + A_2 = 1.05\times 10^3\cdot\text{cm}^2$

a) Los momentos de inercia de la figura compuesta lo calculamos como la suma de los momentos de inercia de cada figura respecto al eje correspondiente. En cada caso lo calcularemos como el valor del momento de inercia baricéntrico más el término de Steiner.

Vamos a calcular primero el momento de inercia respecto al eje X. Por lo tanto para el rectángulo 1 es el eje de menor inercia, y para el rectángulo 2 el de mayor inercia. Las distancias para el término de Steiner son distancias en Y, desde el baricentro de cada rectángulo al eje X.

Para el rectángulo 1: $$J_{x1} := \frac{60\cdot\text{cm}\cdot(10\text{cm})^3}{12} + A_1\cdot\left(\frac{10\text{cm}}{2}\right)^2 = 2\times 10^4\cdot\text{cm}^4$$

Para el rectángulo 2: $$J_{x2} := \frac{15\cdot\text{cm}\cdot(30\text{cm})^3}{12} + A_2\cdot\left(10\text{cm} + \frac{30\text{cm}}{2}\right)^2 = 3.15\times 10^5\cdot\text{cm}^4$$

Para la figura compuesta: $J_x := J_{x1} + J_{x2} = 3.35\times 10^5\cdot\text{cm}^4$

Para el momento de inercia respecto al eje Y, para el rectángulo 1 es el eje de mayor inercia, y para el rectángulo 2 el de menor inercia. Las distancias para el término de Steiner son distancias en X, desde el baricentro de cada rectángulo al eje Y.

Para el rectángulo 1: $$J_{y1} := \frac{10\cdot\text{cm}\cdot(60\text{cm})^3}{12} + A_1\cdot\left(\frac{60\text{cm}}{2}\right)^2 = 7.2\times 10^5\cdot\text{cm}^4$$

Para el rectángulo 2: $$J_{y2} := \frac{30\cdot\text{cm}\cdot(15\text{cm})^3}{12} + A_2\cdot\left(\frac{15\text{cm}}{2}\right)^2 = 3.375\times 10^4\cdot\text{cm}^4$$

Para la figura compuesta: $J_y := J_{y1} + J_{y2} = 7.537\times 10^5\cdot\text{cm}^4$

b) El momento centrífugo de cada figura respecto a su baricentro es nulo, ya que son ejes principales. Por lo tanto el momento centrífugo total de la figura respecto a los ejes XY será solamente del que resulta del termino de Steiner. En el caso del momento centrífugo este término se calcula como el área de cada rectángulo multiplicado por las distancias tanto en X como en Y. Como las figuras están en el cuadrante negativo el valor del momento centrífugo será positivo.

$$J_{xy} := A_1 \cdot \left(\frac{10cm}{2}\right) \cdot \left(\frac{60cm}{2}\right) + A_2 \cdot \left(10cm + \frac{30cm}{2}\right) \cdot \left(\frac{15cm}{2}\right) = 1.744 \times 10^5 \cdot cm^4$$

c) Las coordenadas del baricentro se definen como $R = \frac{1}{A_t} \cdot \sum_{i=1}^{n} (A_i \cdot r_i)$ Entonces para nuestras coordenadas:

$$X_g := \frac{A_1 \cdot \frac{60cm}{2} + A_2 \cdot \frac{15cm}{2}}{A_t} = 20.357 \cdot cm \qquad Y_g := \frac{A_1 \cdot \frac{10cm}{2} + A_2 \cdot \left(10cm + \frac{30cm}{2}\right)}{A_t} = 13.571 \cdot cm$$

d) Para el cálculo de los momentos de inercia baricéntricos usaremos el teorema de Steiner, conociendo los momentos de inercia respecto a los ejes X e Y del origen de coordenadas y las distancias al baricentro.

$$J_{xg} := J_x - A_t \cdot Y_g^2 = 1.416 \times 10^5 \cdot cm^4$$

$$J_{yg} := J_y - A_t \cdot X_g^2 = 3.186 \times 10^5 \cdot cm^4$$

$$J_{xyg} := J_{xy} - A_t \cdot Y_g \cdot X_g = -1.157 \times 10^5 \cdot cm^4$$

e) Los momentos de inercia principales de nuestra sección son aquellos para los cuales el momento centrífugo es igual a cero (para ejes perpendiculares entre si). Dicho problema constituye un problema matemático de vectores propios (autovalores y autovectores) cuya solución es:

$$J_1 := \frac{1}{2} \cdot \left(J_{xg} + J_{yg}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(J_{xg} - J_{yg}\right)^2 + 4 \cdot J_{xyg}^2} = 3.758 \times 10^5 \cdot cm^4$$

$$J_2 := \frac{1}{2} \cdot \left(J_{xg} + J_{yg}\right) - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(J_{xg} - J_{yg}\right)^2 + 4 \cdot J_{xyg}^2} = 8.443 \times 10^4 \cdot cm^4$$

Y el ángulo que forma X con dichos ejes principales es:

$$\alpha_1 := \frac{1}{2}\, \mathrm{atan}\left(\frac{2 \cdot J_{xyg}}{J_{xg} - J_{yg}}\right) = 26.295 \cdot deg \qquad \alpha_2 := \frac{1}{2}\, \mathrm{atan}\left(\frac{2 \cdot J_{xyg}}{J_{xg} - J_{yg}}\right) + 90deg = 116.295 \cdot deg$$

También podemos calcular los auto valores y auto vectores:

$$M_I := \begin{pmatrix} J_{xg} & J_{xyg} \\ J_{xyg} & J_{yg} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{eigenvals}(M_I) = \begin{pmatrix} 8.443 \times 10^4 \\ 3.758 \times 10^5 \end{pmatrix} \cdot cm^4$$

$$\mathrm{eigenvec}\left(M_I, \mathrm{eigenvals}(M_I)_0\right) = \begin{pmatrix} 0.897 \\ 0.443 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{eigenvec}\left(M_I, \mathrm{eigenvals}(M_I)_1\right) = \begin{pmatrix} -0.443 \\ 0.897 \end{pmatrix}$$