Geometría de las Superficies

ESTATICA (TB036)

Departamento de Estabilidad

Facultad de Ingeniería - UBA

Características Geométricas

Definiciones:

- Momento Estático ó de Primer Orden
  - Centro de Masa – Baricentro - Centroide
- Momentos de *Segundo Orden*
  - *Momento de Inercia*
  - *Momento Centrífugo*
  - *Momento Polar*
  - *Radios de Giro*

Operaciones:

- Determinación de ejes baricéntricos
- Determinación del baricentro en figuras compuestas

Traslación y giro de ejes:

- Formula de Steiner
- Ejes conjugados
- Ejes principales de inercia

Características Geométricas

Por qué nos interesan las características geométricas de la sección?

- **Área**

  Dimensionamiento/Verificación a Esfuerzo Normal

- **Momento Estático ó de Primer Orden**

  Dimensionamiento/Verificación a Esfuerzo de Corte

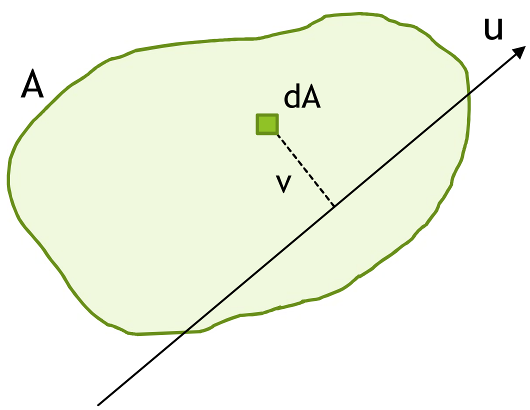
- **Momentos de *Segundo Orden***
  - *Momento de Inercia*

    Dimensionamiento/Verificación a flexión

  - *Momento Polar*

    Dimensionamiento/Verificación a torsión

Momento Estático (ó de 1º orden)



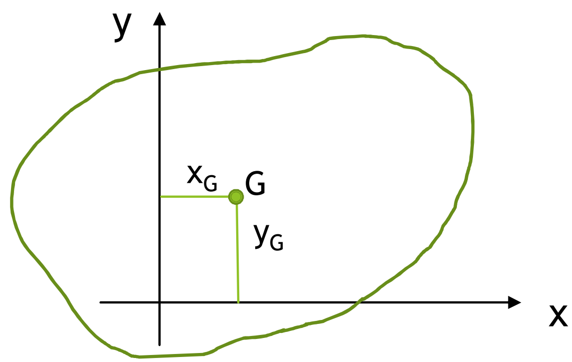
$$S_u = \int_A v.dA$$

- Unidades: $[S] = m^2.m = m^3$
- dA siempre positivo
- Signo del Momento Estático depende exclusivamente de la coordenada
- 

Considerando la superficie plana de área A y una recta u en el plano de la superficie, que puede o no cortarla, se define Su como momento estático, siendo v la distancia al eje.
Si la coordenada v es positiva de un lado de la recta u y negativa al otro, entonces según sea la posición relativa de la recta respecto de la superficie Su será: Negativa positiva o nula.

Baricentro

Si suponemos que el área se encuentra concentrada en un cierto punto G del plano, entonces los momentos de primer orden del área concentrada en G son:



$$\begin{cases} S_x = A.y_G \\ S_y = A.x_G \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} S_x = \int_A y.dA \\ S_y = \int_A x.dA \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A.y_G = \int_A y.dA \\ A.x_G = \int_A x.dA \end{cases}$$

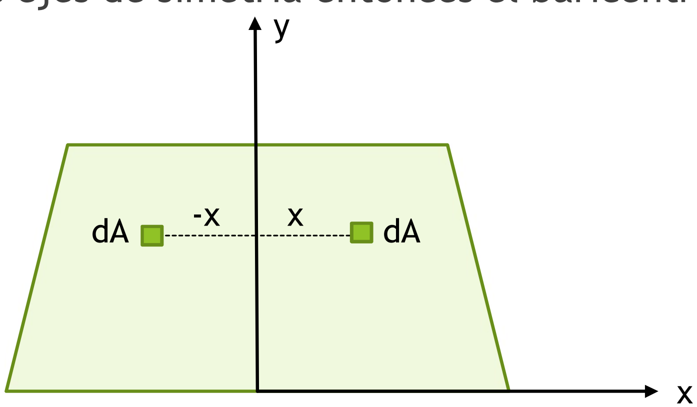
Coordenadas del baricentro $\begin{cases} y_G = \dfrac{\int_A y.dA}{A} = \dfrac{S_x}{A} \\ x_G = \dfrac{\int_A x.dA}{A} = \dfrac{S_y}{A} \end{cases}$

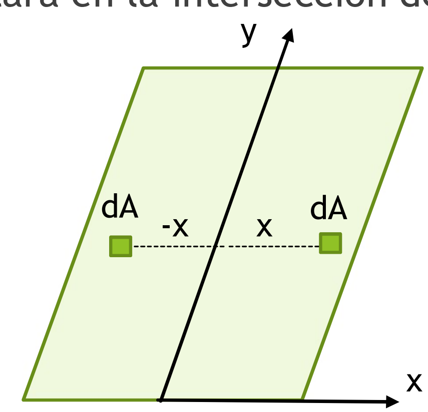
Unidades: m

Cualquier recta que pase por el baricentro se denomina recta o eje baricentrico. Respecto ella el momento estático es 0 $S_G = 0$

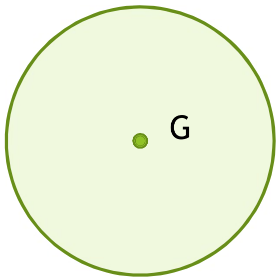
Conclusiones respecto al Baricentro

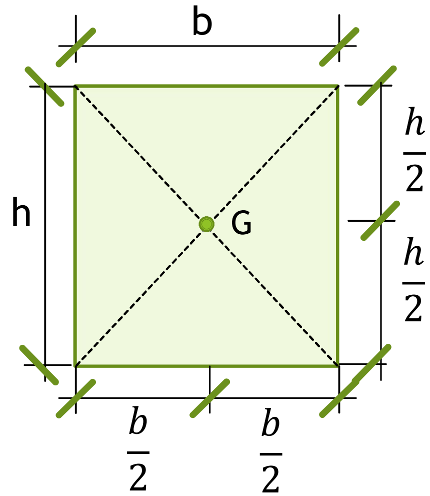
- La posición del baricentro es una propiedad de la superficie. Es única e independiente del sistema coordenado
- Puede quedar dentro o fuera del contorno de la superficie
- Se denomina ejes baricéntricos a cualquier par de ejes con centro en G
- Si hay un eje de simetría el mismo será baricéntrico
- Si hay dos ejes de simetría entonces el baricentro estará en la intersección de los mismos

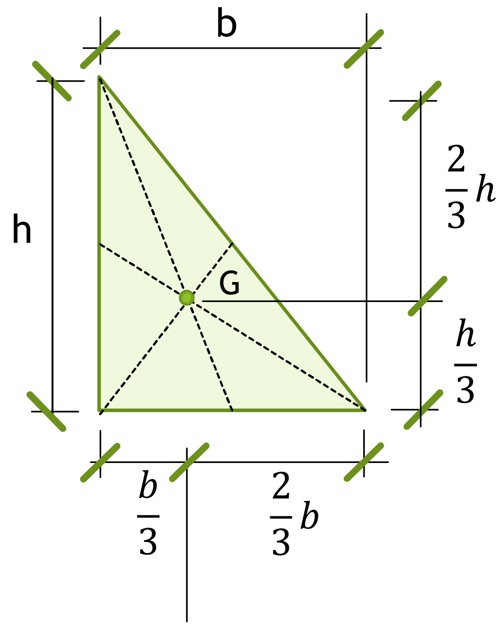




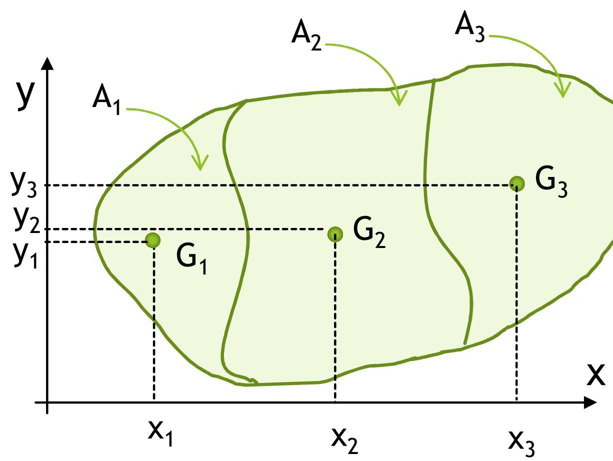
Baricentros de figuras comunes







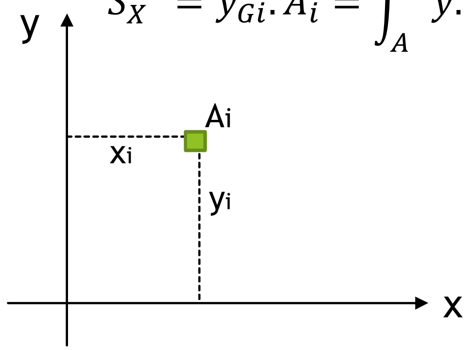
Baricentro de figuras compuestas:



$$\begin{cases} y_{Gi} = \dfrac{\int_A y.dA_i}{A_i} \\ x_{Gi} = \dfrac{\int_A x.dA_i}{A_i} \end{cases}$$

- Sistema Discreto

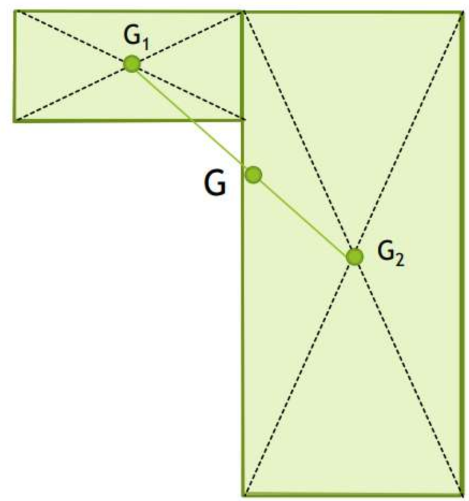
$$S_X^{Ai} = y_{Gi}.A_i = \int_A y.dA_i$$



$$\begin{cases} S_x = A.y_G = \sum S_x^{A_i} = \sum A_i\,.y_{Gi} \\ S_y = A.x_G = \sum S_y^{A_i} = \sum A_i\,.x_{Gi} \end{cases}$$

Si la superficie tiene huecos o entrantes la superficie se considera negativa.

Baricentros de figuras compuestas

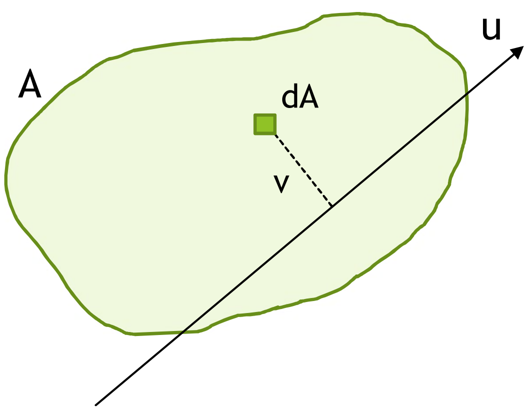


La determinación del baricentro de varias superficies puede efectuarse como si se tratara del centro de un sistema de fuerzas paralelas, de intensidad igual a las áreas de las superficies componentes, y aplicadas en los respectivos baricentros.

Momentos de Segundo Orden

- Momento de Centrífugo o producto de inercia
- Momento Inercia
- Momento Polar

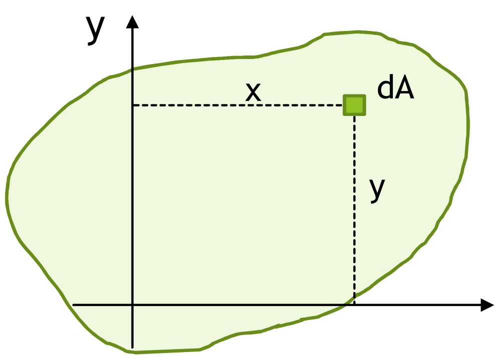
Momento de Inercia (ó de 2º orden)



$$I_u = \int_A v^2 . dA$$

- Unidades: $[I] = m^2 . m^2 = m^4$
- dA siempre positivo, magnitud al cuadrado siempre positivo
- Signo del Momento de Inercia siempre mayor a cero 
- Nunca es nulo

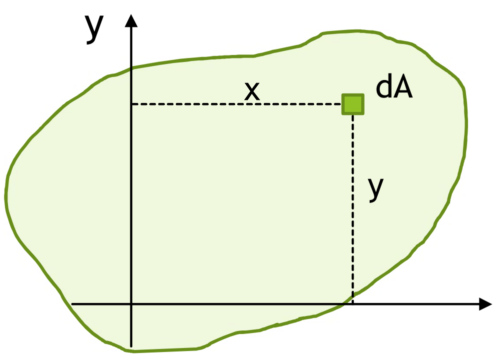
Momento de Inercia



$$\begin{cases} I_x = \int_A y^2 . dA \\ I_y = \int_A x^2 . dA \end{cases}$$

- Unidades: $[I_P] = m^2 . m^2 = m^4$
- **Es siempre positivo y no nulo.**

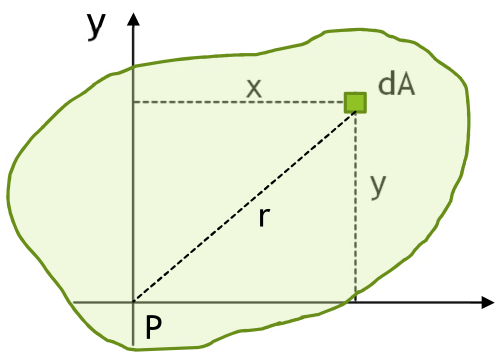
Momento Centrífugo o Producto de inercia



$$I_{xy} = \int_A x.y.dA$$

- Unidades: $[Ixy] = m.m.m^2 = m^4$
- El signo del Momento Centrífugo depende de las coordenadas xy
- Si el Momento Centrífugo es nulo, se dice que el par de ejes son **Conjugados de Inercia.**
- Si además de ser Conjugados, el par de ejes son ortogonales entre sí, se los denomina **Ejes Principales de Inercia**.
- **Si uno de los ejes es de simetría, cualquiera sea el otro eje, el Momento Centrífugo será nulo.**

Momento Polar de Inercia



$$I_P = \iint r^2 . dA$$

Si los ejes son ortogonales:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

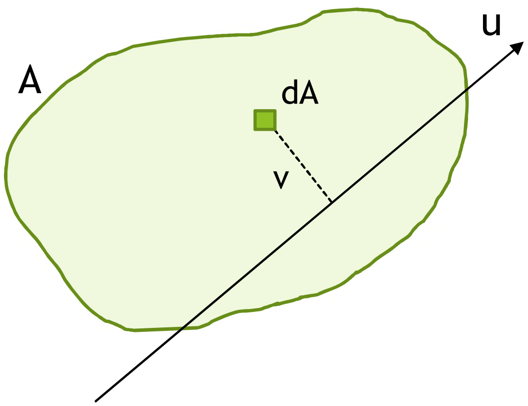
Por lo tanto:

$$I_P = \iint (x^2 + y^2) dA = \iint x^2 dA + \iint y^2 dA = Ix + Iy$$

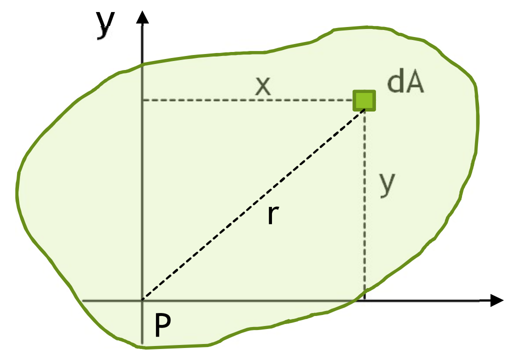
$$\boxed{I_P = Ix + Iy}$$

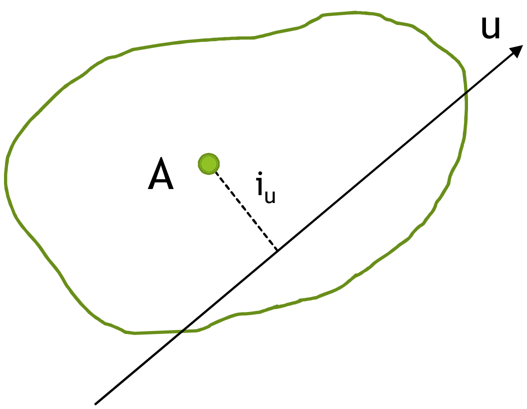
- Unidades: $[I_P] = m^2 . m^2 = m^4$
- Para todo par dejes ortogonales que pasen por el polo P, el valor del momento Polar es **invariante**
- Es siempre positivo y no nulo.

Radios de Giro



$$I_u = \int_A v^2 . dA$$





$$I_u = i_u{}^2 . \mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{A}} \\ i_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{A}} \end{array} \right. \qquad i_P = \sqrt{\frac{I_P}{A}}$$

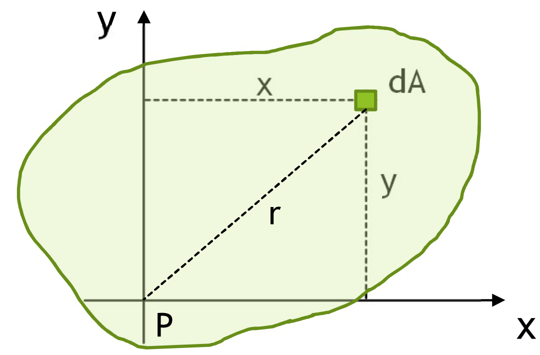
Repaso:

momento estático / de 1er orden

$$\begin{cases} S_x = \iint y.dA \\ S_y = \iint x.dA \end{cases}$$

baricentro

$$\begin{cases} y_g = \dfrac{\iint y.dA}{\iint dA} \\ x_g = \dfrac{\iint x.dA}{\iint dA} \end{cases}$$



momentos de 2do orden

- momento centrífugo $I_{xy} = \iint x.y.dA$
- momentos de inercia $\begin{cases} I_x = \iint y^2 dA \\ I_y = \iint x^2 dA \end{cases}$ radios de giro $\begin{cases} i_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{A}} \\ i_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{A}} \end{cases}$
- momento polar $I_P = \iint r^2.dA$

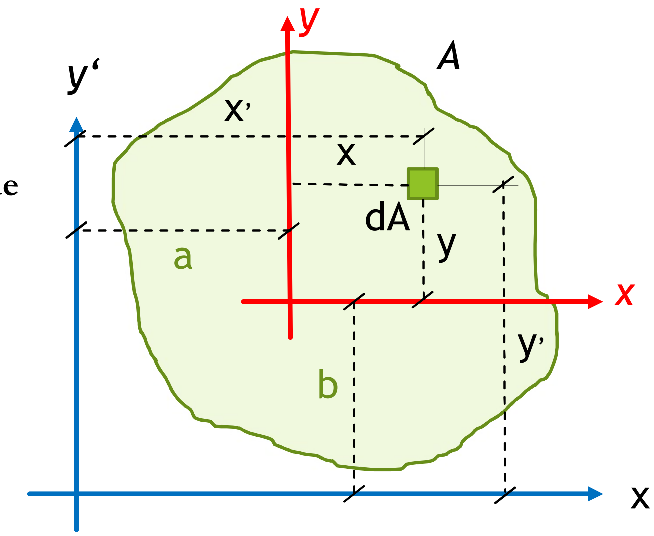
Transformaciones de Ejes

Operaciones con momentos de 2do orden

- Traslación
- Rotación

Traslación de Ejes

Si tenemos una superficie de área A referida a un sistema cartesiano *x, y*, cuyos momentos de 2do orden son conocidos para este sistema coordenado, se desea conocer los momentos de 2do orden respecto de otro sistema cartesiano de ejes paralelos a los anteriores, *x', y'*. Las distancias entre los ejes son conocidas (a, b).



$$\begin{cases} x' = \boldsymbol{x} + a \\ y' = \boldsymbol{y} + b \end{cases}$$

$$I_{x'y'} = \iint x'.y'dA = \iint (x+a).(y+b)\,dA = \iint x.y\,dA + b\iint x\,dA + a\iint y\,dA + ab\iint dA$$

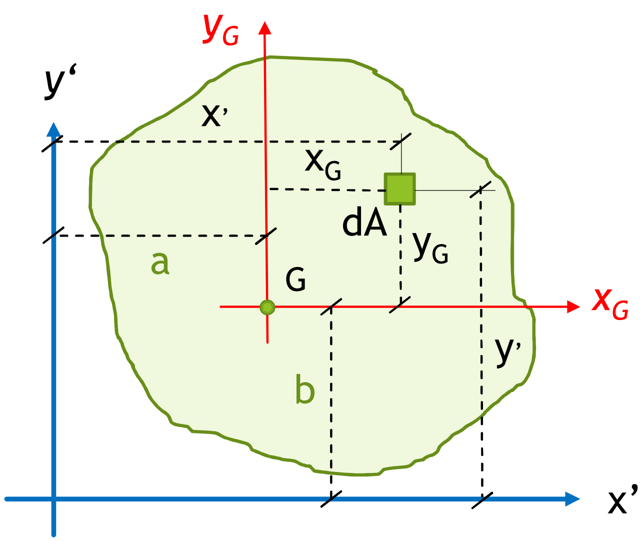
$$\boxed{I_{x'y'} = I_{xy} + b.S_y + a.S_x + a.b.A}$$

$$I_{x'} = \iint y'^2 dA = \iint (y+b)^2 dA = \iint y^2 dA + 2.b\iint y\,dA + b^2\iint dA \qquad \boxed{I_{x'} = I_x + 2\,.b.S_x + b^2.A}$$

$$I_{y'} = \iint x'^2 dA = \iint (x+a)^2 dA = \iint x^2 dA + 2.a\iint x\,dA + a^2\iint dA \qquad \boxed{I_{y'} = I_y + 2\,.a.S_y + a^2.A}$$

Traslación de Ejes baricéntricos

Teorema de Steiner



$$I_{x'y'} = I_{xGyG} + \cancel{b.S_{yG}} + \cancel{a.S_{yG}} + a.b.A \qquad \boxed{I_{x'y'} = I_{xGyG} + a.b.A}$$

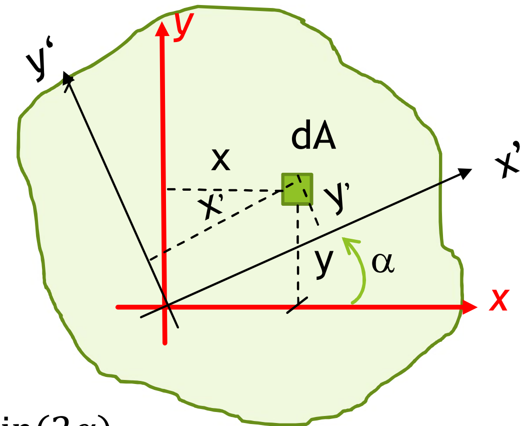
$$I_{x'} = I_{xG} + \cancel{2.b.S_{xG}} + b^2.A \qquad \boxed{I_{x'} = I_{xG} \ + b^2.A}$$

$$I_{y'} = I_{yG} + \cancel{2.a.S_{yG}} + a^2.A \qquad \boxed{I_{y'} = I_{yG} \ + a^2.A}$$

Conclusión:

Los momentos de inercia baricéntricos son siempre menores que los momentos de inercia respecto a cualquier otro par de ejes paralelos.

Rotación de Ejes ortogonales



Características geométricas de la superficie respecto de **x,y** conocidas.
Se desea conocer respecto de x',y', girados a respecto de x,y.

$$\begin{cases} x' = \boldsymbol{x}.\cos(\alpha) + \boldsymbol{y}.\sin(\alpha) \\ y' = \boldsymbol{y}.\cos(\alpha) - \boldsymbol{x}.\sin(\alpha) \end{cases}$$

$$2.\sin(\alpha).\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)$$

$$\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 = \cos(2\alpha)$$

$$I_{x'} = \iint x'.y'dA = \iint (x.\cos(\alpha) + y.\sin(\alpha)).(y.\cos(\alpha) - x.\sin(\alpha))\, dA =$$

$$= \cos(2\alpha) \iint x.y\, dA - \frac{\sin(2\alpha)}{2} \iint x^2 dA + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \iint y^2 dA = \boxed{I_{x'y'} = \cos(2\alpha)\, I_{xy} - \frac{\sin(2\alpha)}{2}(I_y - I_x)}$$

$$I_{x'} = \iint y'^2 dA = \iint (y.\cos(\alpha) - x.\sin(\alpha)\ )^2 dA =$$

$$= -\sin(2\alpha) \iint x.y\, dA + \sin(\alpha)^2 \iint x^2 dA + \cos(\alpha)^2 \iint y^2 dA \quad \boxed{I_{x'} = \sin(\alpha)^2 . I_y + \cos(\alpha)^2 . I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy}}$$

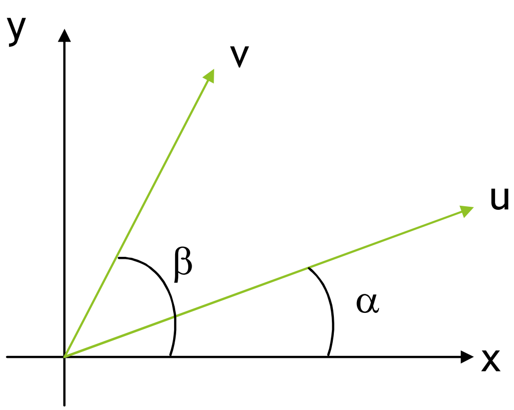
$$I_{y'} = \iint x'^2 dA = \iint (x.\cos(\alpha) + y.\sin(\alpha)\ )^2 dA =$$

$$= \sin(2\alpha) \iint x.y\, dA + \cos(\alpha)^2 \iint x^2 dA + \sin(\alpha)^2 \iint y^2 dA \quad \boxed{I_{y'} = cos(\alpha)^2 . I_y + sin(\alpha)^2 . I_x + \sin(2\alpha)\, I_{xy}}$$

Ejes Conjugados

Se desea hallar el valor del ángulo β tal que el Momento Centrífugo J_{uv} sea nulo, es decir, se desea hallar el Eje Conjugado del eje u.

Se conocen todos los Momentos de Segundo Orden referidos a los ejes x-y, y el ángulo α que forma el eje u con dicho sistema.



$$\tan(\beta) = \frac{I_x - I_{xy}.\tan(\alpha)}{I_{xy} - I_y.\tan(\alpha)}$$

Ejes Principales de Inercia

Se busca la orientación del par de ejes para los cuales el valor del momento de inercia es máximo o mínimo.

El ángulo α_0 que maximiza el valor del Momento de Inercia, se obtiene de derivar en α las expresiones de momento de inercia obtenidas para la rotación de ejes ortogonales:

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = 0 \qquad \text{Ó bien,} \qquad \frac{dI_{y'}}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = 0 = \frac{d\sin(\alpha)^2}{d\alpha}.I_y + \frac{d\cos(\alpha)^2}{d\alpha}.I_x - \frac{d\sin(2\alpha)}{d\alpha}.I_{xy}$$

$$0 = \sin(2\alpha_0).I_y - \sin(2\alpha_0).I_x - 2.\cos(2\alpha_0).I_{xy}$$

$$2.\cos(2\alpha_0).I_{xy} = \sin(2\alpha_0).(I_y - I_x)$$

$$\frac{2.I_{xy}}{(I_y - I_x)} = \frac{\sin(2\alpha_0)}{\cos(2\alpha_0)} = \tan(2\alpha_0) \qquad \boxed{\tan(2\alpha_0) = \frac{2.I_{xy}}{(I_y - I_x)}}$$

- La dirección hallada corresponde a los denominados **Ejes Principales de Inercia; los mismos son Ortogonales y Conjugados**
- El producto de inercia $I_{x'y'}$ es nulo para los ejes principales de inercia
- **Todo eje de simetría es principal de inercia**

Momentos Principales de Inercia

Reemplazando el α que maximiza el valor del Momento de Inercia en la ecuación de rotación de ejes, se obtienen los momentos de inercia máximos y mínimos o Momentos Principales de Inercia

$$\cos(\alpha)^2 = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

$$sin(\alpha)^2 = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

$$I_{x'} = \sin(\alpha)^2 \,.\, I_y + \cos(\alpha)^2 \,.\, I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy} = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}.\, I_y + \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.\, I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy} =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{\cos(2\alpha)}{2}.\left(I_x - I_y\right) - \sin(2\alpha)\, I_{xy} =$$

Reemplazando el α por α_0: $\tan(2\alpha_0) = \frac{2.\, I_{xy}}{(I_y - I_x)}$

$$I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}$$

$$\boxed{I_{I,II} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}$$

Hoja de fórmulas

$$\begin{cases} S_x = \iint y.dA \\ \\ S_y = \iint x.dA \end{cases} \qquad \begin{cases} y_g = \dfrac{\iint y.dA}{\iint dA} \\ \\ x_g = \dfrac{\iint x.dA}{\iint dA} \end{cases}$$

$$I_{xy} = \iint x.y.dA$$

$$\begin{cases} I_x = \iint y^2 dA \\ \\ I_y = \iint x^2 dA \end{cases}$$

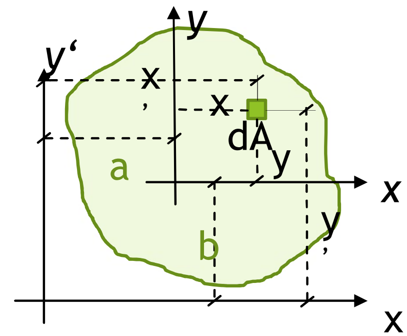
$$I_P = \iint r^2.dA = I_x + I_y$$

$$\begin{cases} i_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{A}} \\ \\ i_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{A}} \end{cases}$$

$$I_{x'y'} = I_{xGyG} + a.b.A$$

$$I_{x'} = I_{xG} \; + b^2.A$$

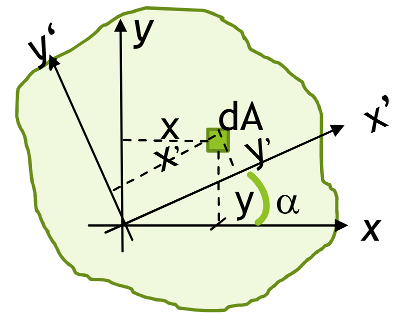
$$I_{y'} = I_{yG} \; + a^2.A$$



$$I_{x'y'} = \cos(2\alpha)\, I_{xy} - \frac{\sin(2\alpha)}{2}(I_y - I_x)$$

$$I_{x'} = \sin(\alpha)^2 . I_y + \cos(\alpha)^2 . I_x - \sin(2\alpha)\, I_{xy}$$

$$I_{y'} = cos(\alpha)^2 . I_y + sin(\alpha)^2 . I_x + \sin(2\alpha)\, I_{xy}$$



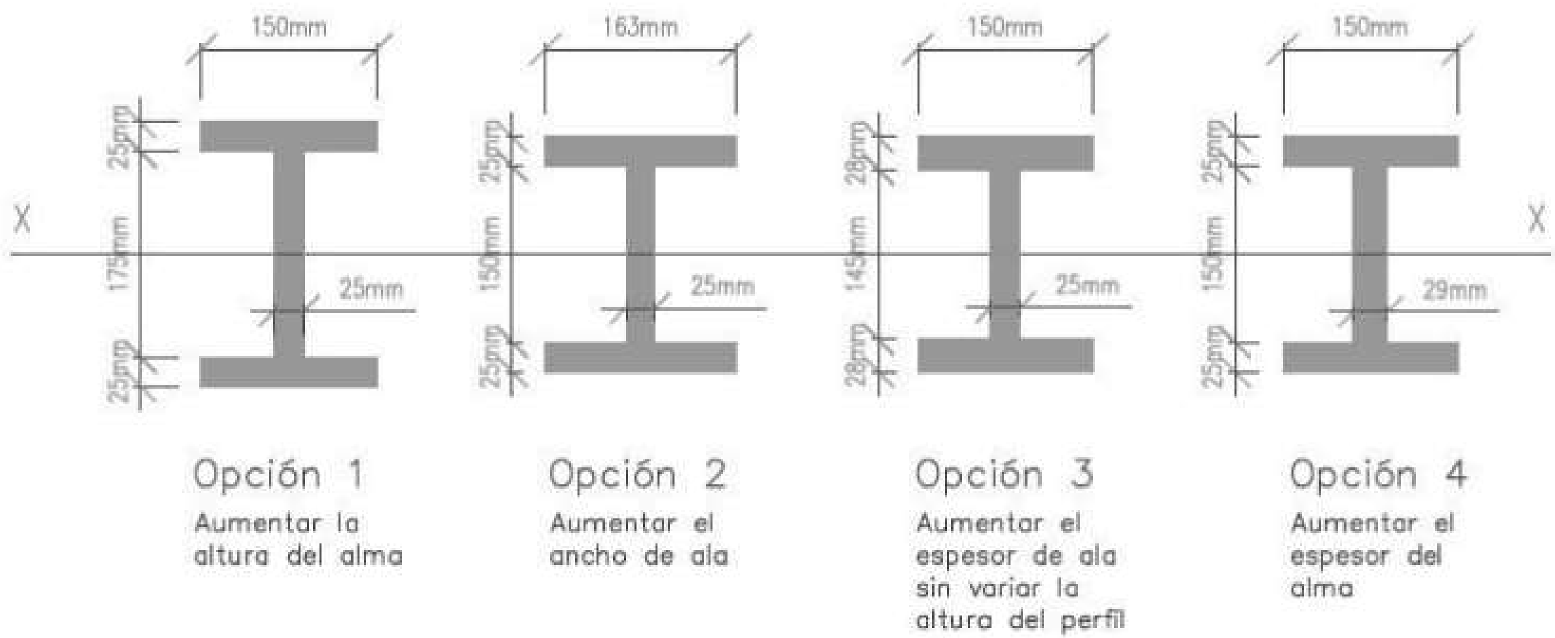
$$\boxed{I_{I,II} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4{I_{xy}}^2}}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2.I_{xy}}{(I_y - I_x)}$$

$$\tan(\beta) = \frac{I_x - I_{xy}.\tan(\alpha)}{I_{xy} - I_y.\tan(\alpha)}$$

Ejercicio 17

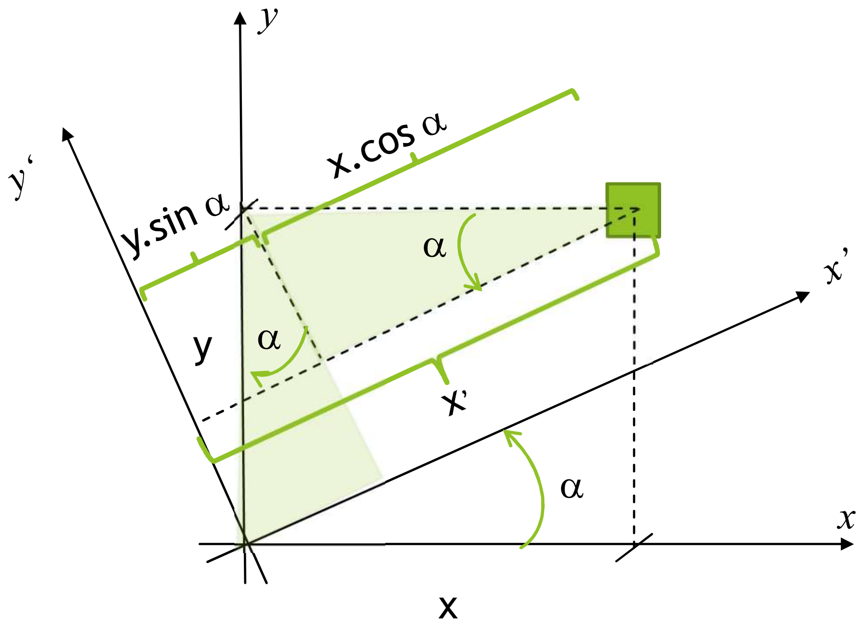
Dadas las 4 figuras que se indican en la imagen, las cuales poseen la misma área, aunque distribuida de forma diferente, ¿cuál es la forma más eficiente para aumentar el momento principal de inercia respecto al eje X?



ANEXOS

Detalle de determinación de coordenadas rotadas

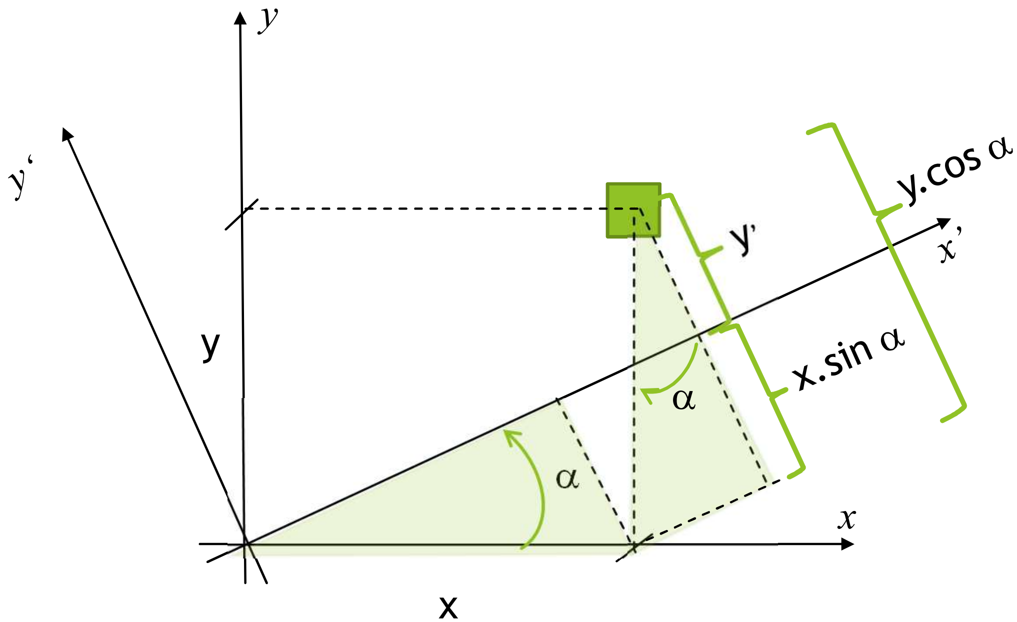
Coordenada x’:



$$x' = x.\cos(\alpha) + y.\sin(\alpha)$$

Detalle de determinación de coordenadas rotadas

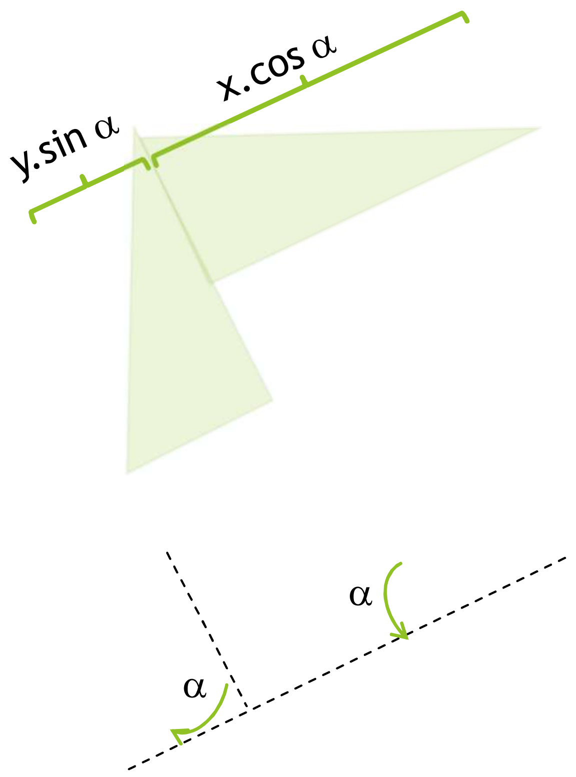
Coordenada y’:

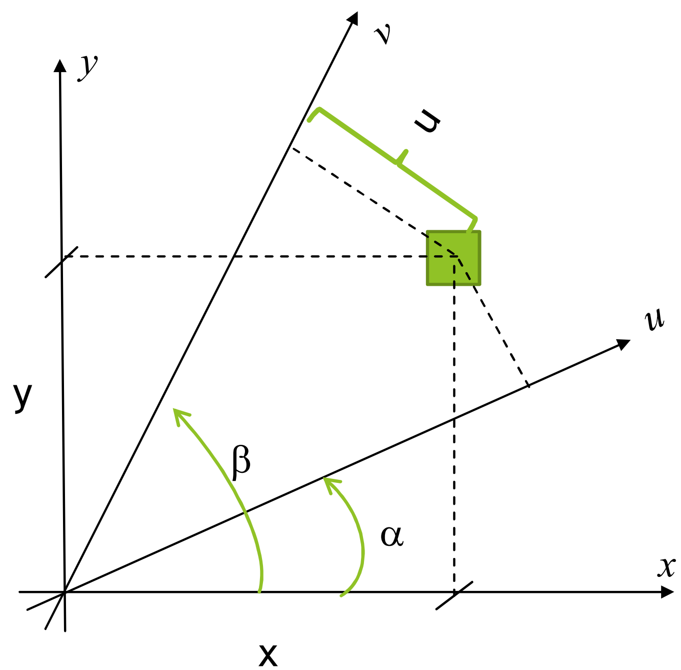


$$y' = y.\cos(\alpha) - x.\sin(\alpha)$$

Detalle de determinación de coordenadas rotadas

Coordenada u:





$$u = x.\cos(\alpha) + y.\sin(\alpha)$$