

Algoritmia y Programación

Primitivas de secuencia

Números de Fibonacci

La **sucesión de Fibonacci** es la siguiente sucesión infinita de números naturales: 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 ...

La sucesión comienza con los números 0 y 1, y a partir de estos, cada término es la suma de los dos anteriores. Es la relación de recurrencia que la define.

A los elementos de esta sucesión se les llama **números de Fibonacci**. Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como **Fibonacci**. Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemática y teoría de juegos. También aparece en configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, los alcauciles y girasoles, en las inflorescencias del brécol romanesco, en la configuración de las piñas de las coníferas, en la reproducción de los conejos y en cómo el ADN codifica el crecimiento de formas orgánicas complejas. De igual manera, se encuentra en la estructura espiral del caparazón de algunos moluscos, como el nautilus.

Los matemáticos han estado fascinados por los números de Fibonacci desde hace tiempo. Hay una conexión fundamental con el número de oro φ . Usando la propiedad básica de que

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

puede probarse que el n -ésimo número de Fibonacci F_n es *exactamente* igual a

$$\frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

Observando los valores que adoptan los dos sumandos de la fórmula, se comprueba que el segundo sumando siempre tiene un valor absoluto menor que 1, y va cambiando de signo sucesivamente, compensando la parte no entera, irracional, que tiene el primer sumando, para que la suma de dos números irracionales dé un número natural.

Teniendo en cuenta entonces que ese segundo sumando de la fórmula es siempre un número de valor absoluto menor que 0.5 (el máximo valor absoluto es para $n=0$, aproximadamente 0.4472), la fórmula puede escribirse, eliminando el segundo sumando, como

$$F_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

que equivale a

$$F_n = \text{int} \left(\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right)$$

Propiedades de la sucesión

La razón o cociente entre un término y el inmediatamente anterior varía continuamente, pero se estabiliza en el número áureo o de oro. Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

Este límite no es privativo de la Sucesión de Fibonacci. Cualquier sucesión recurrente de orden 2, como la sucesión 3, 4, 7, 11, 18,..., lleva al mismo límite. Los cocientes son oscilantes; es decir, que un cociente es menor al límite y el siguiente es mayor. Los cocientes pueden ordenarse en dos sucesiones que se aproximan asintóticamente por exceso y por defecto al valor límite.

Cualquier número natural se puede escribir mediante la suma de un número limitado de términos de la sucesión de Fibonacci, cada uno de ellos distinto a los demás. Por ejemplo, $17 = 13 + 3 + 1$, $65 = 55 + 8 + 2$.

Tan solo un término de cada tres es par, uno de cada cuatro es múltiplo de 3, uno de cada cinco es múltiplo de 5, etc. Esto se puede generalizar, de forma que la sucesión de Fibonacci es periódica en las congruencias módulo m , para cualquier m .

Cada número de Fibonacci es el promedio del término que se encuentra dos posiciones antes y el término que se encuentra una posición después. Es decir

$$F_n = \frac{F_{n-2} + F_{n+1}}{2}$$

El número de oro

Este número era conocido en la Grecia antigua, con relación a los pentágonos regulares y el dodecaedro en la geometría euclidiana.

Con seis cifras decimales es $\varphi = 1,618034$

Y con 100 es $\varphi = 1,6180339887498948482045868343656381177203091798057628\ 621354486227052604628189024497072\ 072041893911375$

Una característica distintiva de φ aparece si calculamos su inverso $1/\varphi$

De nuevo, con seis cifras decimales $1/\varphi = 0,618034$

Esto sugiere que $\varphi = 1 + 1/\varphi$

Esta relación puede escribirse como una ecuación cuadrática $\varphi^2 = \varphi + 1$, o en la forma estándar $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$

El álgebra de las ecuaciones cuadráticas muestra que esta ecuación tiene dos soluciones:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Numéricamente, estas son 1,618034 y -0,618034. Tomamos la solución positiva como la definición de φ . De modo que

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

y de hecho, es el caso en que $\varphi = 1 + 1/\varphi$, exactamente.

Problema

Desarrollar un programa que solicite al usuario un número entero, e informe el valor del término correspondiente a esa posición de la sucesión de Fibonacci.

Para comprobar que el programa resuelve el problema correctamente, usarlo para obtener el valor de un término, del siguiente y el de dos posiciones antes y verificar que se cumpla la fórmula que los relaciona.