Algoritmia y Programación

Funciones

Los números naturales y sus divisores

Número perfecto: todo número natural que es igual a la suma de sus divisores propios (es decir, todos sus divisores excepto el propio número). Por ejemplo, 6 es un número perfecto ya que sus divisores propios son 1, 2, y 3 y se cumple que $1+2+3=6$. Los números 28, 496 y 8128 también son perfectos.

Número abundante: todo número natural que cumple que la suma de sus divisores propios es mayor que el propio número. Por ejemplo, 12 es abundante ya que sus divisores son 1, 2, 3, 4 y 6 y se cumple que $1+2+3+4+6=16$, que es mayor que el propio 12.

Número deficiente: todo número natural que cumple que la suma de sus divisores propios es menor que el propio número. Por ejemplo, 16 es un número deficiente ya que sus divisores propios son 1, 2, 4 y 8 y se cumple que $1+2+4+8=15$, que es menor que 16.

Número ambicioso: si puede llegar a ser perfecto de la siguiente forma: dado el número se toma la suma de sus divisores, con este nuevo número se vuelve a considerar la suma de sus divisores, y se continúa así, de forma que el número es ambicioso si llega un momento que se alcanza un número perfecto, como en el caso del número 95, cuyos divisores suman $1 + 5 + 19 = 25$, y los divisores de este suman $1 + 5 = 6$, que es perfecto.

Números amigos: parejas de números que cumplen que la suma de los divisores propios de cada uno de ellos da como resultado el otro número. Por ejemplo, 220 y 284 son números amigos.

Números sociables: cumplen lo mismo que los números amigos, pero en vez de ir en parejas van en grupos más grandes. La suma de los divisores del primer número da el segundo, la suma de los del segundo da el tercero, y así sucesivamente. La suma de los divisores del último da el primer número de la lista. Por ejemplo, los números 12496, 14288, 15472, 14536 y 14264 son números sociables.

Sucesiones alícuotas

Sea $\text{SumaDP}(n)$ una función que devuelve la suma de divisores propios de un número natural n (los divisores menores o iguales a su mitad entera, incluyendo a la unidad, que pueden encontrarse de a pares, cada vez que se encuentra uno menor a la parte entera de la raíz cuadrada de n : si $n\%d==0$, entonces d y $n//d$ son divisores de n); para el caso del posible divisor igual a la parte entera de la raíz cuadrada del número (tope), pueden suceder tres cosas: que no divida a n , que lo divida pero, si n no es un cuadrado, resulte que tope y $N//\text{tope}$ sean dos divisores distintos, o, si el número es un cuadrado, que tope sea un divisor singular ($\text{número}\%\text{tope}==0$ and $\text{número}\%(\text{número}//\text{tope})==0$).

Se denomina sucesión alícuota con origen n a la sucesión de naturales tales que $t_0=n$ y $t_i=\text{SumaDP}(t_{i-1})$ para $i=1, 2, \dots$. Es decir que cada término, excepto el origen, es la suma de divisores propios del término anterior.

Las sucesiones alícuotas pueden tener un término que sea un número perfecto, en cuyo caso los siguientes serían siempre el mismo número perfecto (sucesión periódica); pueden tener un término amigo del anterior, en cuyo caso comienza entra en un período de repeticiones de dos términos; pueden tener un término que sea un número primo, en cuyo caso el siguiente término sería la unidad y el último de la sucesión; pueden alcanzar un término igual al origen, en cuyo caso, la sucesión es cíclica y según la cantidad de números no repetidos del ciclo, el origen puede ser un número perfecto (1 término), amigo de otro (2 términos) o sociable (más de 2 términos); y se conocen casos en los que casi todos los términos son abundantes (la mayoría de los términos son crecientes y la sucesión presuntamente infinita).

Desarrollar un programa que solicite al usuario números dos números naturales, el primero mayor a 1 y el segundo mayor que el primero, y que para cada número natural desde el primero hasta el segundo, incluyéndolos, imprima su sucesión alícuota o parte de ella en una misma línea y, según el último término calculado de la sucesión, imprima al final de la misma línea si el origen de la sucesión es un número perfecto, ambicioso o primo, si la sucesión es de amigos

o socios, si el penúltimo término de la sucesión es primo o si la mayoría de sus términos son presumiblemente abundantes.

Tener en cuenta que el ciclo más grande conocido de números socios es de 28 números, por lo que, si no se llega a un término igual al origen o al anterior o a la unidad luego de calcular, por ejemplo, 30 términos, se podría asumir que la sucesión podría escalar a términos cada vez mayores.

Para la solución del problema se puede considerar la definición de una función que, dado un número entero positivo mayor que 1, devuelva la suma de sus divisores propios, y que se puede utilizar para calcular cada término de una sucesión alícuota, así como de otra función que, dado un número entero positivo mayor que uno provisto por el usuario, muestre su sucesión alícuota hasta que se repita un término (el origen o el anterior), hasta que llegue a 1, o con un máximo de 30 términos. No se deben usar estructuras de datos o recursos de Python que no se hayan visto todavía.

Para la función que devuelva los divisores propios de un entero positivo mayor que 1, debe tenerse en cuenta el corolario del teorema fundamental de la aritmética (o teorema de factorización única), que establece que, si un número entero no tiene un divisor entero mayor que 1 y menor o igual a su raíz cuadrada, entonces el número es primo. Por lo tanto, la búsqueda de divisores propios de un entero positivo mayor que 1, que siempre incluye a la unidad, puede limitarse hasta el mayor entero menor o igual a su raíz cuadrada, y cada vez que se encuentre un divisor d_1 tal que $n \% d_1 == 0$, tanto d_1 como $d_2 = n // d_1$ son dos divisores propios distintos, salvo que d_1 sea exactamente igual a la raíz cuadrada de n (en cuyo caso $d_1 == d_2$).

Para casos de análisis y prueba se puede desarrollar sucesiones alícuotas de:

1. 95 25 6 6 el primero es ambicioso
2. 220 284 220 el primero y el segundo son amigos
3. 496 496 el primero es perfecto
4. 552 888 1392 2328 3552 6024 9096 13704 20616 30984 46536 86904 165816 367704 628356 837836 628384 630356 491884 368920 499400 772840 978650 975652 744248 696712 628628 857836 857892 indefinida
5. 4274 2140 2396 1804 1724 1300 1738 1142 574 434 334 170 154 134 70 74 40 50 43 1 el penúltimo es primo
6. 12496 14288 15472 14536 14264 12496 socios desde el primero hasta el penúltimo
7. 14316 19116 31704 47616 83328 177792 295488 629072 589786 294896 358336 418904 366556 274924 275444 243760 376736 381028 285778 152990 122410 97946 48976 45946 22976 22744 19916 17716 socios