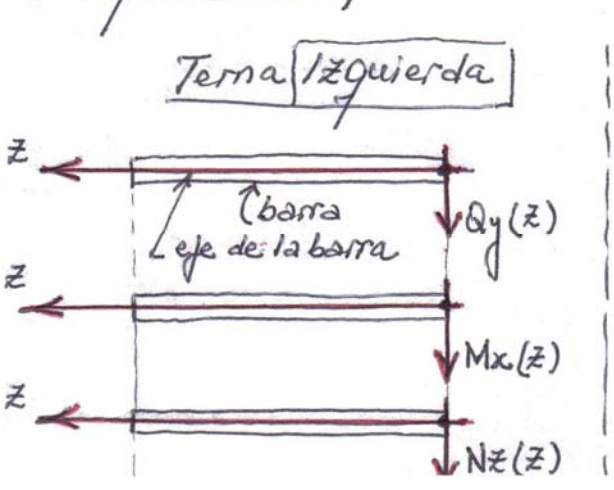
Sistemas de Sólido Plano

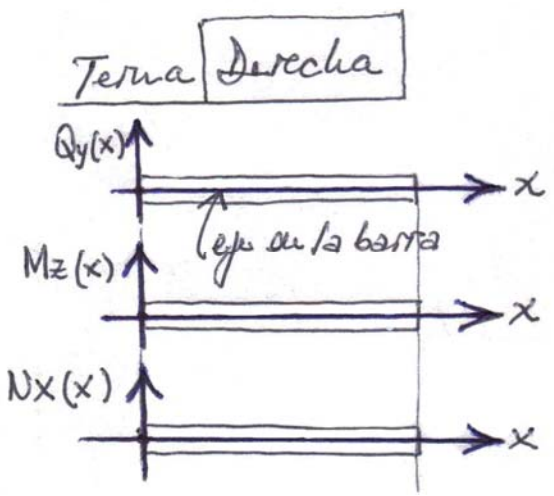
Trazado de los Diagramas de Características

(I).- Conceptos e ideas que debemos recordar

I.1.- Los esfuerzos característicos son las solicitaciones producidas por las cargas que actúan sobre la estructura que se analiza y que habrán de ser las causas condicionantes (al margen de otras variables) del dimensionamiento de las secciones transversales de las distintas partes que la componen.

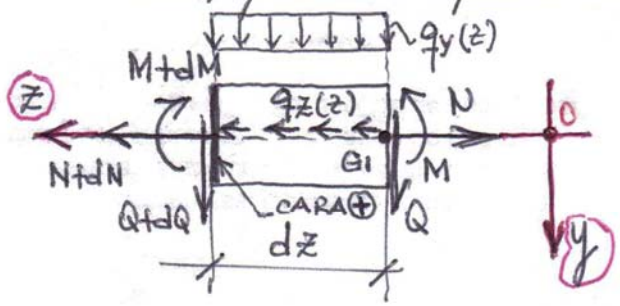
I.2.- Las acciones exteriores (cargas) han sido expresadas por medio de funciones (Carga concentrada (incluyendo pares) y fuerzas distribuidas). Por lo tanto, los esfuerzos característicos (que de ellas derivan) serán también funciones y el trazado de los diagramas de características se reduce, en definitiva, a eso, es decir, a dibujar cómo varía un esfuerzo determinado (variable dependiente) a lo largo del eje de la barra para la cual se dibuja (variable independiente):





I.3.- **Relaciones Diferenciales**: son expresiones matemáticas, que se deducen estudiando el equilibrio de un elemento de barra, sometido a la acción de las fuerzas exteriores y de los esfuerzos característicos, que facilitan el análisis de las funciones que se quiere graficar (M, Q, N) y el mismo trazado.

Relac. Dif. / Terna Izquierda



1) $\Sigma P_z = (N+dN) + q_z \cdot dz - N = 0$

$\Rightarrow dN + q_z \cdot dz = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dN_z(z)}{dz} = -q_z(z)} \quad (1)$$

2) $\Sigma P_y = (Q+dQ) + q_y \cdot dz - Q = 0$

$\Rightarrow dQ + q_y \cdot dz = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dQ_y(z)}{dz} = -q_y(z)} \quad (2)$$

3) $\Sigma M_{G1} = 0$

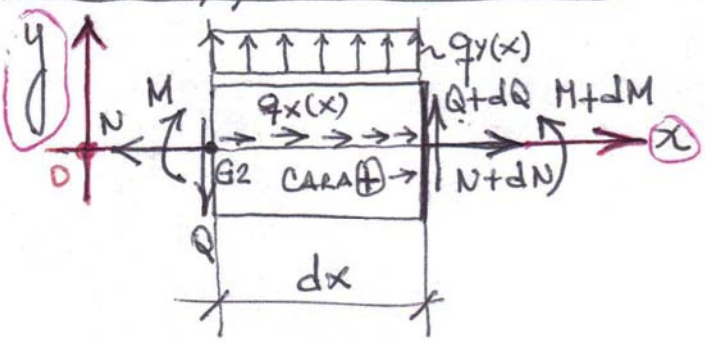
$\Sigma M_{G1} = (M+dM) - (Q+dQ) \cdot dz - M - q_y \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} = 0$

Despreciando infinitésimos de orden sup.:

$dM - Q \cdot dz = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dM_x(z)}{dz} = Q_y(z)} \quad (3)$$

Relac. Dif. / Terna Derecha



1) $\Sigma P_x = (N+dN) + q_x \cdot dx - N = 0$

$\Rightarrow dN + q_x \cdot dx = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dN_x(x)}{dx} = -q_x(x)} \quad (4)$$

2) $\Sigma P_y = (Q+dQ) + q_y \cdot dx - Q = 0$

$\Rightarrow dQ + q_y \cdot dx = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dQ_y(x)}{dx} = -q_y(x)} \quad (5)$$

3) $\Sigma M_{G2} = 0$

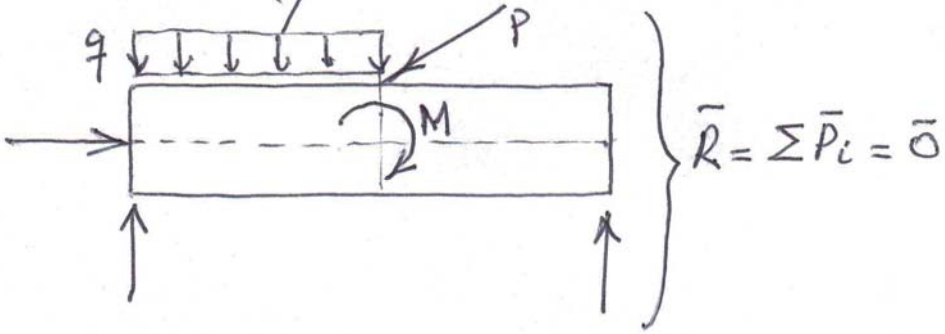
$\Sigma M_{G2} = (M+dM) + (Q+dQ) \cdot dx + q_y \cdot \frac{dx^2}{2} - M = 0 \Rightarrow dM + Q\,dx = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dM_z(x)}{dx} = -Q_y(x)}$$

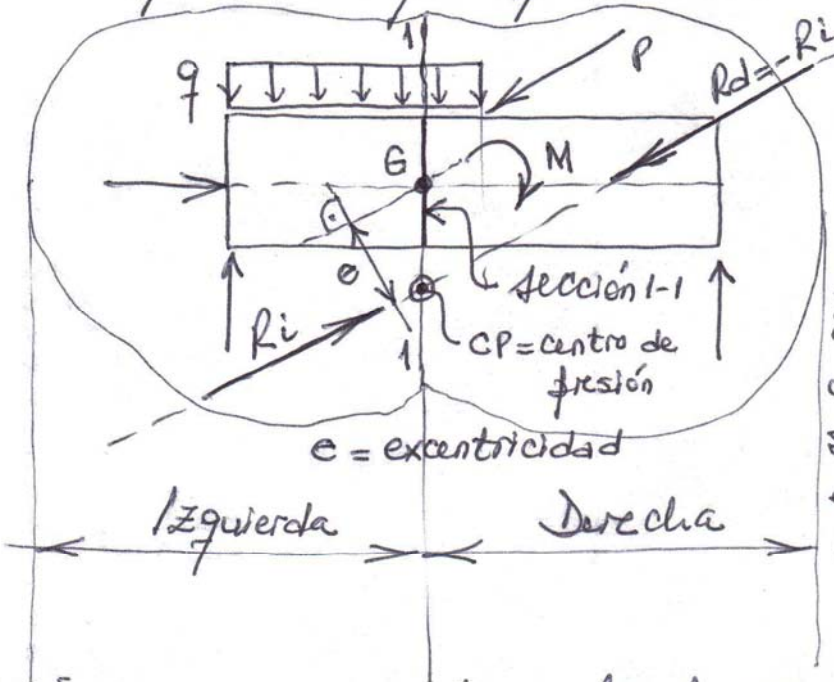
C.G.

I.4.- Concepto de Esfuerzo Característico

Partimos de la idea de un cuerpo (chapa, en nuestro caso) en estado de equilibrio:



Ahora, seleccionamos una sección transversal cualquiera, con lo cual el cuerpo queda dividido en 2 partes (izquierda y derecha) que admitirán sendas resultantes parciales $\bar{R}i$ y $\bar{R}d$, que deben ser fuerzas opuestas: $\bar{R}i = -\bar{R}d$, de modo que se cumpla que $\bar{R}i + \bar{R}d = \bar{R} = \bar{0}$:

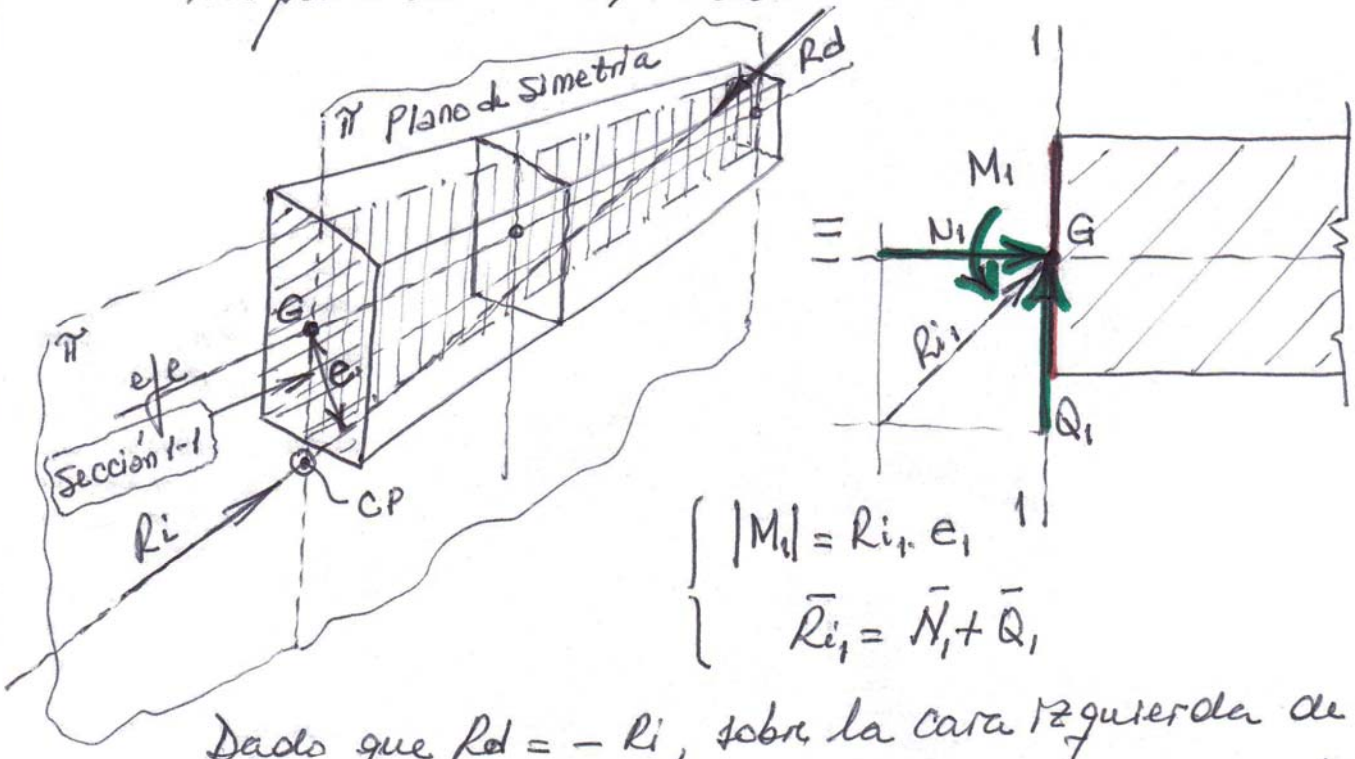


Nota: dado que Ri y Rd constituyen un sistema equivalente para las fuerzas actuantes sobre cada parte, no deben coexistir con ellas; aquí se lo ha hecho al solo efecto de recordar ideas.

Si $\bar{R}d$ es la resultante de las fuerzas que actúan sobre la parte derecha, Ri puede interpretarse como la "colaboración" que le suministra la izquierda para que se mantenga en equilibrio y viceversa.

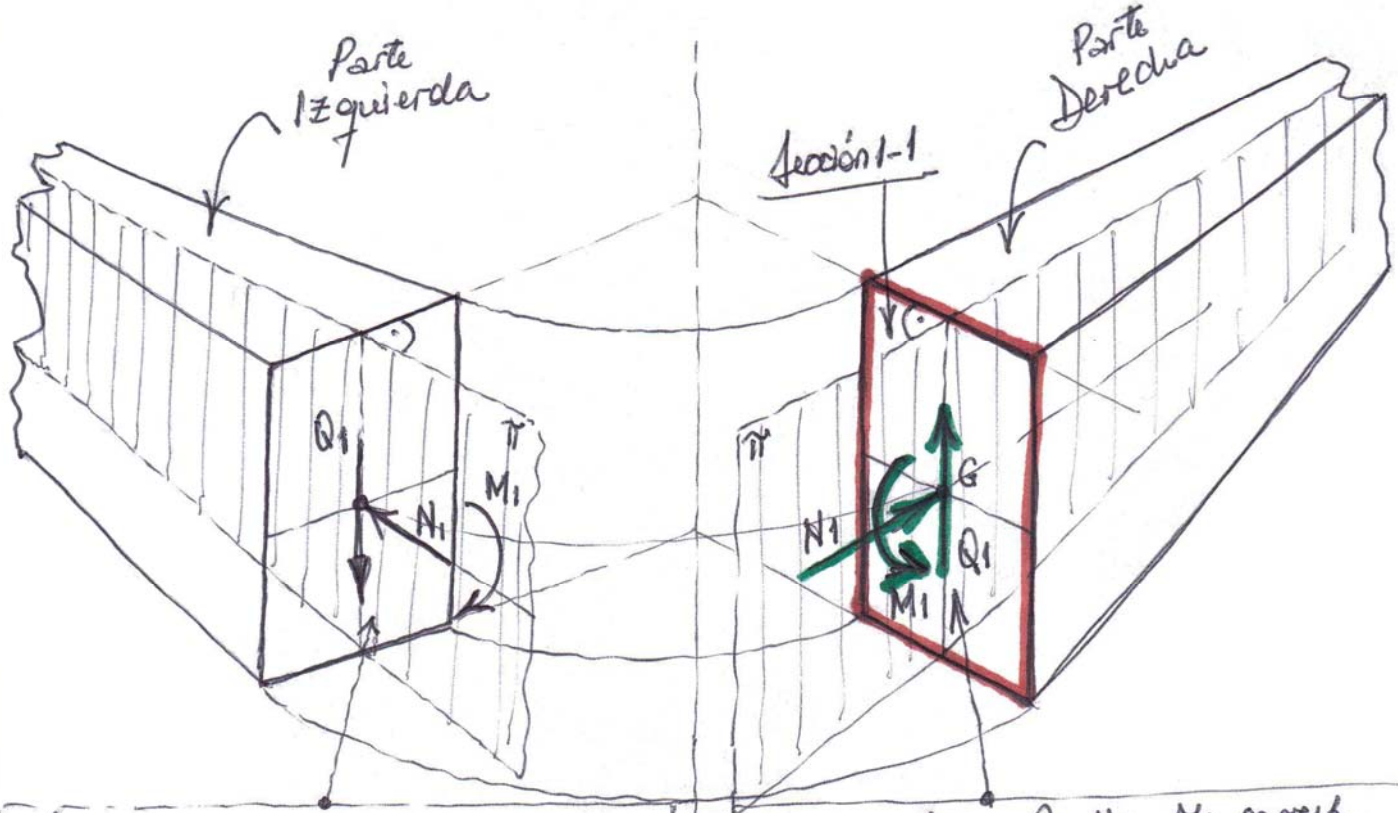
CG

Si analizamos ahora el equilibrio de la parte derecha, tendremos:



$$\begin{cases} |M_1| = Ri_1 \cdot e_1 \\ \bar{Ri}_1 = \bar{N}_1 + \bar{Q}_1 \end{cases}$$

Dado que $Rd = -Ri$, sobre la cara izquierda de la sección 1-1 se obtendrán fuerzas opuestas a las anteriores, con lo cual se tendrá:



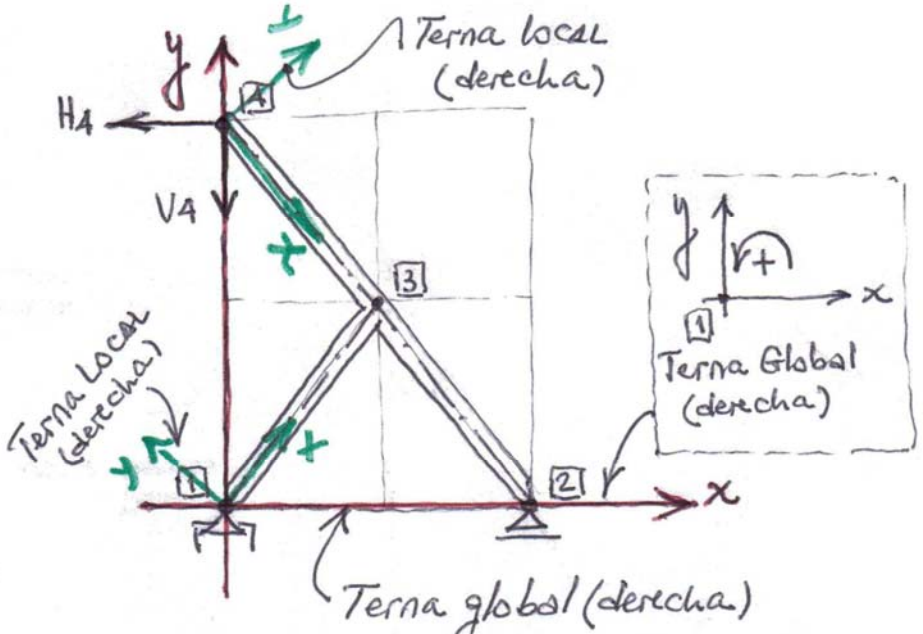
Las fuerzas Q_1, N_1 y M_1, corresponden a la descomposición de (Rd) en la dirección de los ejes coordenados x, y, z y son las que se dibujan cuando se usa terna DERECHA.

Estas 3 fzas., Q_1, N_1 y M_1, corresp. a la descomp. de (Ri) según x, y y z. Son las que se dibujan cuando se emplea terna IZQUIERDA. CG

I.5.- Ternas de referencia Global y Locales

- T. Global: se emplea para referir a ella la geometría de la estructura y para determinar $\bar{R}$ y las RVE.
- T. Locales: a ellas se refieren los esfuerzos característicos.

- Ejemplos:

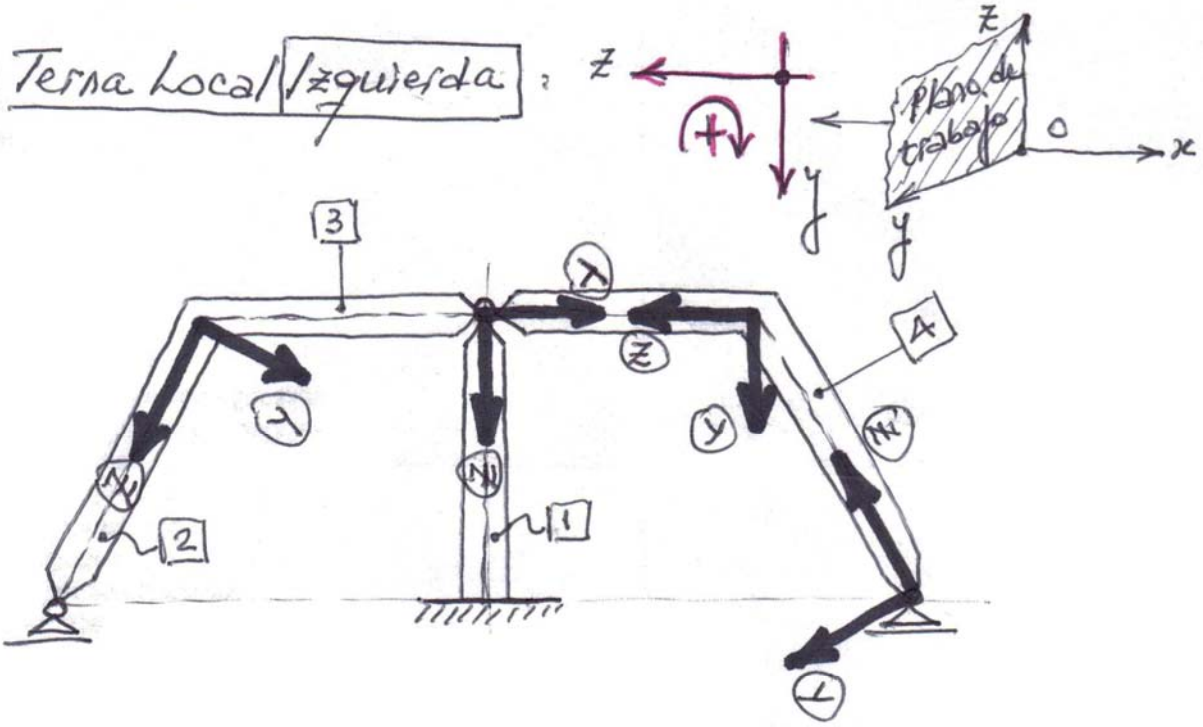


Nota: en principio, las ternas global, locales no tienen por qué ser del mismo tipo (izq./der.) pero todas las locales sí deben serlo (izq. o der.).

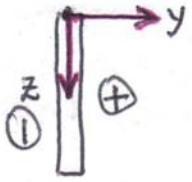
I.6.- Ternas Locales / Los 4 casos posibles

La disposición de una barra en la composición de una estructura admite que se la asocie con alguno de los 4 casos posibles que se muestran a continuación, tanto para terna izquierda como derecha:

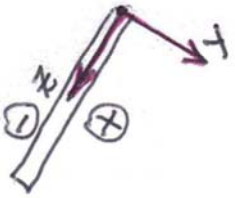
a) Terna Local Izquierda:



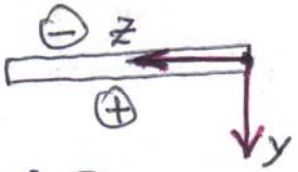
Caso 1: Barra Vertical



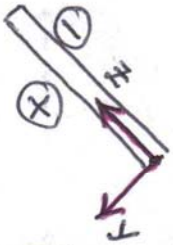
Caso 2: Barra oblícua



Caso 3: Barra horizontal



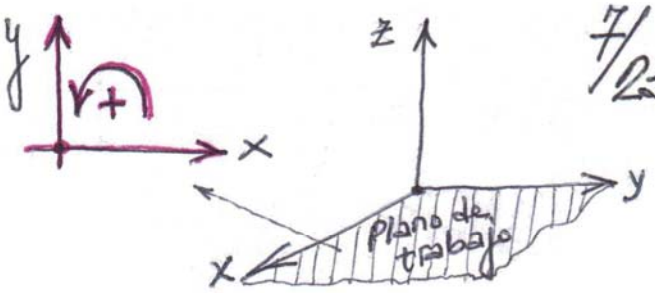
Caso 4: Barra oblícua

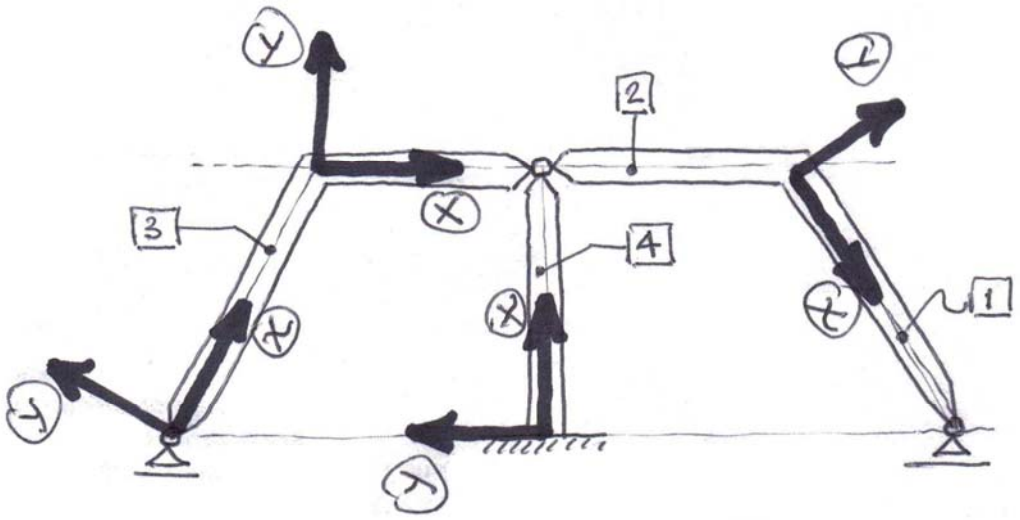


Nota: ver que del caso 1 al 4 se pasa mediante un giro continuo de la barra en el sentido horario ↻

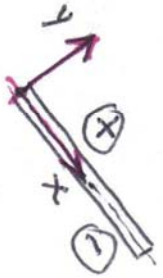
CG

b) Terna Local DERECHA :

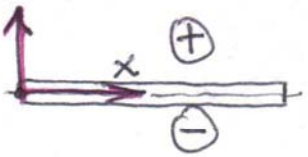




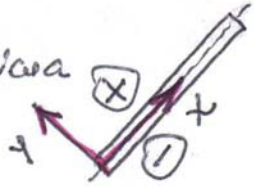
Caso 1 : barra oblicua



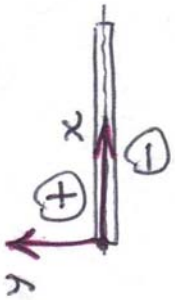
Caso 2 : barra horizontal



Caso 3 : barra oblicua



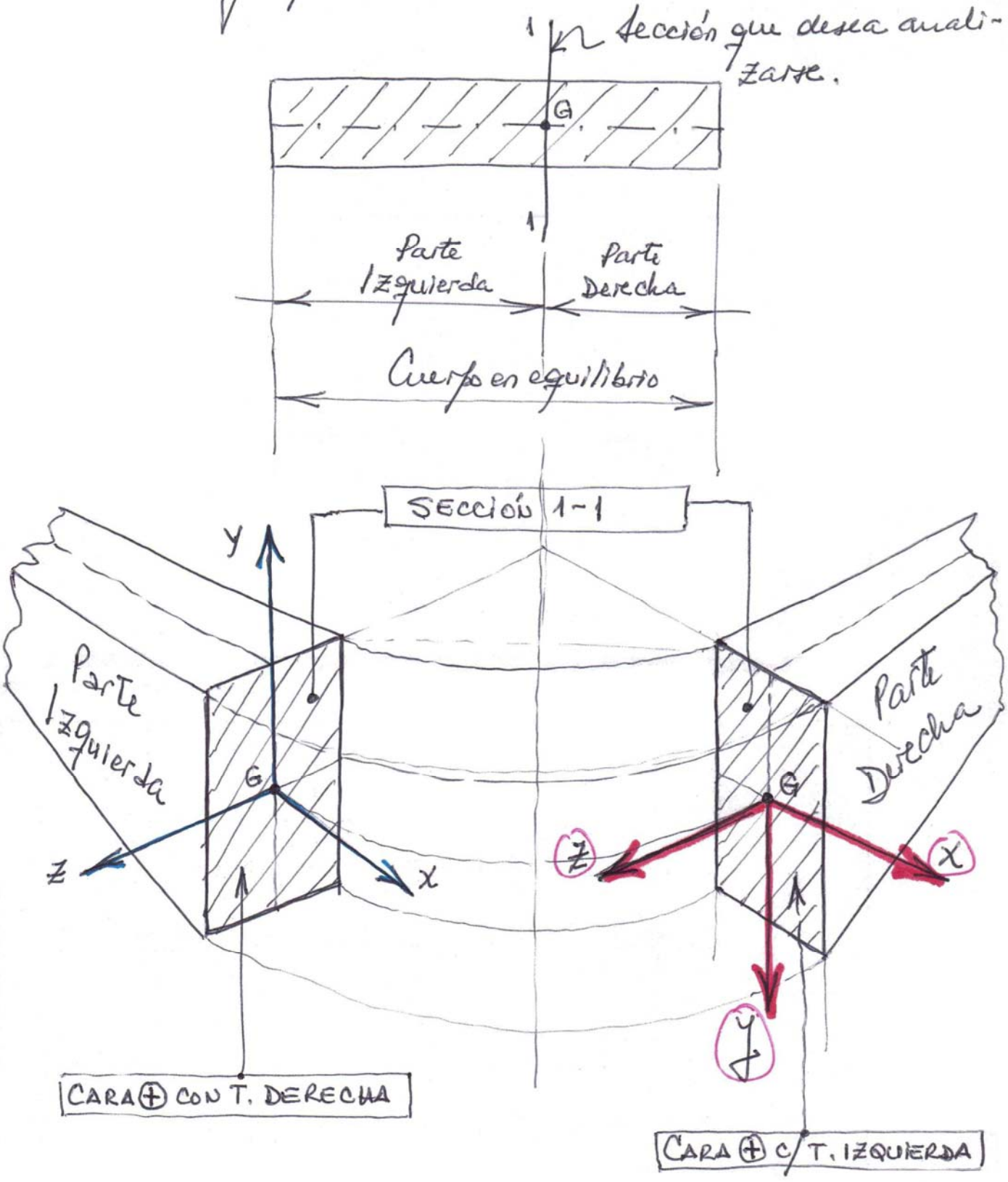
Caso 4 : barra vertical



Nota : se pasa del caso 1 al 4 mediante el giro continuo de la barra en el sentido antihorario r+

CG

I.7.- Caras Positivas : son aquellas que, de acuerdo con la terna local adoptada, nos dan el signo de los esfuerzos que van a graficarse :

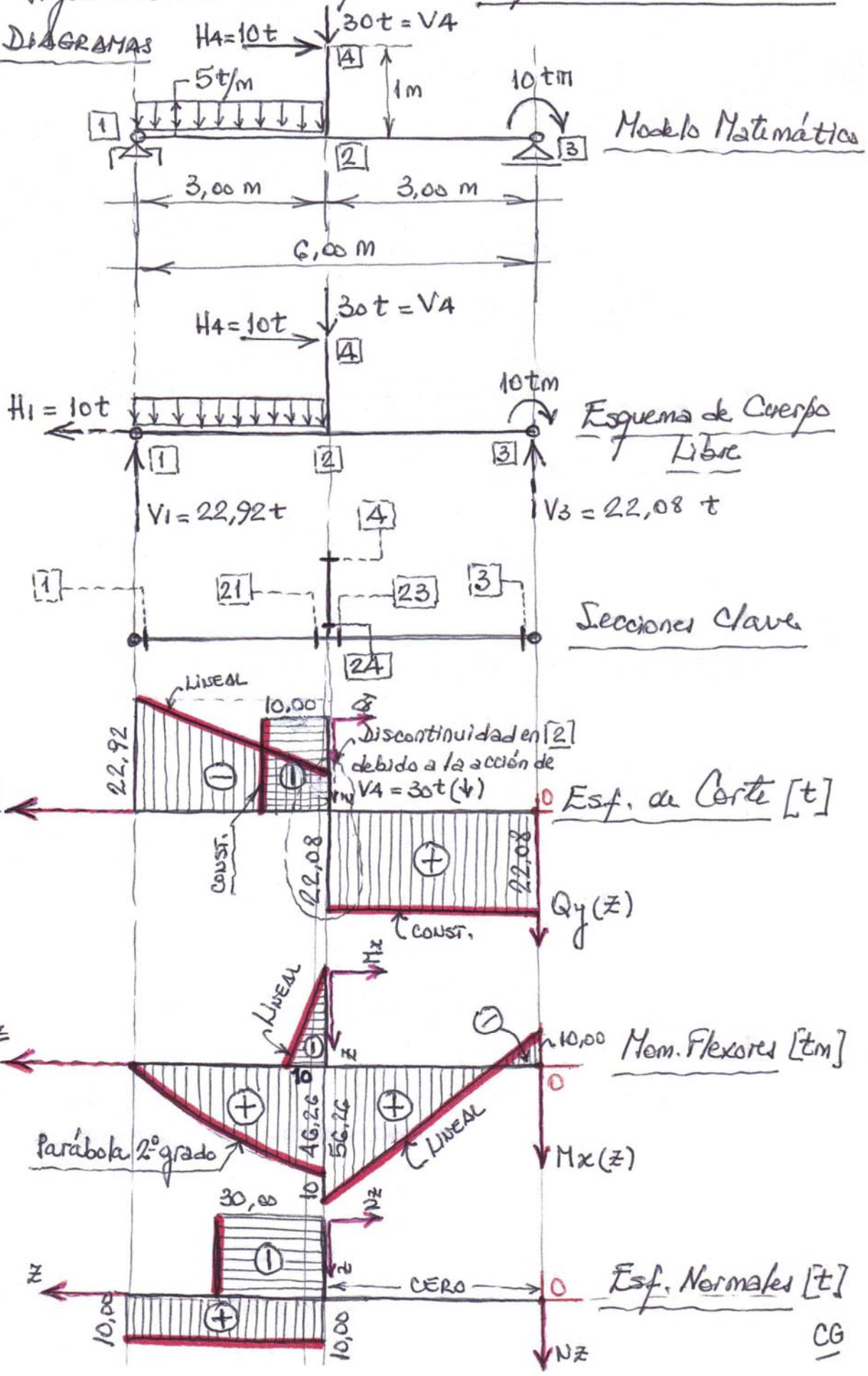


CG

(II).- Ejercicio de aplicación Nº 1

Trazar los Diagramas de Características de la siguiente estructura plana, empleando terna IZQUIERDA:

II.1.- DIAGRAMAS



A) Análisis Cualitativo en base a las Relaciones Diferenciales

La integración miembro a miembro de las relaciones diferenciales (la (3) (ó (4) a (6)) nos muestra que la función que figura en el primer miembro es de un grado superior a la que lo hace en el segundo:

- $\frac{dN_z(z)}{dz} = -q_z(z) \Rightarrow N_z(z) = -\int_{z_1}^{z_2} q_z(z)$
- $\frac{dQ_y(z)}{dz} = -q_y(z) \Rightarrow Q_y(z) = -\int_{z_1}^{z_2} q_y(z)$
- $\frac{dM_x(z)}{dz} = Q_y(z) \Rightarrow M_x(z) = \int_{z_1}^{z_2} Q_y(z)$

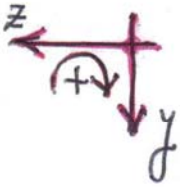
Por lo tanto, en nuestro caso, se tiene lo siguiente:

- Entre las secciones [1] y [21]:
  - a) $q_z(z) = 0 \Rightarrow N_z(z) =$ constante
  - b) $q_y(z) =$ const. $\Rightarrow Q_y(z) =$ función lineal
  - c) $Q_y(z) =$ f. lineal $\Rightarrow M_x(z) =$ f. parabólica de 2º grado
- Entre las secciones [23] y [3]:
  - a) $q_z(z) = 0 \Rightarrow N_z(z) =$ constante (cero en n/caso)
  - b) $q_y(z) = 0 \Rightarrow Q_y(z) =$ constante
  - c) $Q_y(z) =$ const. $\Rightarrow M_x(z) =$ f. lineal
- Entre las secciones [24] y [4]:
  - a) $q_z(z) = 0 \Rightarrow N_z(z) =$ cte.
  - b) $q_y(z) = 0 \Rightarrow Q_y(z) =$
  - c) $Q_y(z) =$ const. $\Rightarrow M_x(z) =$ f. lineal

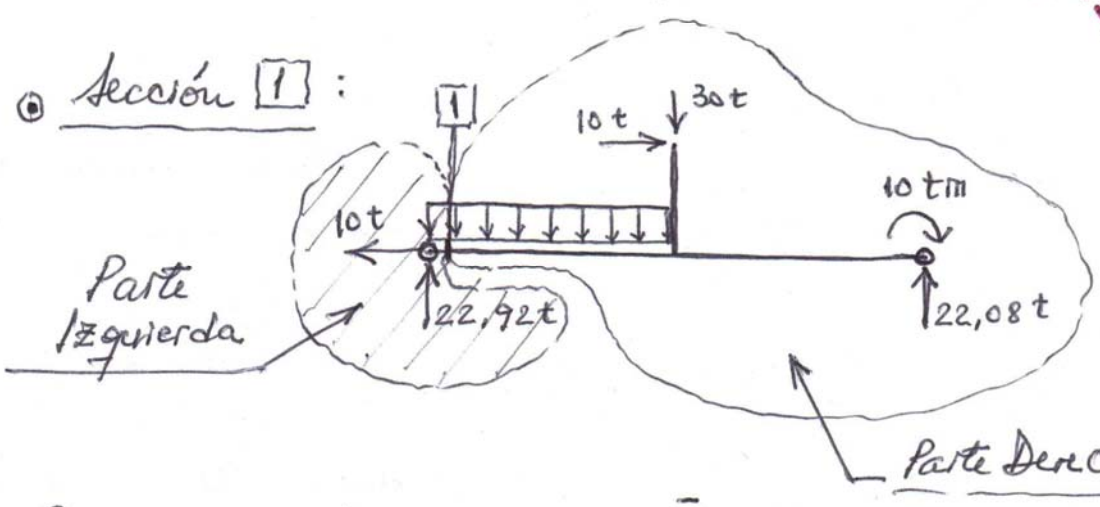
CG

B) Cálculo de los Esf. Caract. en c/sección clave

Terna local de ref. : Izquierda →



⊙ Sección 1 :



Por lo tanto : H_1 y V_1 componen $\bar{R}_i$, mientras que todo el resto de las fuerzas ($q \cdot 3\,m$, $H_4 = 10\,t$, $V_4 = 30\,t$, $M_3 = 10\,tm$ y $V_3 = 22{,}08\,t$) componen $\bar{R}_d = -\bar{R}_i$.

. Pregunta 1: ¿En qué consiste la mecánica del cálculo de los esf. caract. en cualquier sección?

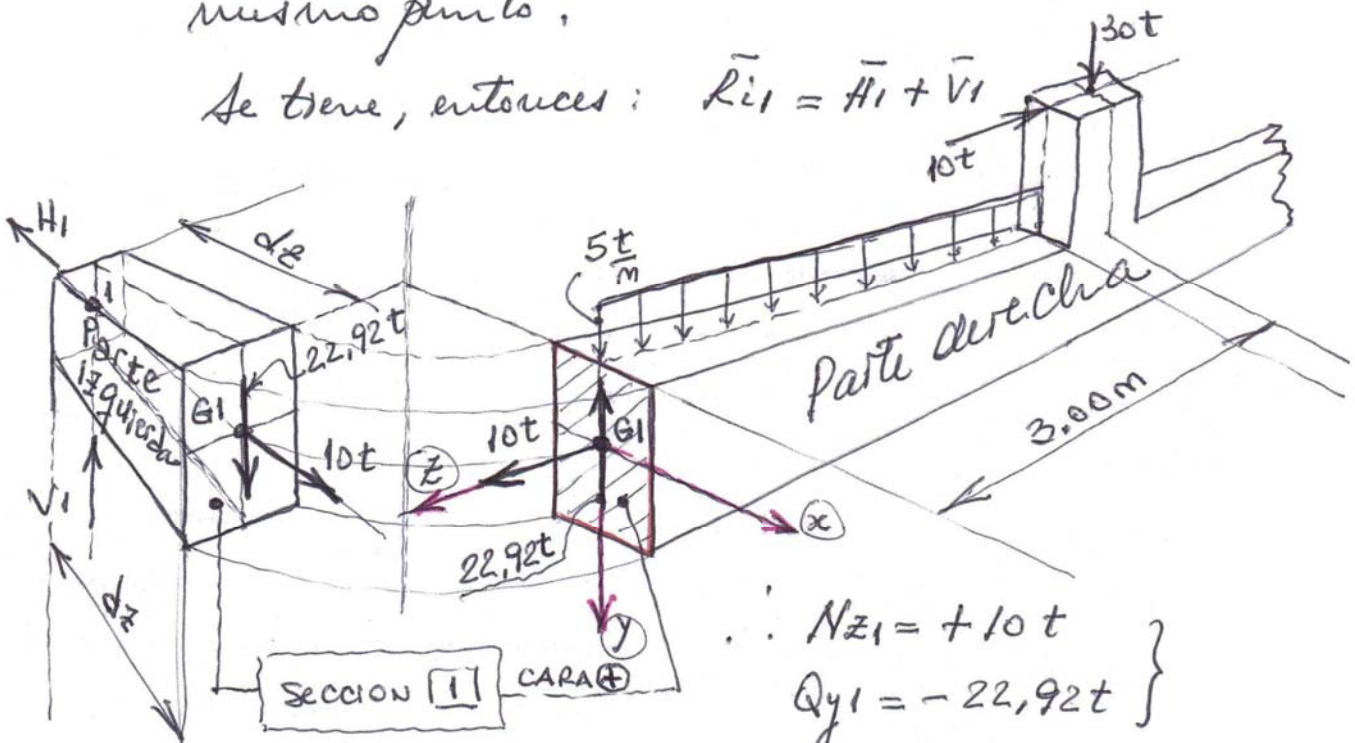
Rta.: en reducir al baricentro de la sección que se analiza las resultantes $\bar{R}_i$ (da el signo de las caract. c/terna Izq.) o $\bar{R}_d$.

. Pregunta 2: ¿Es necesario determinar $\bar{R}_i$ (o $\bar{R}_d$) previamente?

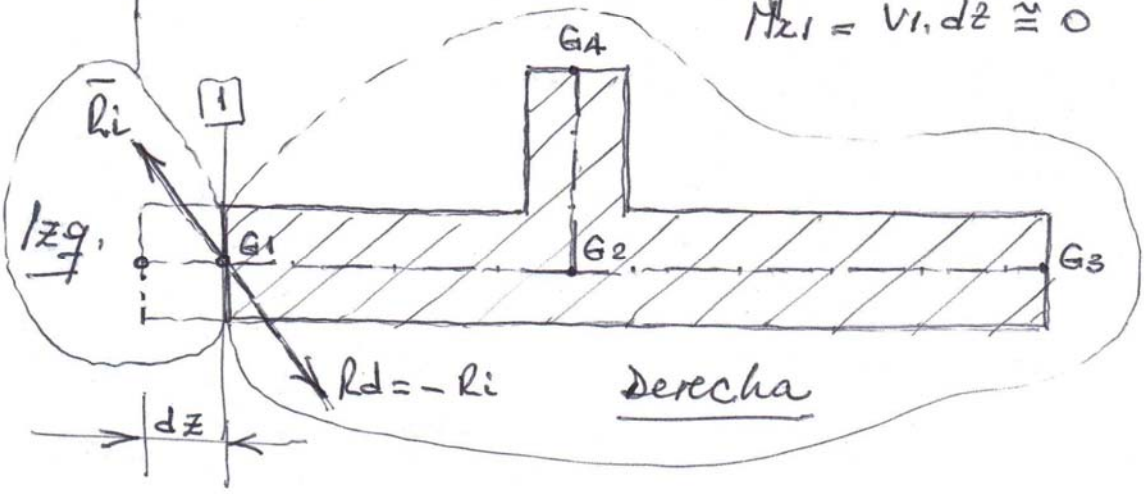
Rta.: NO, porque según vimos oportunamente, la proyección de la resultante de un sistema de fuerzas sobre un eje ("z" para hallar N_z o "y" para hallar Q_y) es igual a la suma de las proyecciones de las fuerzas componentes sobre el mismo eje y, además, el momento de la resultante de un sistema de fuerzas con respecto a un punto (el baricentro G de la sección, en este CG

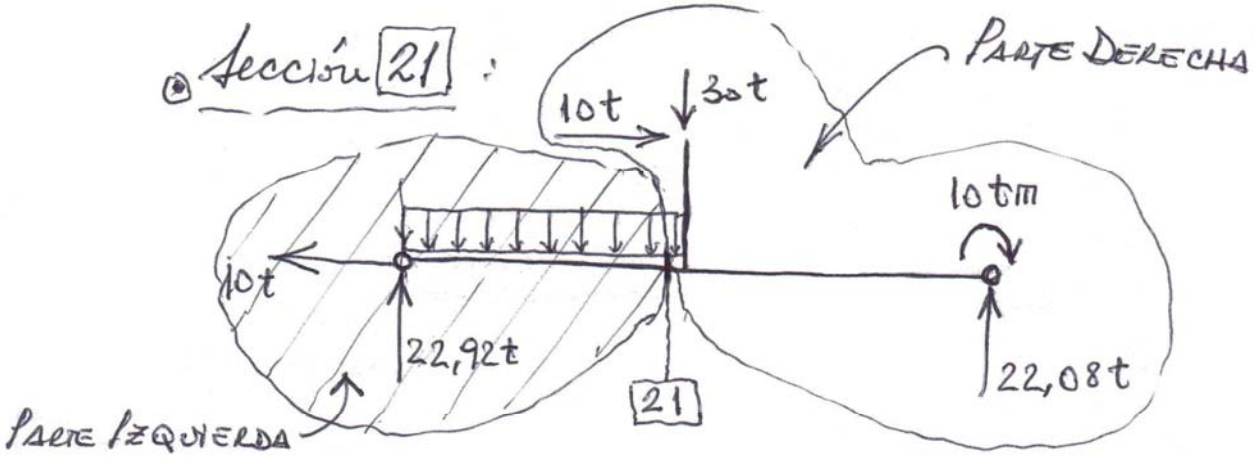
caso) es igual a la suma de los momentos de las fuerzas componentes con respecto al mismo punto.

Se tiene, entonces: $\bar{R}_{i1} = \bar{H}_1 + \bar{V}_1$



$$\therefore \begin{cases} N_{z1} = +10\,t \\ Q_{y1} = -22{,}92\,t \\ M_{z1} = V_1 \cdot dz \cong 0 \end{cases}$$

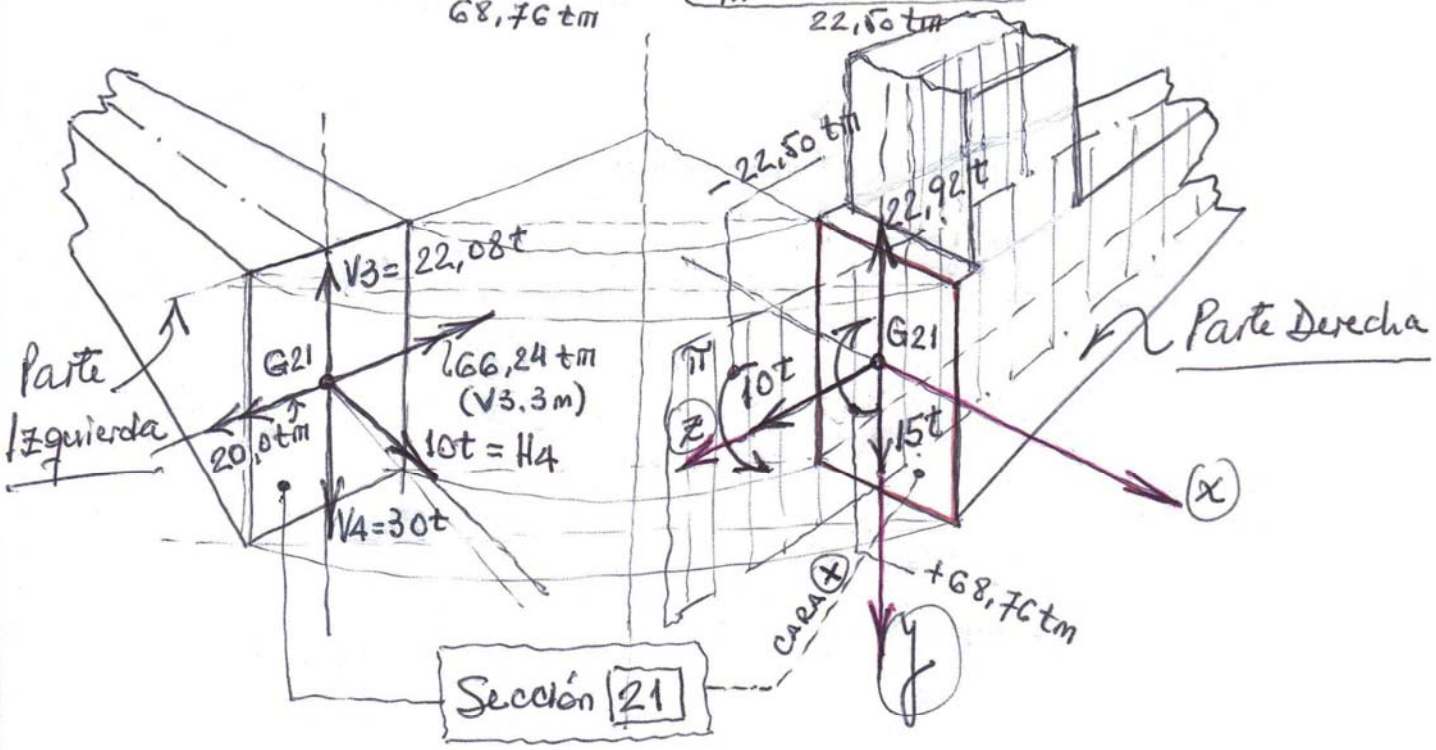


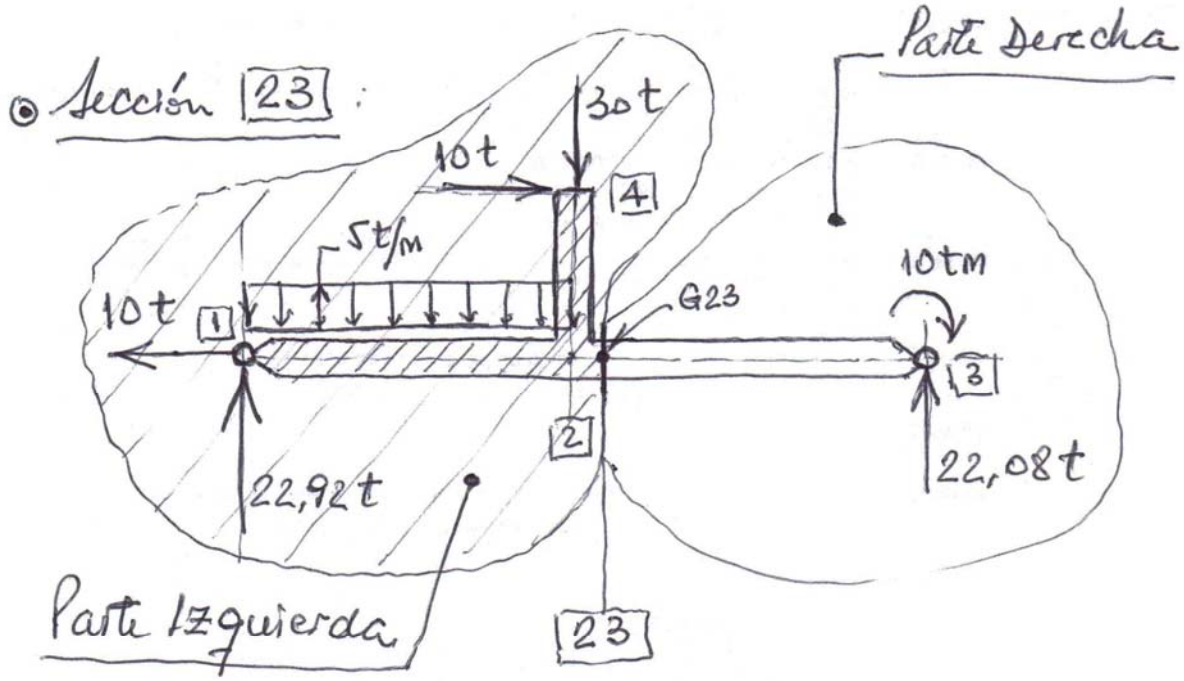


$$\therefore \begin{cases} \bar{R}_{i21} = \bar{H}_1 + \bar{V}_1 + \overline{9.3\,m} \\ \bar{R}_{d21} = \text{Composición de } \bar{H}_4, \bar{V}_4, \bar{V}_3 \text{ y } \bar{M}_3. \end{cases} \quad \text{Desde la Izq. } \underline{CG}$$

En consecuencia, al reducir las fuerzas que actúan sobre la parte izquierda al baricentro de la sección 21, se tiene:

Desde la IZQ. $\begin{cases} \cdot \Sigma P_z = N_{z_{21}} = +10\,t \\ \cdot \Sigma P_y = Q_{y_{21}} = -22{,}92\,t + \underbrace{5\frac{t}{m} \times 3\,m}_{15\,t} = -7{,}92\,t) \\ \cdot \Sigma M_x = \underbrace{22{,}92\,t \times 3\,m}_{68{,}76\,tm} - \underbrace{5\frac{t}{m} \times 3\,m \times 1{,}50\,m}_{22{,}50\,tm} = +46{,}26\,tm = M_{x_{21}} \end{cases}$





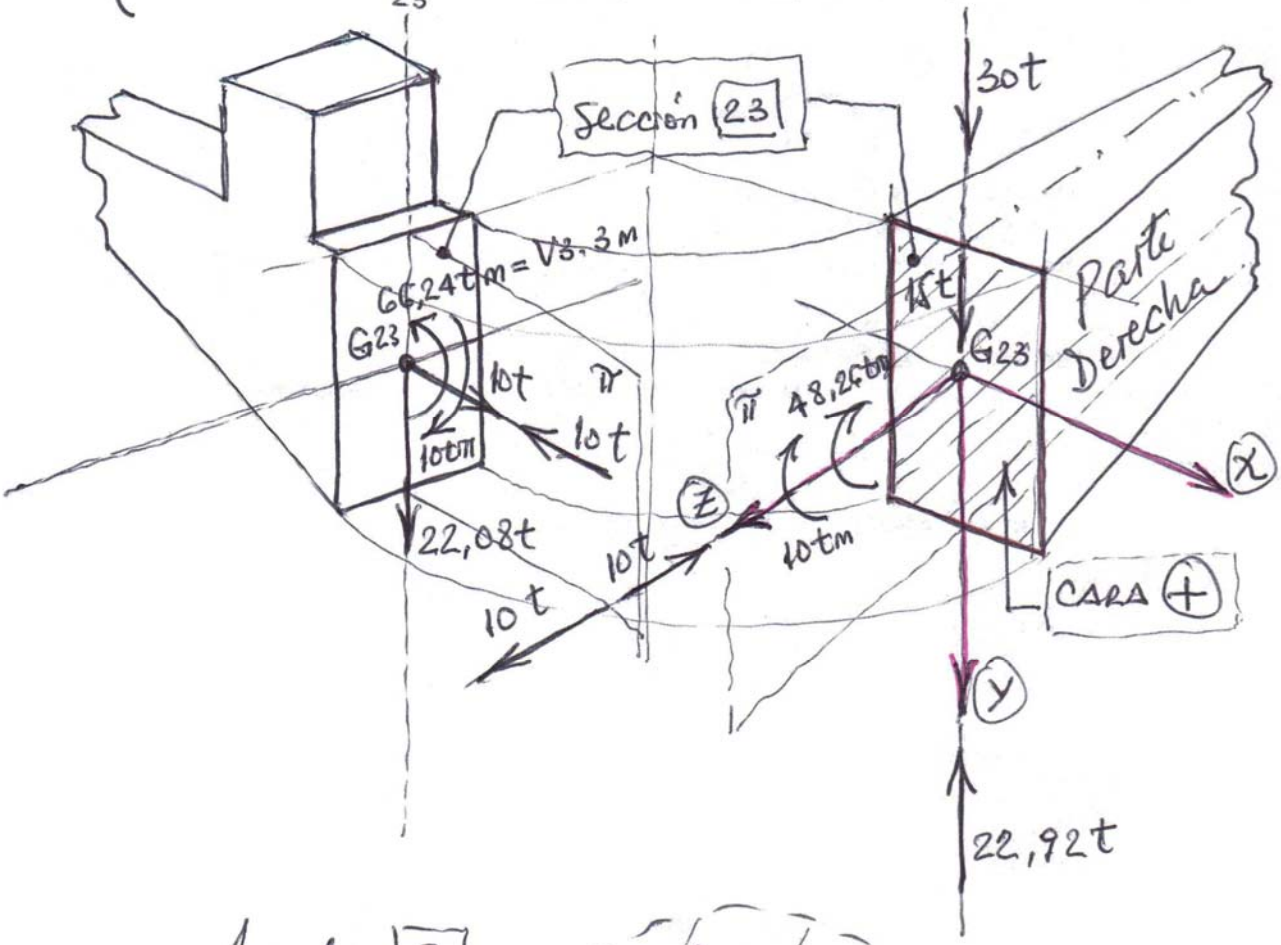
$\therefore \bar{R}_{i23} = \bar{H}_1 + \bar{V}_1 + \overline{q.3\,m} + \bar{H}_4 + \bar{V}_4$

$\bar{R}_{d23}$ = Composición de $\bar{V}_3$ y $\bar{M}_3$.

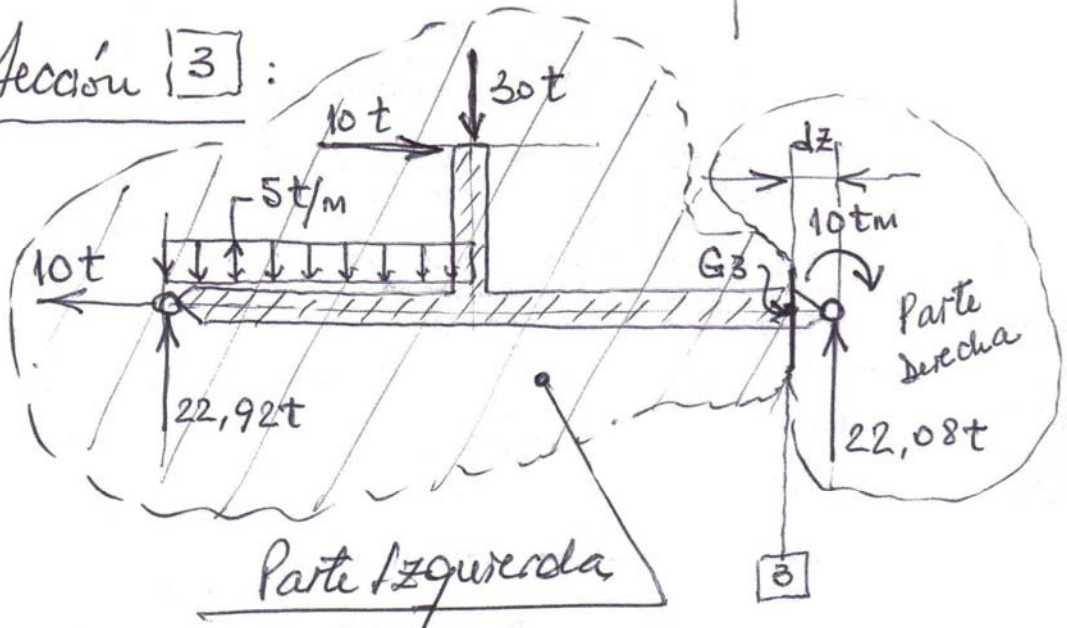
CG

En G23 se tiene:

Desde la IZQ. $\begin{cases} \cdot \Sigma P_z = N_{z_{23}} = 10t - 10t = 0 \\ \cdot \Sigma P_y = Q_{y_{23}} = (-22,92 + 5\times 3 + 30)t = +22,08\,t \\ \cdot \Sigma M_x = M_{x_{23}} = M_{x21} + 10t \times 1m = +56,26\,tm \end{cases}$



⊙ Sección 3:



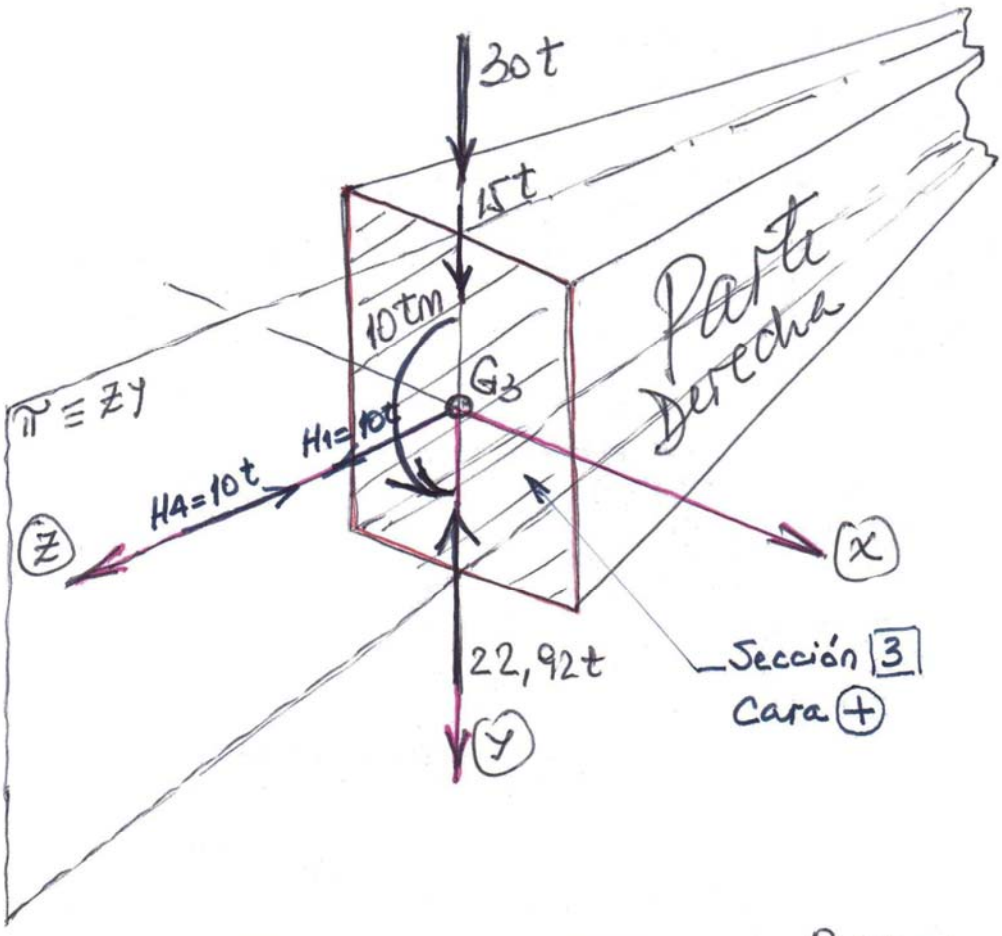
$\bar{R}_{i3} = \bar{H}_1 + \bar{V}_1 + \overline{q \cdot 3m} + \bar{H}_4 + \bar{V}_4$

$\bar{R}_{d3}$ = Composición de $\bar{V}_3$ y $\bar{M}_3$.

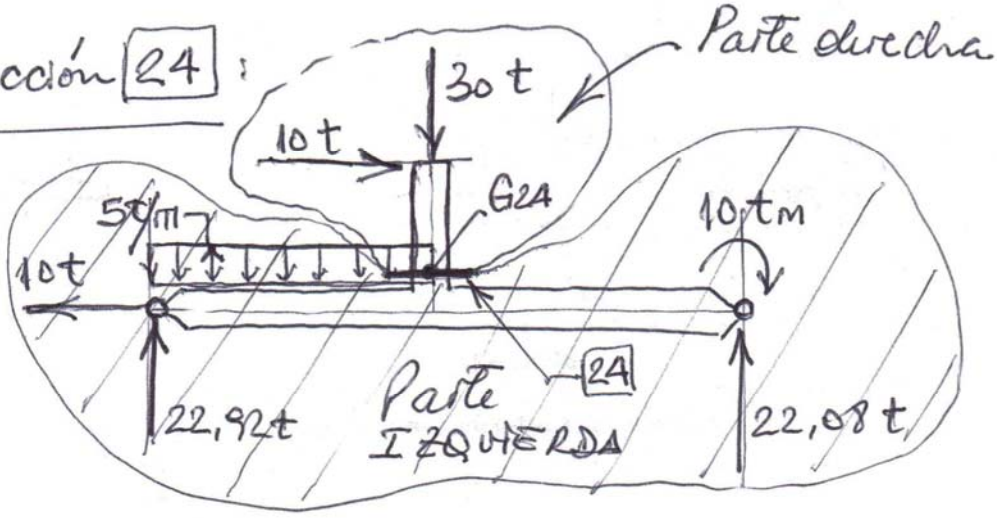
CG

En G3, se tiene:

- $\Sigma P_z = 10t - 10t = 0 = N_{z3}$
- $\Sigma P_y = Q_{y3} = (-22{,}92 + 5\times 3 + 30)t = 22{,}08\ t$
- $\Sigma M_x = M_{x3} = M_{x23} - Q_{y23}\cdot 3_m \cong -10\ tm$ (der.)



◎ Sección 24:



$\therefore \bar{R}_{i24} = (\bar{H}_1 + \bar{V}_1 + \bar{q}\cdot 3_m + \bar{V}_3)$ comp. con $\bar{M}_3$.

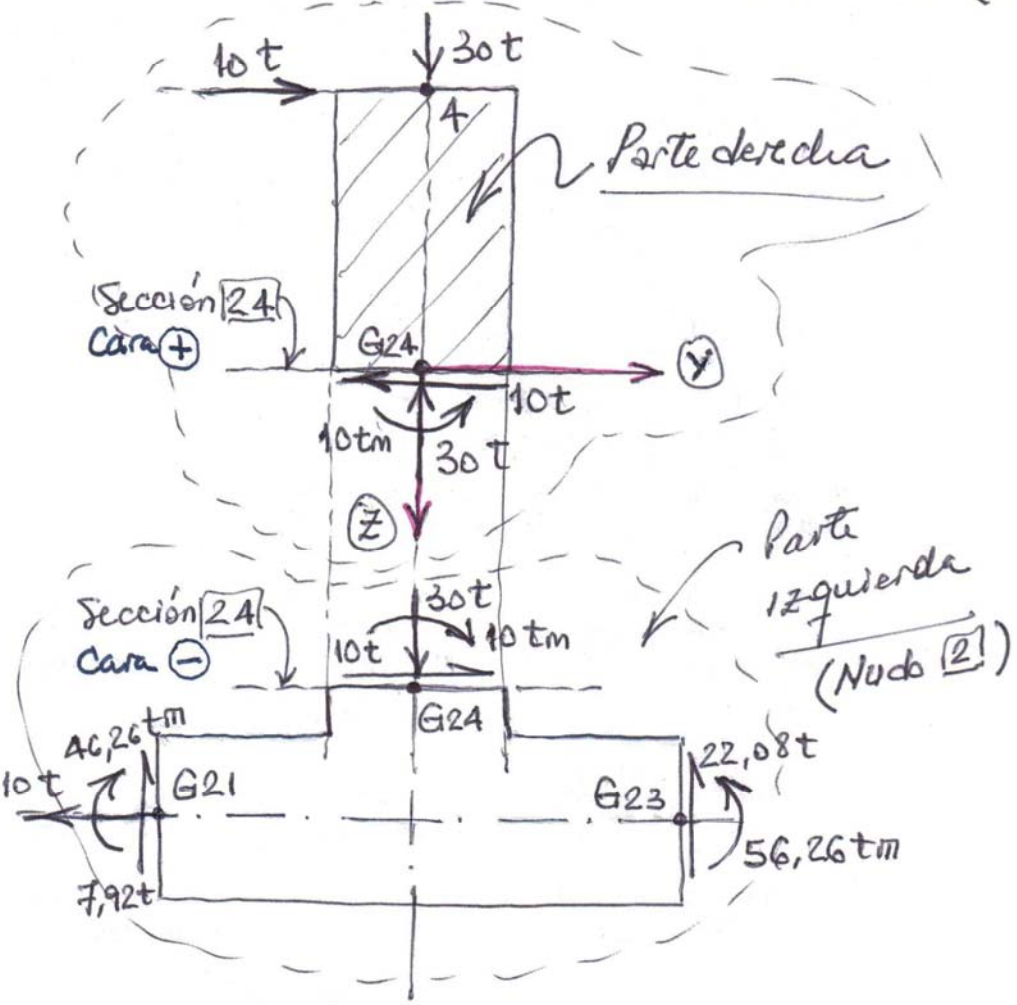
$\bar{R}_{d24} = \bar{H}_4 + \bar{V}_4$

CG

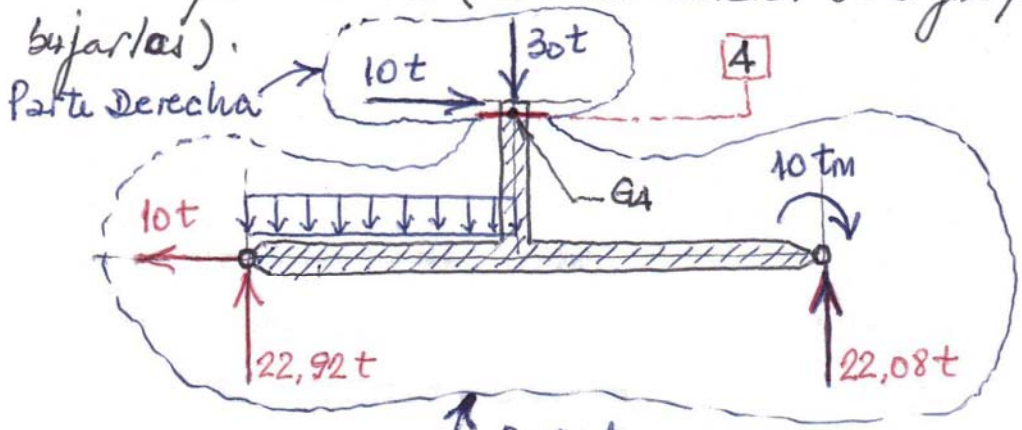
En G24 se tiene:

Desde la izq.

- $\Sigma P_z = N_{z24} = (-22{,}92\,t + 5\,\frac{t}{m} \times 3\,m - 22{,}08\,t = -30\,t$
- $\Sigma P_y = Q_{y24} = -H_1 = -10\,t$
- $\Sigma M_x = M_{x24} = 22{,}92\,t \times 3\,m - 5\,\frac{t}{m} \times 3\,m \times 1{,}5\,m + 10\,tm - 22{,}08\,t \times 3\,m = -9{,}98\,tm \simeq -10\,tm$ (der.)

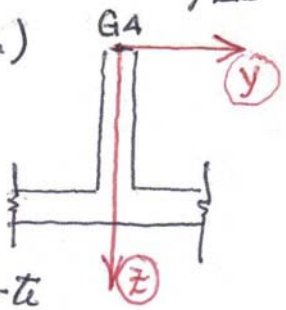


⊙ Sección 4: en este único caso, y para recordar cómo se procede, determinaremos los esfuerzos característicos a partir de Rd (deberemos cambiar su signo para dibujarlos).

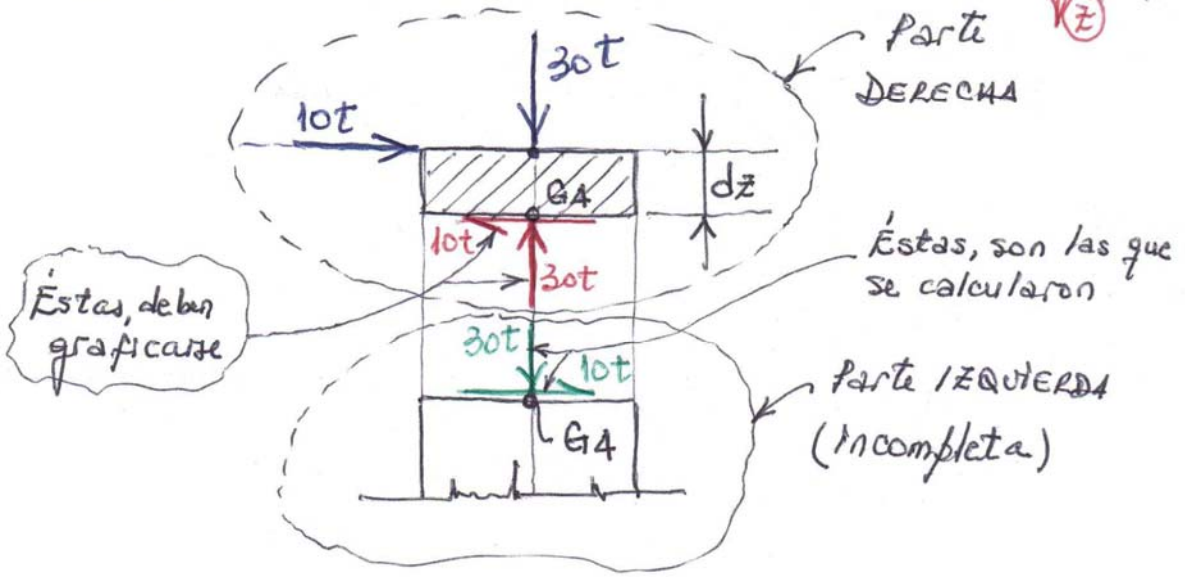


CG

∴ En G4 (izq.) se tiene:

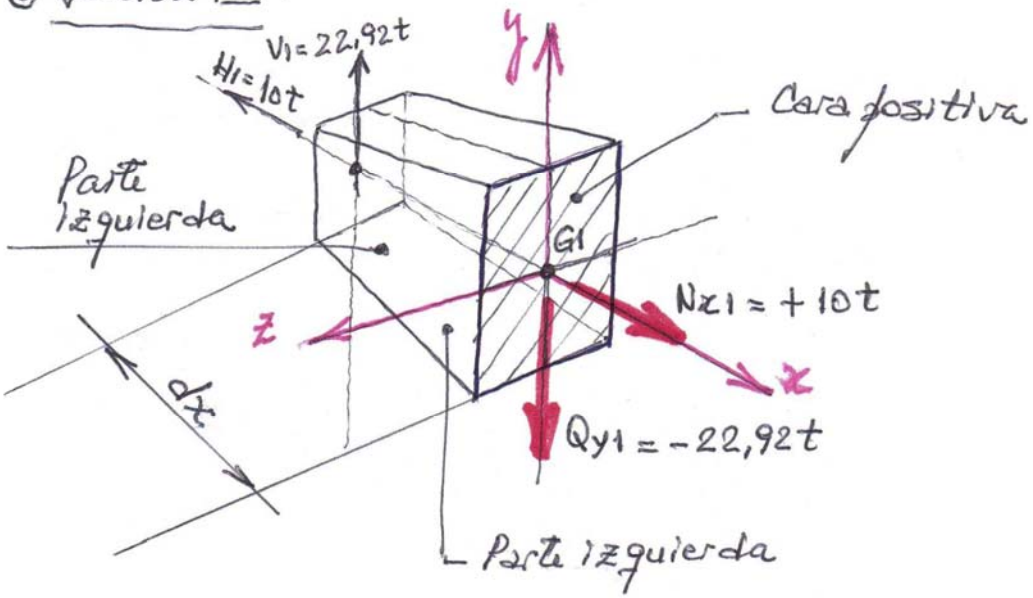


- $\Sigma P_z = -N_{z4} = 30t \Rightarrow N_{z4} = -30t$ (compr.)
- $\Sigma P_y = -Q_{y4} = 10t \Rightarrow Q_{y4} = -10t$
- $\Sigma M_x = -M_x^4 = H_4 \cdot dz \simeq 0$



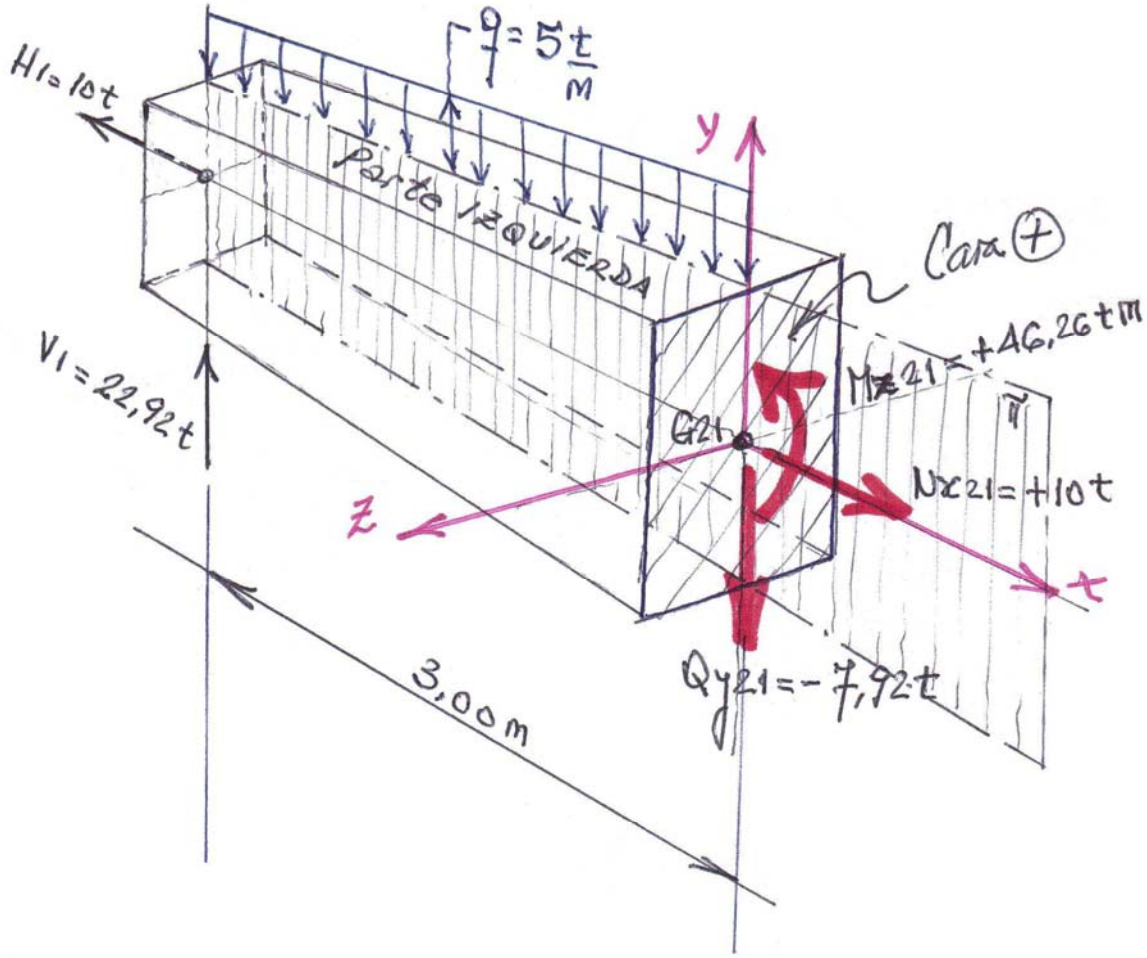
c) Veamos ahora, rápidamente, qué sucede si empleamos terna DERECHA (recordemos que el signo de los esfuerzos que deben graficarse son los que se obtienen descomponiendo la resultante derecha $\bar{R}_d$ en la dirección de los 3 ejes coordenados de referencia):

⊙ Sección [1]:

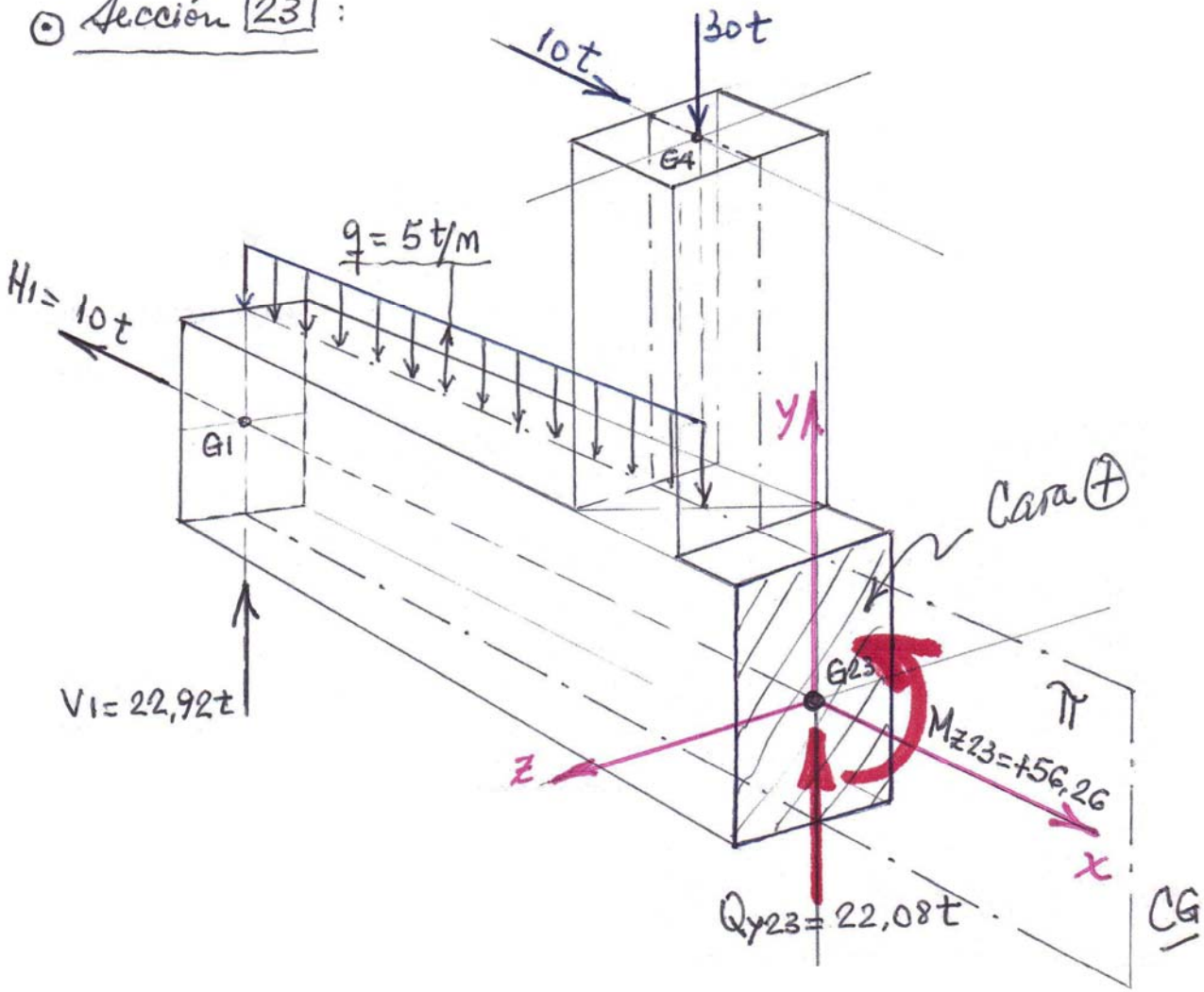


CG

⊙ Sección 21 :

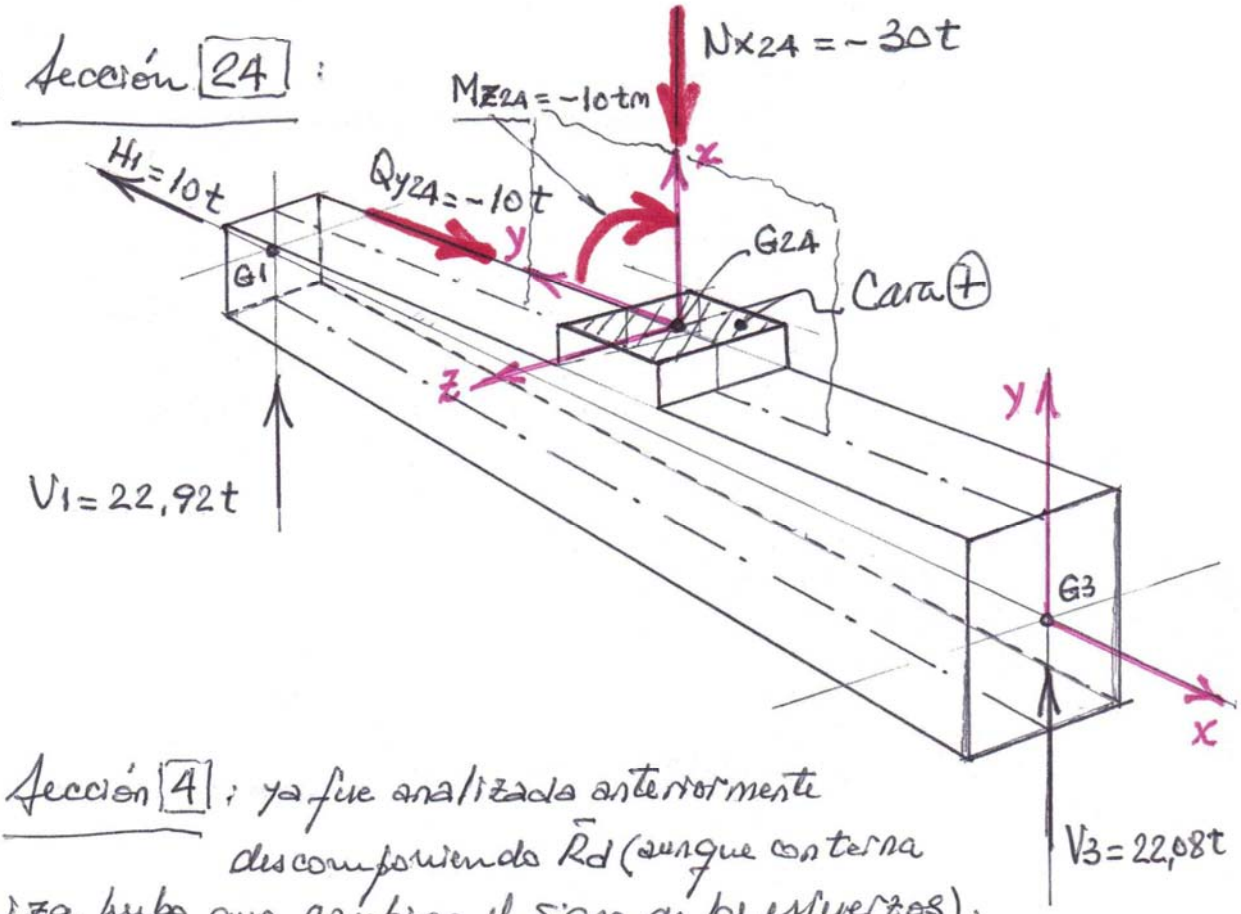


⊙ Sección 23 :



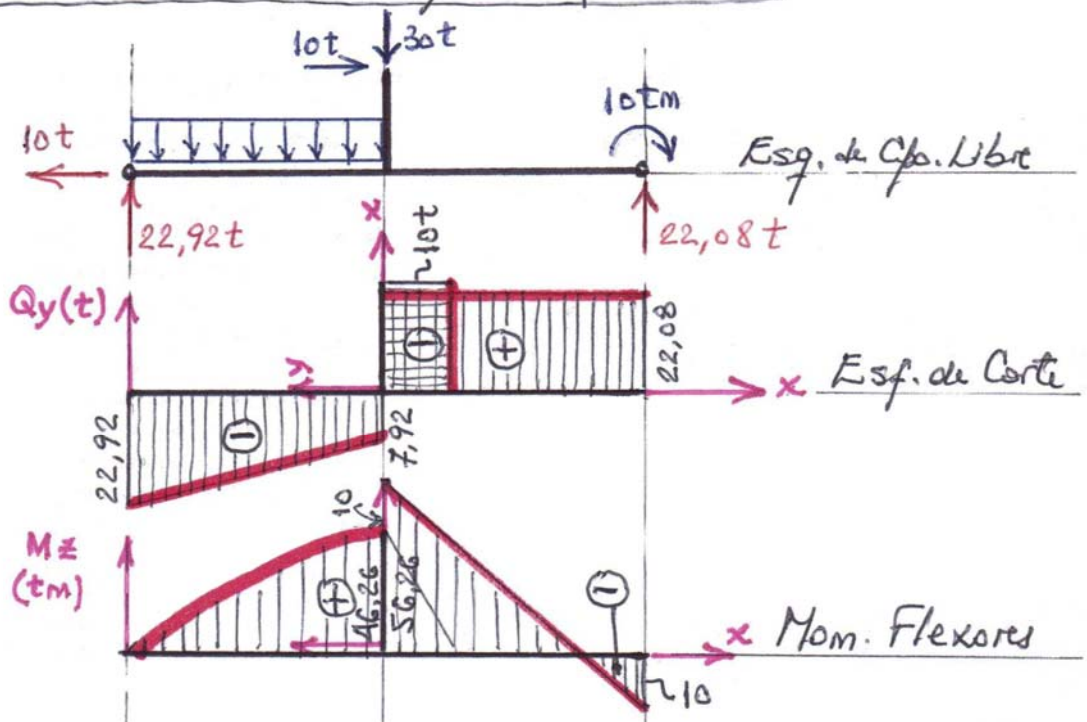
⊙ Sección [3] : es similar a la anterior, pero con $M_{Z3} = 0$.

⊙ Sección [24] :



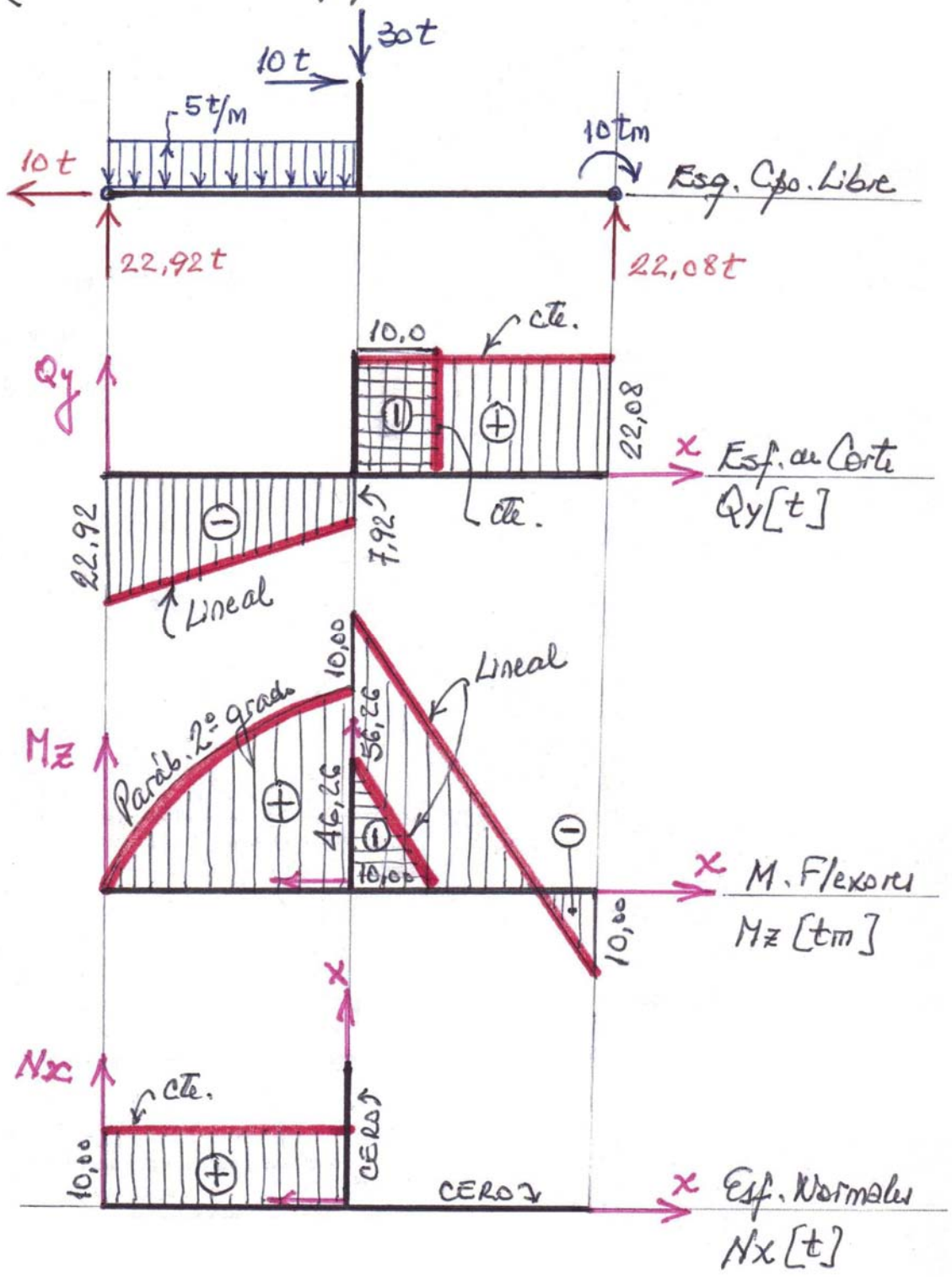
⊙ Sección [4] : ya fue analizada anteriormente descomponiendo $\bar{R}_d$ (aunque con terna izq. hubo que cambiar el signo de los esfuerzos).

⊙ Diagramas de Características / Terna DERECHA



⊙ Diagramas de Características / T. DERECHO

(A mano alzada y fuera de escala)



CG

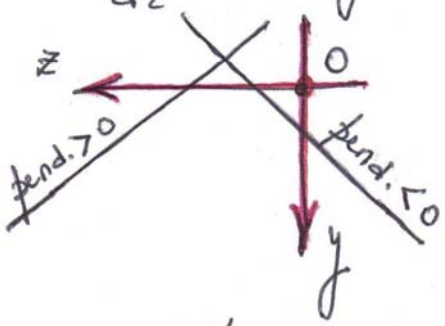
D) Algunas consideraciones finales

Haremos algunas consideraciones finales sobre el signo de las pendientes de las tangentes de los diagramas de Esf. de Corte y Mom. Flexores, así como acerca de la concavidad de este último cuando la función es parabólica (aunque, formalmente, está relacionado íntimamente con el primer tema).

Lo haremos para el caso de terna IZQUIERDA, analizando los diagramas de Q_y y M_x de la barra 1-2 :

Debemos recordar que : $\frac{dQ_y(z)}{dz} = -q_y(z)$ (2)

$\frac{dM_x(z)}{dz} = Q_y(z)$ (3)



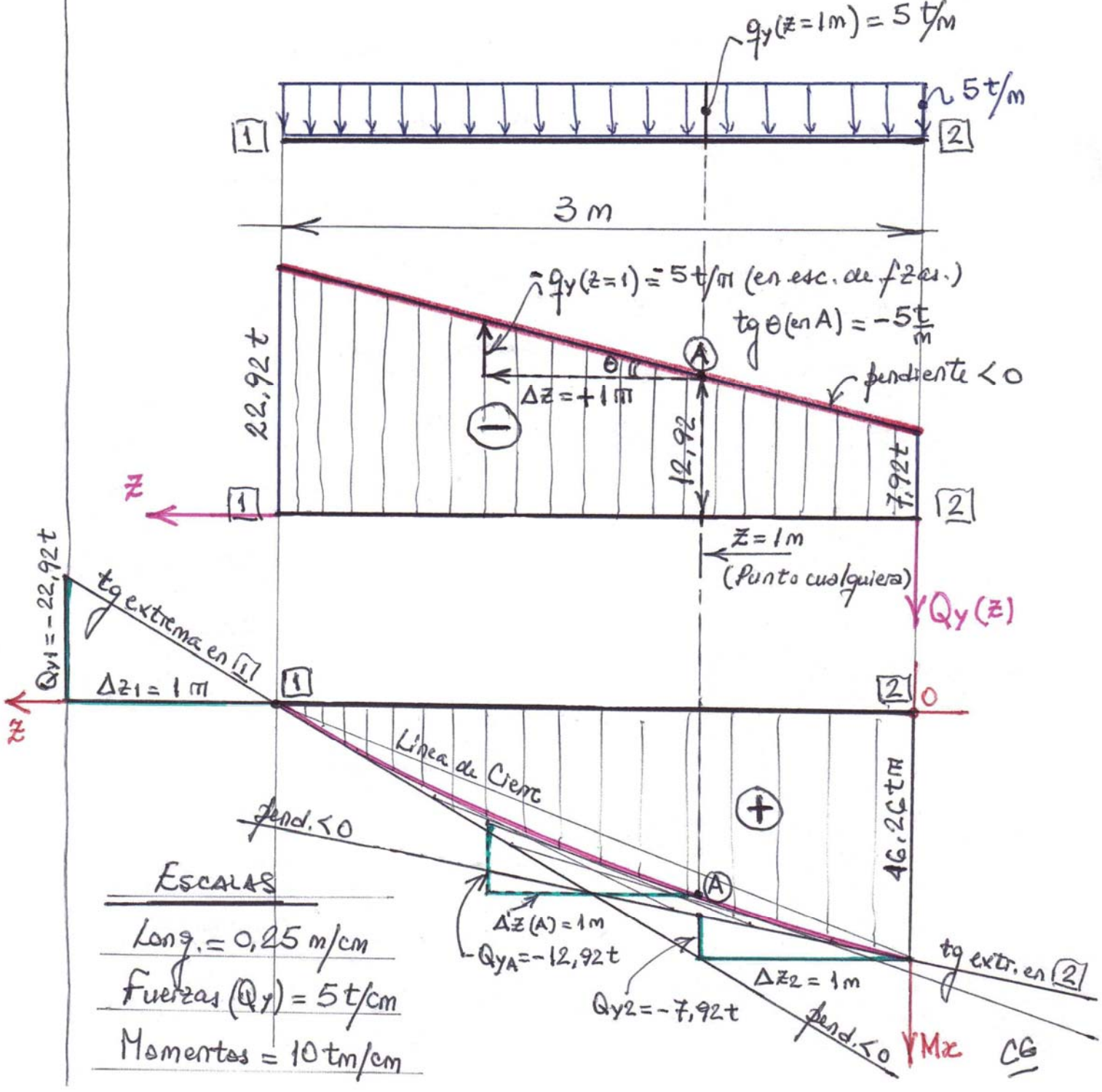
La expresión (2) nos dice que la pendiente de la recta tangente a la función Q_y en cualquier punto (postcordado mediante la abscisa "z") viene dada por la ordenada de carga "q_y" (que corresponde a ese mismo punto) cambiada de signo.

Del mismo modo, la (3) nos dice que la pendiente de la recta tg a la función M_x en un punto cualquiera viene dada por el valor del esfuerzo de corte en ese mismo punto.

CG

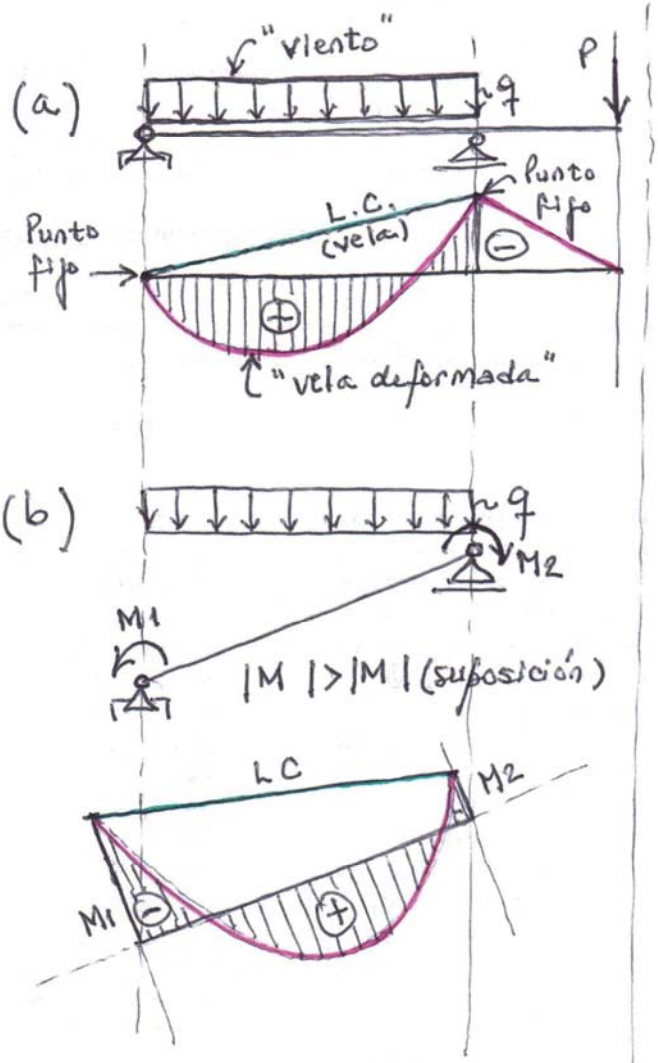
En el primer caso, "q_y" debe medirse en la escala de fuerzas empleada para dibujar los esfuerzos de corte; en el segundo, "Q_y" debe medirse en la escala adoptada para el diagrama de momentos flexores.

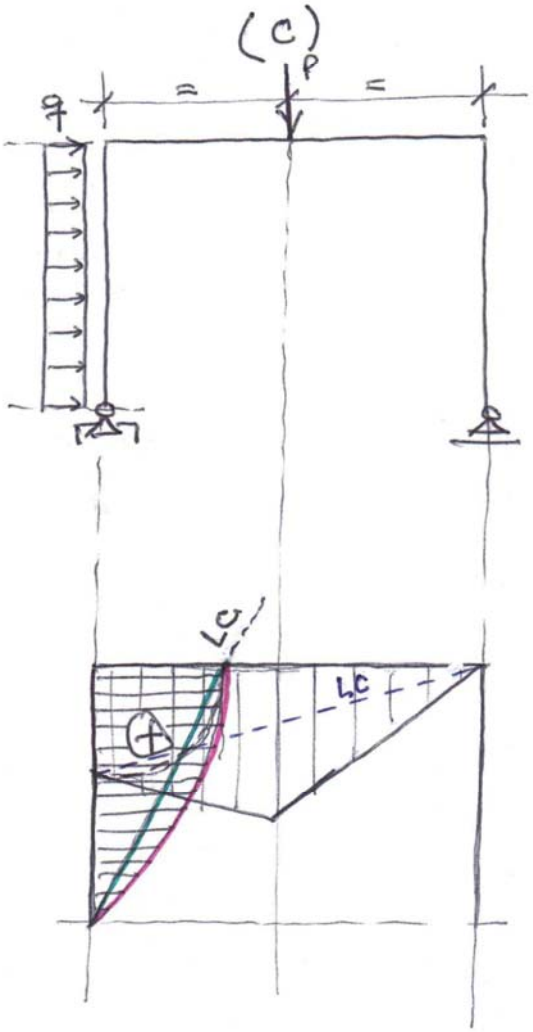
En resumen, los diagramas de "$q_{y(z)}$", "$Q_{y(z)}$" y "$M_{x(z)}$" están íntimamente relacionados:



Por último, podemos dar la siguiente regla práctica para verificar si la concavidad de la curva representativa del diagrama de momentos flexores (cargas distribuidas) es correcta:

"Si se supone que la <u>línea de cierre</u> del diagrama de momentos es la <u>vela</u> de una embarcación y que la <u>carga distribuida</u> representa la <u>acción del viento</u>, la concavidad correspondiente a la deformación de la vela coincidirá con la del diagrama de momentos flexores".





CG

X