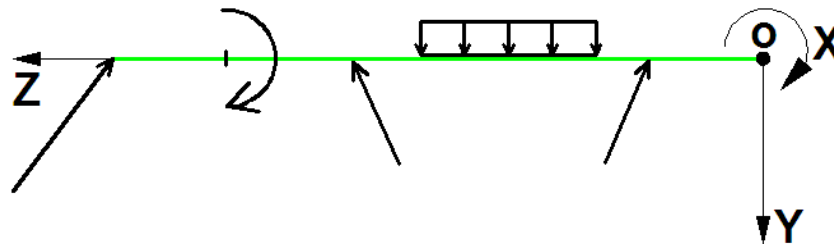


UNIDAD N° 6: DIAGRAMAS DE CARACTERISTICAS EN ESTRUCTURAS ISOSTATICAS DE ALMA LLENA FORMADAS POR BARRAS DE EJE RECTO.

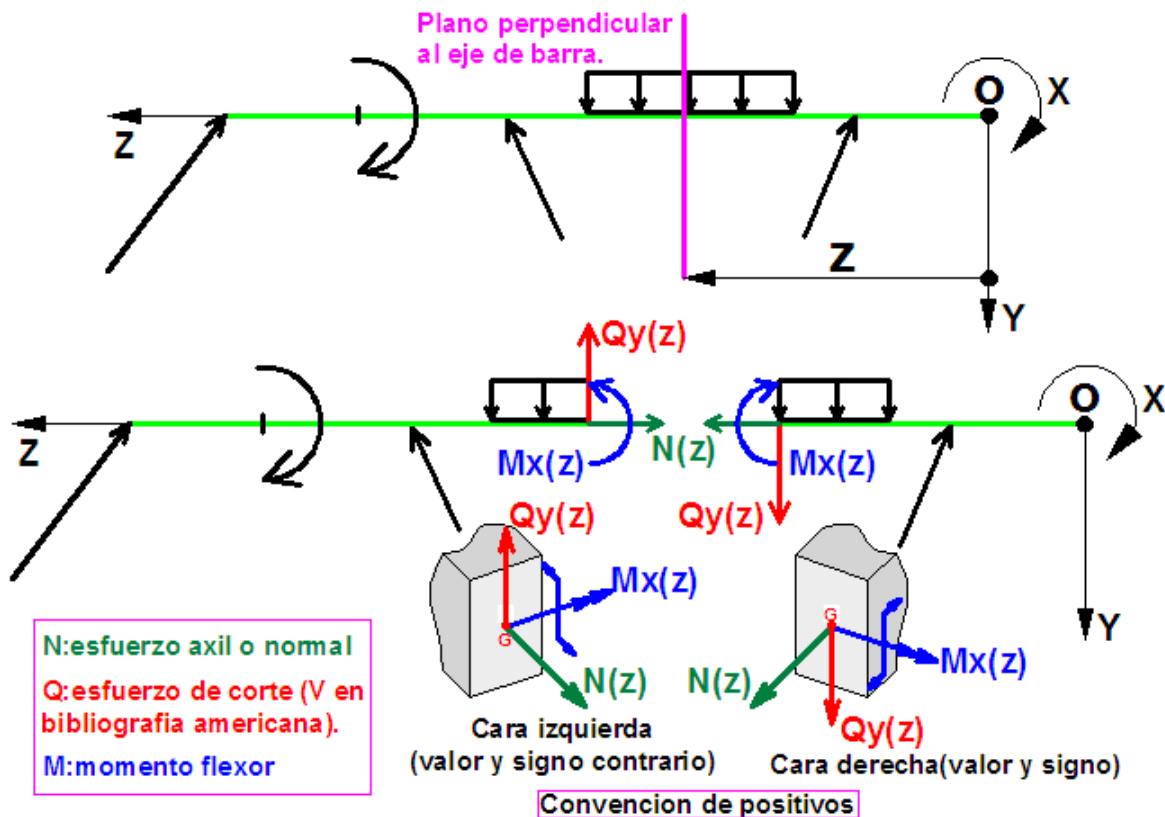
Reacciones de vínculo interno y esfuerzos característicos en la sección transversal. Relaciones diferenciales entre los esfuerzos característicos entre si y con las fuerzas exteriores. Diagramas de características en vigas y pórticos planos (esfuerzo axil, flexión y corte en un plano) y espaciales (esfuerzo axil, torsión, flexión y corte en dos planos ortogonales). Concepto de fibra. Análisis de fibras traccionadas y comprimidas como consecuencia del esfuerzo normal y el momento flexor. Fuerzas extremas de barra y fuerzas de nudo. Verificaciones. Utilización de programas de cálculo estructural.

ANALISIS DE ESTRUCTURAS PLANAS.

Considérese una estructura plana conformada por una sola barra (la cual se representa por su eje) y solicitada por un sistema de fuerzas en equilibrio. Gráficamente:



Si a continuación, a distancia z arbitraria, se corta la barra con un plano perpendicular a su eje (sobre dicho plano se ubica la sección transversal de la barra) y se determinan las componentes de reacción de vínculo interno con la particularidad de descomponer la fuerza interna en dirección del eje de barra y perpendicular al mismo se arriba al concepto de esfuerzos característicos. Es decir:

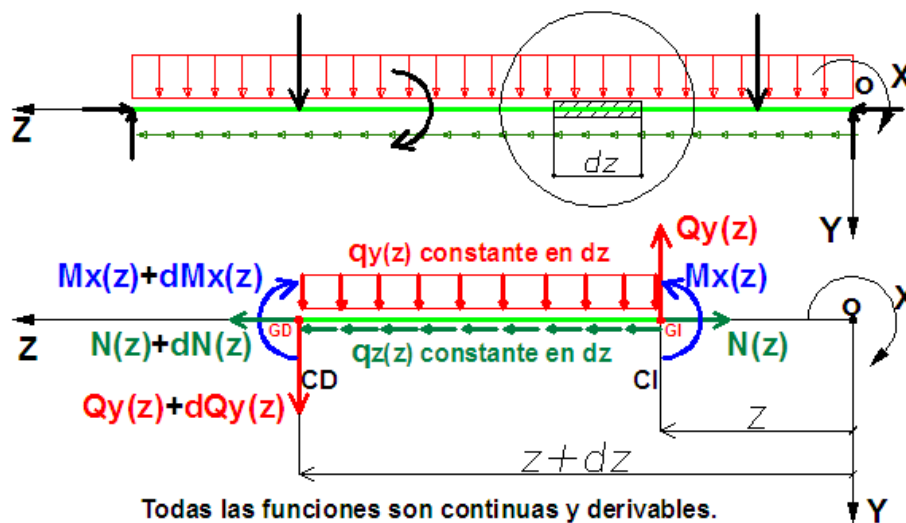


Es posible trazar diagramas que indiquen como varían los esfuerzos característicos a lo largo del eje de barra. (reciben el nombre de diagramas de esfuerzos característicos o simplemente diagramas de características). El trazado de dichos diagramas es el tema central de la presente unidad.

Previamente es necesario analizar como se relacionan los esfuerzos característicos entre si y con el estado de carga actuante en la estructura. Dicho análisis se efectúa a continuación:

RELACIONES DIFERENCIALES ENTRE LOS ESFUERZOS CARACTERISTICOS ENTRE SI Y CON EL ESTADO DE CARGA ACTUANTE.

Se parte de considerar un diferencial de longitud de barra (representada por su eje) perteneciente a una estructura plana y solicitada por un sistema de fuerzas en equilibrio tal como se grafica a continuación:



A continuación se plantean las ecuaciones de equilibrio por reducción del sistema de fuerzas al punto **GD**. Entonces:

$$R_z=0 \rightarrow N(z) + dN(z) - N(z) + Q_y(z).dz=0 \rightarrow \boxed{dN(z)/dz=-q_z(z)}$$

$$R_y=0 \rightarrow Q_y(z) + dQ_y(z) - Q_y(z) + q_y(z).dz=0 \rightarrow \boxed{dQ_y(z)/dz=-q_y(z)}$$

$$M_x=0 \rightarrow M_x(z) + dM_x(z) - M_x(z) - Q_y(z).dz + q_y(z).dz^2/2=0 \rightarrow \boxed{dM_x(z)/dz=Q_y(z)}$$

El término $q_y(z).dz^2/2$ se desprecia por ser un infinitésimo de orden superior.

Las expresiones deducidas se utilizan en el trazado de diagramas de características y es imposible no tenerlas en cuenta si se desea obtener resultados correctos. Se recomienda al lector dedicar el tiempo necesario a la interpretación adecuada de las mismas.

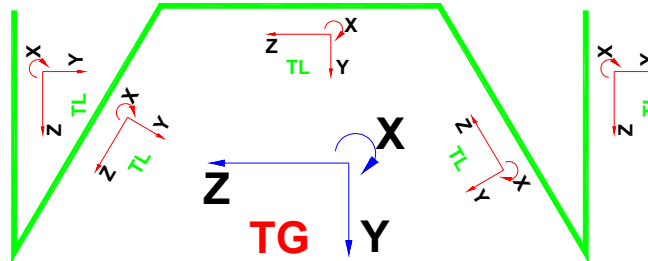
TERNA GLOBAL Y TERNA LOCAL.

Antes de iniciar el trazado de diagramas de características se indica la diferencia entre terna global y terna local como sigue.

Terna global: Es aquella aplicada a la totalidad de la estructura con el objeto de determinar las componentes de reacción de vínculo externo.

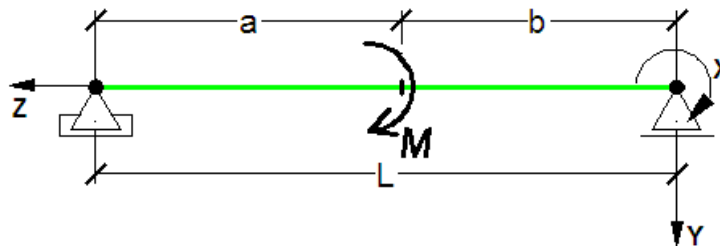
Terna local: Es aquella aplicada a cada barra en particular, con el objeto de definir los signos de los diagramas de características.

A continuación se grafica:

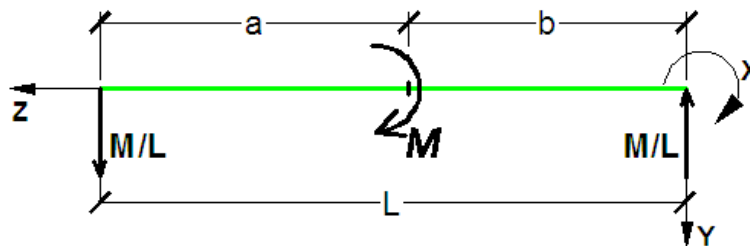


EJEMPLOS DE TRAZADO DE DIAGRAMAS DE CARACTERÍSTICAS EN ESTRUCTURAS PLANAS.

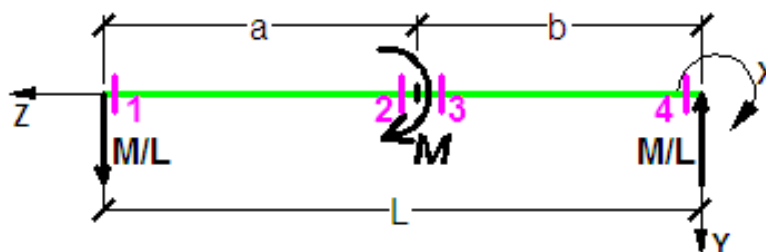
Ejemplo N°1: Viga simplemente apoyada cargada con una cupla de fuerzas representada por su momento.



En primera instancia se determinan las reacciones de vínculo externo y se plantea el diagrama de cuerpo libre:



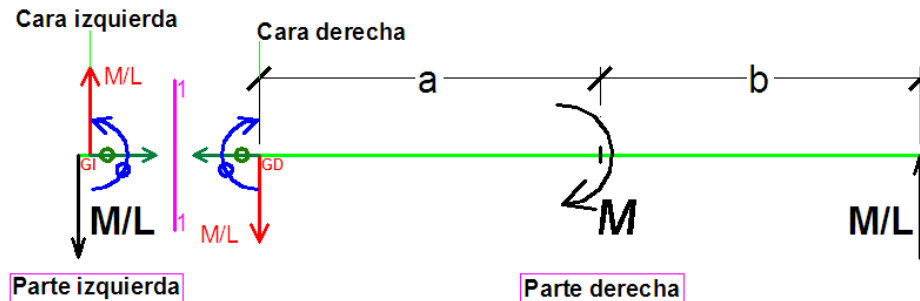
A continuación se determinan los esfuerzos característicos en secciones transversales de interés tal como se indica en la figura que sigue.



El lector adquirirá experiencia al respecto a medida que avance con el desarrollo de la ejercitación correspondiente al tema tratado.

Para determinar los esfuerzos característicos en las secciones transversales de interés, el procedimiento más sencillo es el de reducción de sistemas de fuerzas tal como se explica en lo que sigue:

Análisis de la sección transversal 1.



Si bien la estructura en su conjunto se encuentra solicitada por un sistema de fuerzas en equilibrio, al cortar la misma en la sección 1, los sistemas que actúan en ambas partes (parte izquierda y parte derecha) quedan desequilibrados.

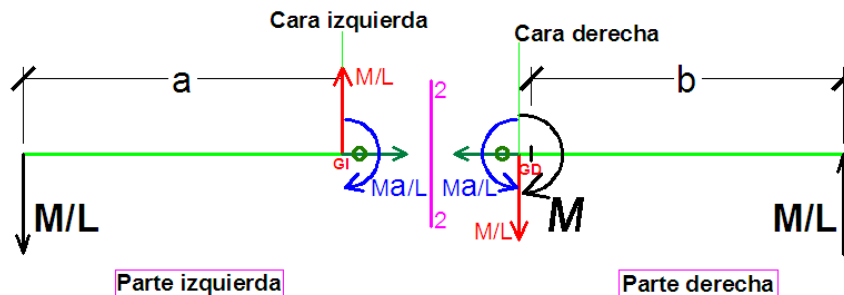
Para equilibrar el sistema de fuerzas que queda aplicado en la parte derecha es necesario aplicarle a dicha parte el sistema de fuerzas que queda aplicado en parte izquierda. Dicho sistema de fuerzas se aplica reducido al baricentro de la cara derecha (GD) (cara de contacto entre las partes izquierda y derecha antes del corte).

Para equilibrar el sistema de fuerzas que queda aplicado en la parte izquierda es necesario aplicarle a dicha parte el sistema de fuerzas que queda aplicado en parte derecha. Dicho sistema de fuerzas se aplica reducido al baricentro de la cara izquierdo (G1) (cara de contacto entre las partes izquierda y derecha antes del corte).

De la manera indicada quedan determinados los esfuerzos característicos en la sección transversal 1. Es decir:

$$M_{x1}=0 \quad Q_{y1}=M/L \quad N_1=0$$

Análisis de la sección transversal 2.

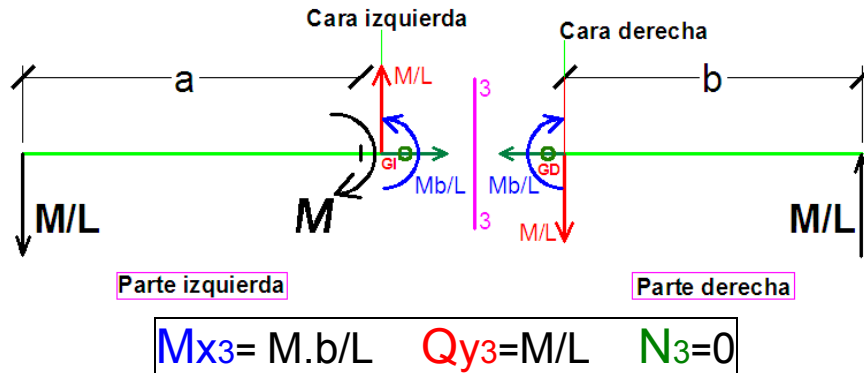


Operando de igual forma que para la sección transversal 1 y teniendo en cuenta que el baricentro de la cara derecha (GD) se encuentra a distancia 'a' de dicha sección resulta:

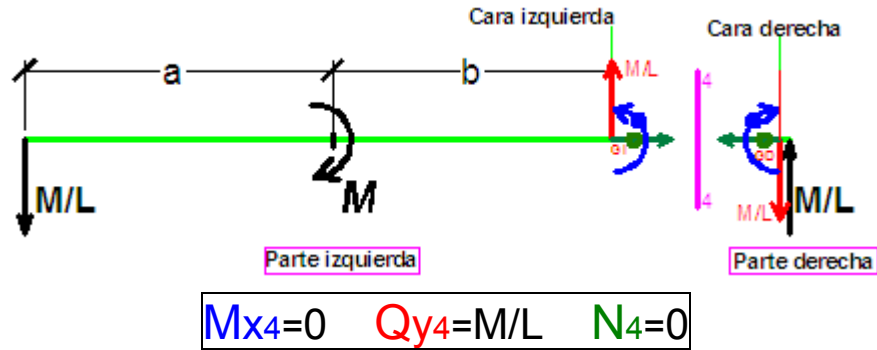
$$M_{x2}= -M.a/L \quad Q_{y2}=M/L \quad N_2=0$$

Análogamente se analizan las [secciones transversales 3 y 4.](#)

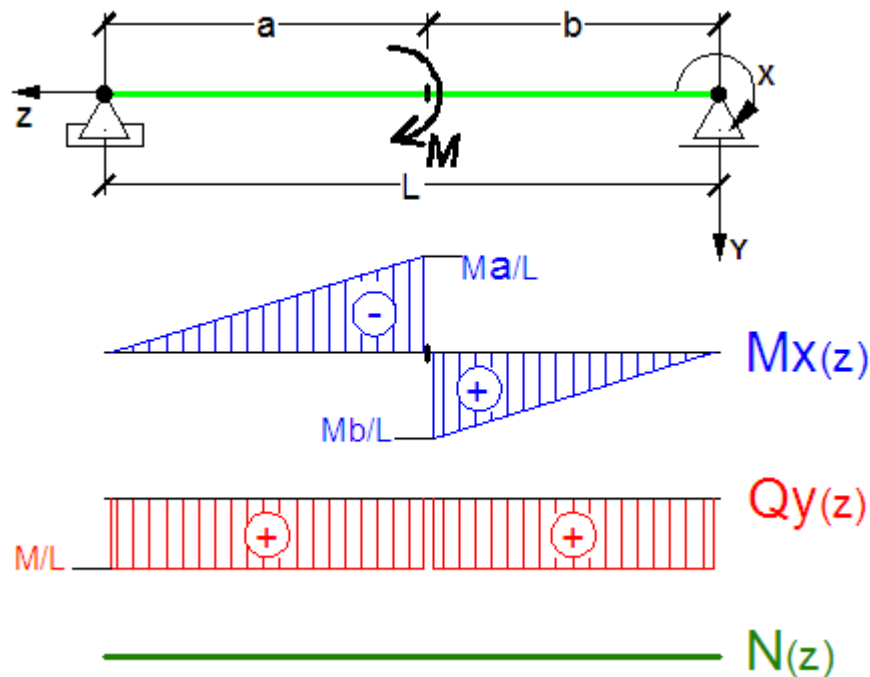
Análisis de la [sección transversal 3.](#)



Análisis de la [sección transversal 4.](#)



Analizadas las [secciones transversales de interés](#), se trazan a continuación los [diagramas de características](#) y luego, [haciendo uso de las relaciones diferenciales](#), se [justifica dicho trazado](#).



Justificación del trazado.

Se parte de la relaciones diferenciales: $dM_x(z)/dz=Q_y(z)$ $dQ_y(z)/dz=-q_y(z)$ $dN(z)/dz=-q_z(z)$

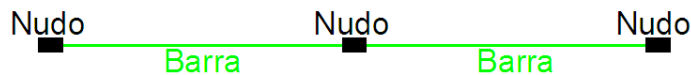
Obsérvese que en toda la estructura la fuerza distribuida transversal al eje de barra ($q_y(z)$) vale cero. Consecuentemente la función esfuerzo de corte ($Q_y(z)$) debe resultar constante y la función momento flexor ($M_x(z)$) debe resultar lineal.

La función momento flexor es discontinua, no encontrándose definida en la sección donde se encuentra aplicado el momento que solicita a la estructura.

Si se analiza el **tramo a** y se tiene en cuenta la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto, puede observarse que la función momento flexor presenta una sola recta tangente cuya pendiente es positiva (la recta se ubica en un cuadrante **Z+ ; Y+**) y su valor es **M/L**. Téngase presente que la derivada de la función momento flexor es la función esfuerzo de corte. El análisis del **tramo b** es análogo.

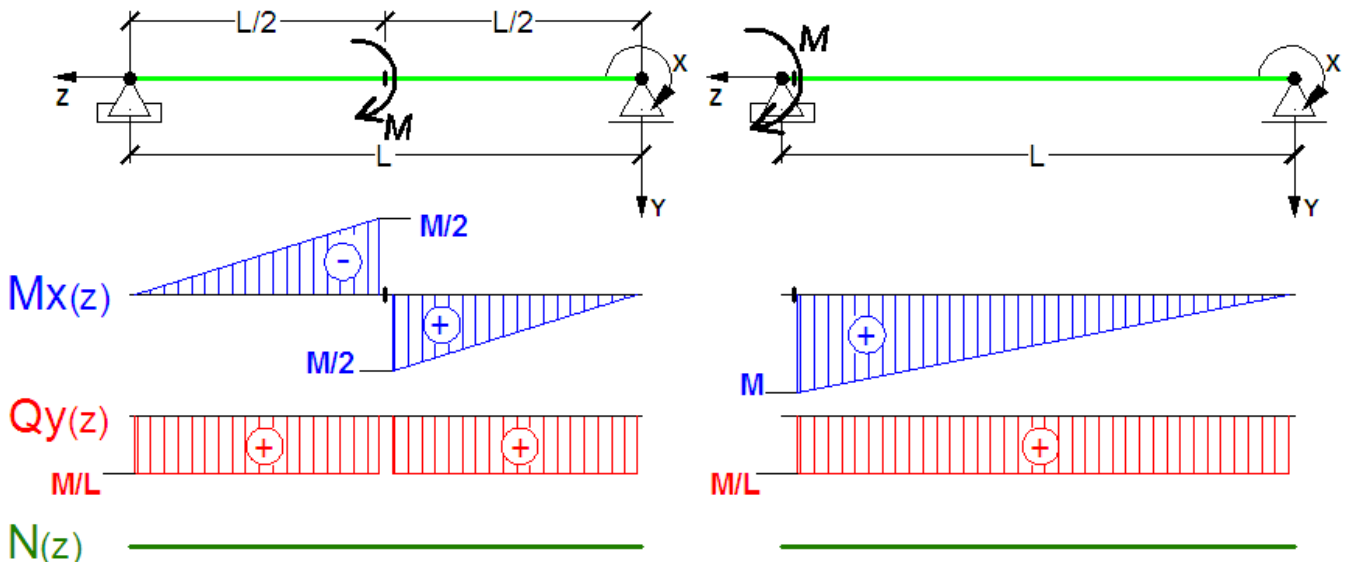
Por otra parte, considerando que la fuerza distribuida de dirección coincidente con el eje de barra ($q_z(z)$) vale cero, entonces la función esfuerzo normal es constante.

Por ultimo, si se define como nudo al elemento de conexión entre barras o bien al extremo de una barra, resulta la siguiente figura:

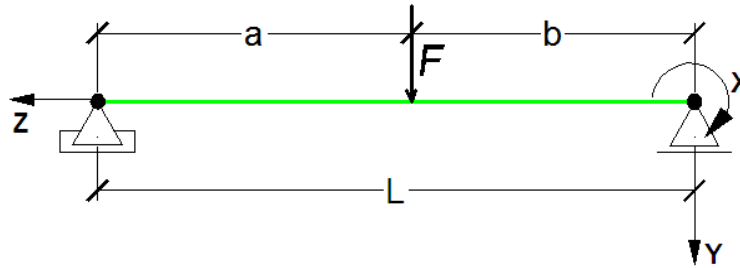


Se deja aclarado desde el inicio del tratamiento del tema, que los diagramas de características se trazan siempre en las barras. El lector podrá observar que en la estructura analizada se ha considerado un nudo en cada extremo de barra y en la sección de aplicación del momento solicitante.

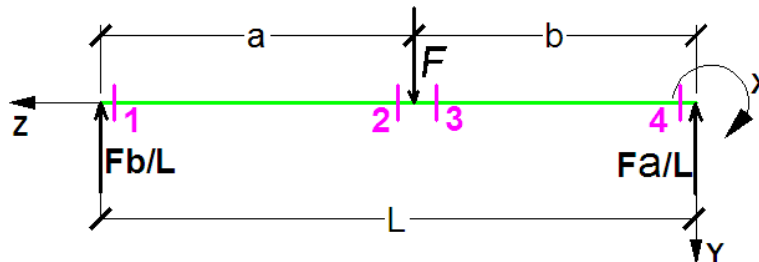
A continuación se representan los diagramas de características de la estructura para valores particulares de las longitudes **a** y **b**.



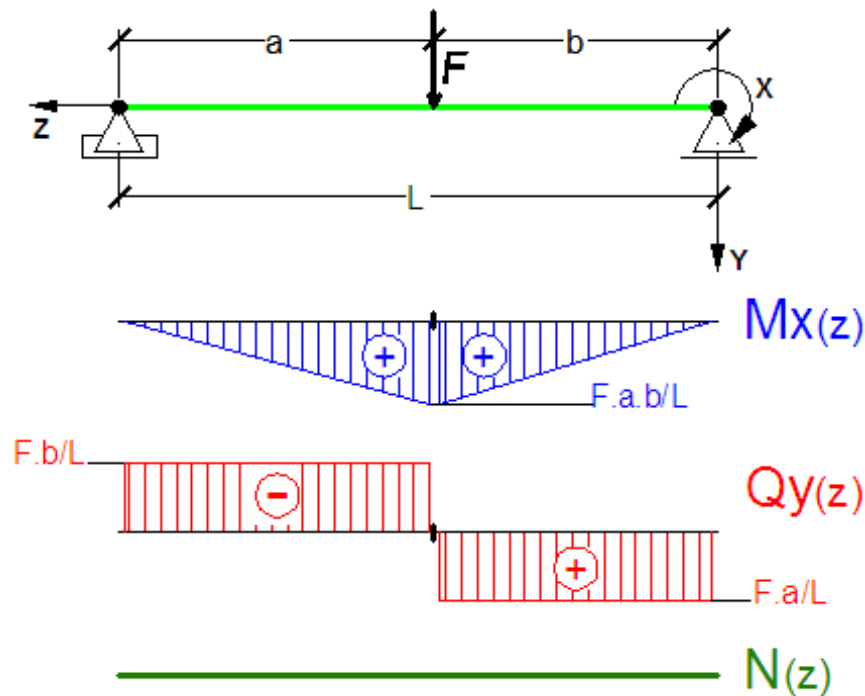
Ejemplo N°2: Viga simplemente apoyada cargada con una fuerza concentrada de dirección perpendicular al eje de barra.



Siguiendo el análisis efectuado en el **Ejemplo N°1** se indica a continuación el diagrama de cuerpo libre con las secciones transversales de interés:



Finalmente se trazan los diagramas de características.

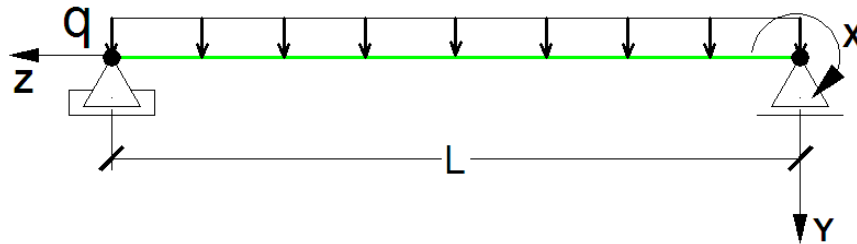


Puede observar el lector, que la función esfuerzo de corte es discontinua, no estando definida en la sección donde se aplica la fuerza concentrada que solicita a la estructura.

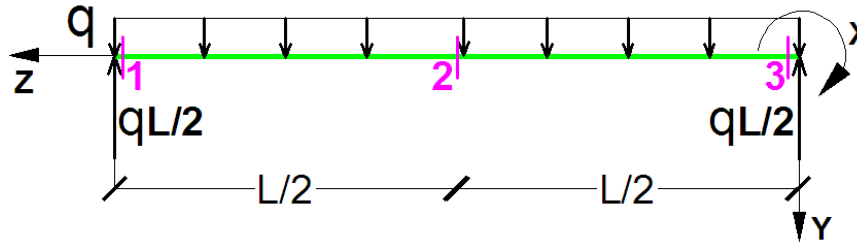
Por otra parte en idéntica sección la función momento flexor presenta distinta derivada por izquierda y por derecha.

Finalmente, si $a=b=L/2$ entonces $Mx \text{ máx} = FxL/4$ y $Qy = - + F/2$

Ejemplo N°3: Viga simplemente apoyada cargada con fuerza distribuida de valor constante y de dirección perpendicular al eje de barra.



Se indica a continuación el diagrama de cuerpo libre con las secciones transversales de interés:

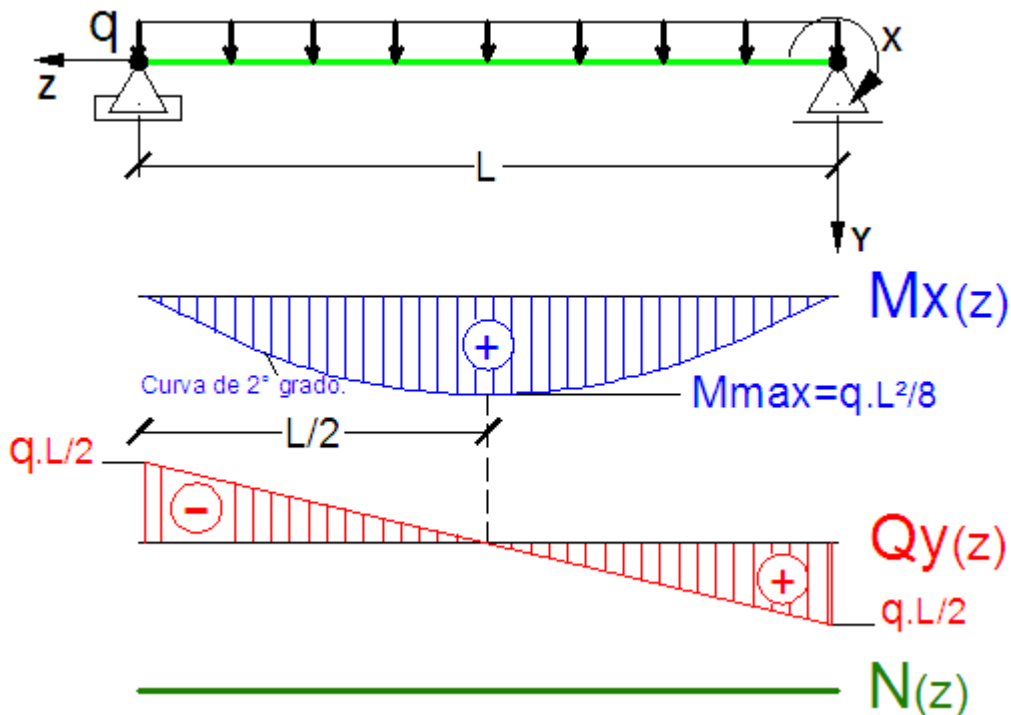


De acuerdo al procedimiento indicado en el **Ejemplo N°1** se determinan los esfuerzos característicos en las secciones de interés. Los resultados se indican a continuación:

$$M_{x1}=0 \quad Q_{y1}=-qL/2 \quad N_1=0 \quad M_{x2}=M_{max}=qL^2/8 \quad Q_{y2}=0 \quad N_2=0$$

$$M_{x3}=0 \quad Q_{y3}=qL/2 \quad N_3=0$$

Se trazan a continuación los diagramas de características y luego, haciendo uso de las relaciones diferenciales, se justifica dicho trazado.



Justificación del trazado.

Se parte de la relaciones diferenciales: $dM_x(z)/dz=Q_y(z)$ $dQ_y(z)/dz=-q_z(z)$ $dN(z)/dz=-Q_z(z)$

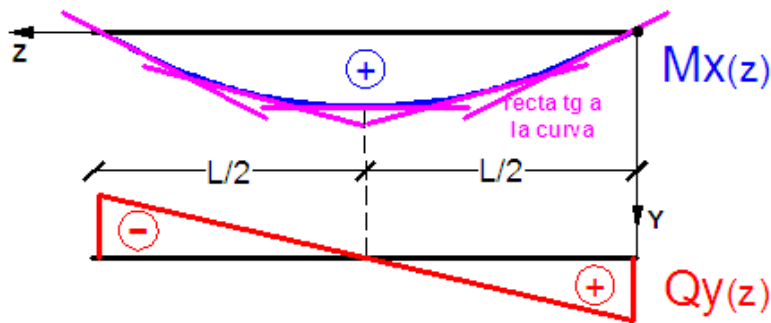
Obsérvese que en toda la estructura la fuerza distribuida transversal al eje de barra ($q_y(z)$) es constante. Consecuentemente la función esfuerzo de corte ($Q_y(z)$) debe resultar lineal y la función momento flexor ($M_x(z)$) debe resultar cuadrática.

Si se analiza la función momento flexor y se tiene en cuenta la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto, puede observarse que en el tramo comprendido entre $0 \leq z < L/2$ la recta tangente a la curva presenta pendiente positiva decreciente.

En $z=L/2$ la recta tangente a la curva presenta pendiente nula (la función pasa por un máximo).

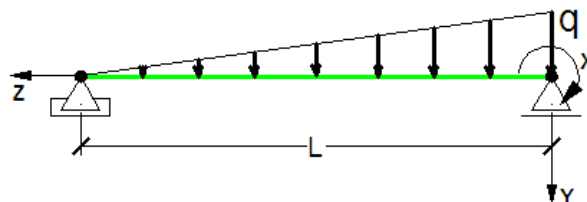
Finalmente en el tramo $L/2 < z \leq L$ la recta tangente a la curva presenta pendiente negativa creciente.

Todo lo expresado queda reflejado en la derivada de la función momento flexor que es la función esfuerzo de corte. Se grafica:

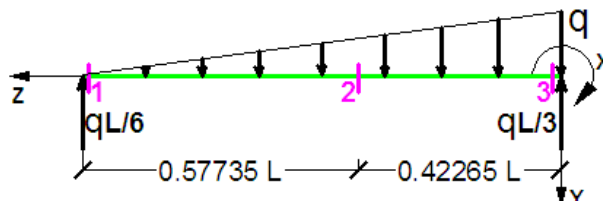


Por otra parte, considerando que la fuerza distribuida de dirección coincidente con el eje de barra ($q_z(z)$) vale cero, entonces la función esfuerzo normal es constante.

Ejemplo N°4: Viga simplemente apoyada cargada con fuerza distribuida de variación lineal y de dirección perpendicular al eje de barra.



Se indica a continuación el diagrama de cuerpo libre con las secciones transversales de interés:



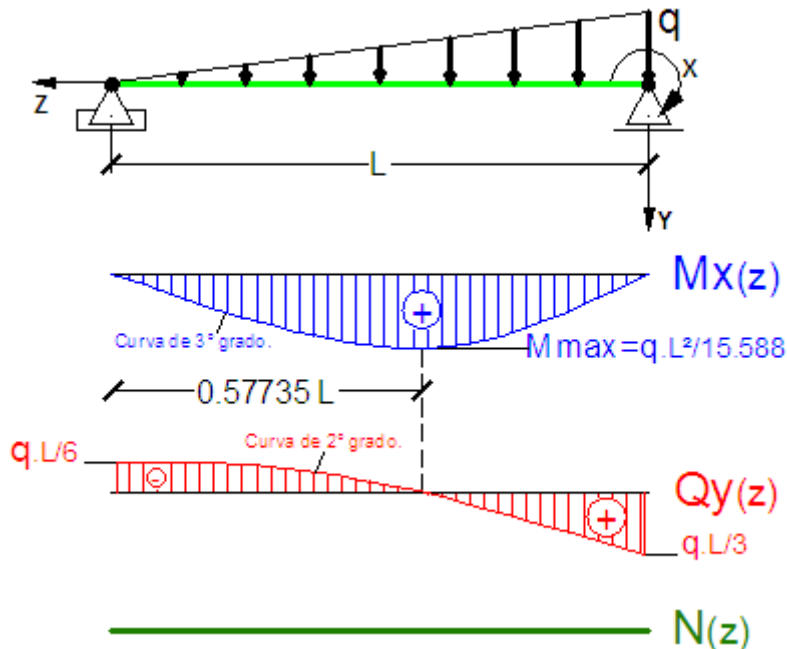
De acuerdo al procedimiento indicado en el **Ejemplo N°1** se determinan los esfuerzos característicos en las secciones de interés. Los resultados se indican a continuación:

$$M_{x1}=0 \quad Q_{y1}=-qL/6 \quad N_1=0$$

$$M_{x2}=M_{max}=qL^2/15.588 \quad Q_{y2}=0 \quad N_2=0$$

$$M_{x3}=0 \quad Q_{y3}=qL/3 \quad N_3=0$$

Se trazan a continuación los diagramas de características y luego, haciendo uso de las relaciones diferenciales, se justifica dicho trazado.



Justificación del trazado.

Se parte de la relaciones diferenciales: $dM_x(z)/dz=Q_y(z) \quad dQ_y(z)/dz=-q_y(z) \quad dN_z(z)/dz=-q_z(z)$

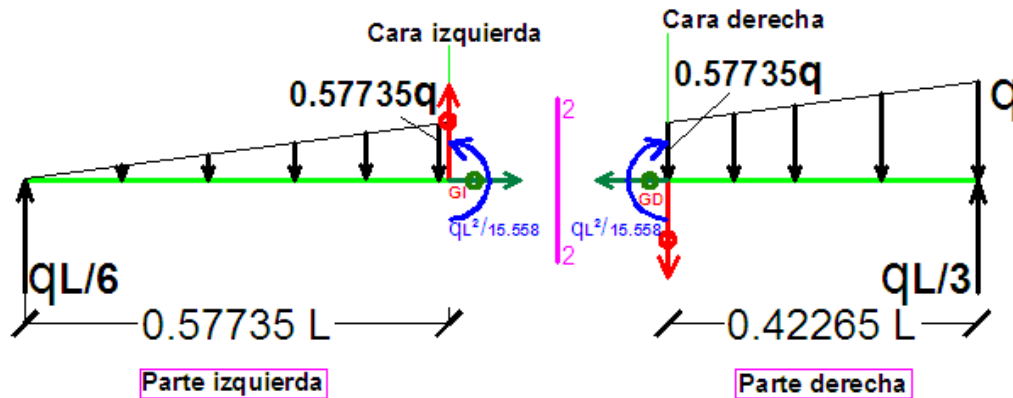
Obsérvese que en toda la estructura la fuerza distribuida transversal al eje de barra ($q_y(z)$) es de variación lineal. Consecuentemente la función esfuerzo de corte ($Q_y(z)$) debe resultar cuadrática y la función momento flexor ($M_x(z)$) debe resultar cúbica.

El análisis de pendientes de la recta tangente es idéntico al del ejemplo anterior. Se propone al lector su desarrollo.

Téngase presente que la función carga distribuida $q_y(z)$ es la derivada de la función esfuerzo de corte, por lo tanto la recta tangente a esta ultima función debe presentar pendiente nula en $z=L$ dado que en dicha sección resulta $q_y(z)=0$.

Por otra parte, considerando que la fuerza distribuida de dirección coincidente con el eje de barra ($q_z(z)$) vale cero, entonces la función esfuerzo normal es constante.

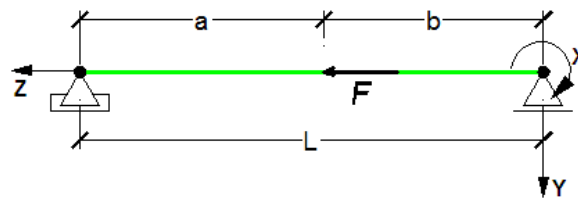
Se verifica a continuación que en la **sección transversal 2** ($z=0.57735L$) resulta $Q_y=0$ y se determina el valor de $M_{\text{máximo}}$. Entonces:



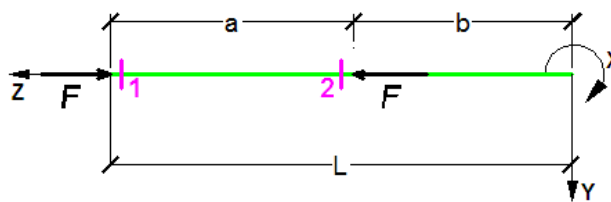
$$Q_{y2} = -0,166qL + 0,5 \cdot 0,57735q \cdot 0,57735L = -0,166qL + 0,166qL = 0$$

$$M_{x2} = M_{\text{max}} = 0,166qL \cdot 0,57735L - 0,5 \cdot 0,57735q \cdot 0,57735L \cdot 0,19245L = \boxed{qL^2/15.588}$$

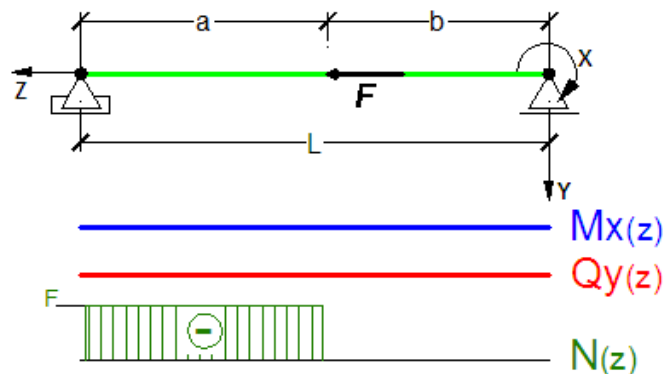
Ejemplo N°5: Viga simplemente apoyada cargada con una fuerza concentrada de dirección coincidente con el eje de barra.



Se indica a continuación el diagrama de cuerpo libre con las secciones transversales de interés:

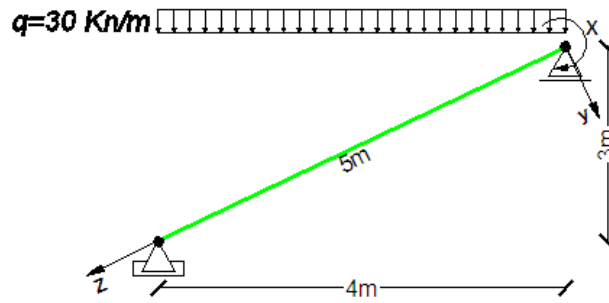


Se trazan en lo que sigue los diagramas de características.

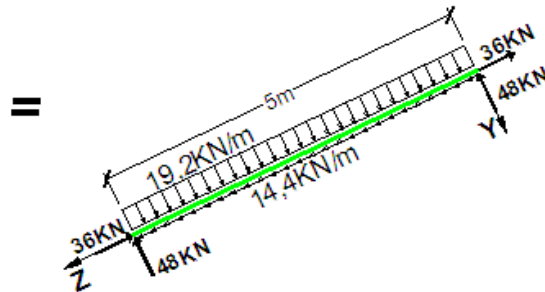
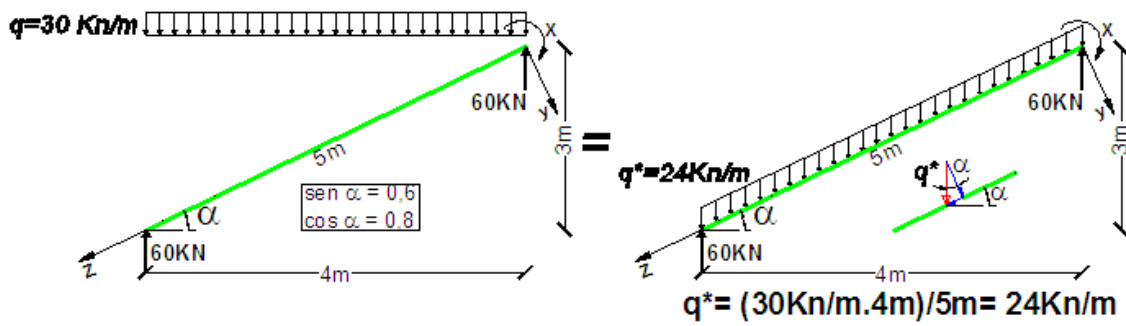


Considerando que la fuerza distribuida de dirección coincidente con el eje de barra ($q_z(z)$) vale cero, entonces la función esfuerzo normal es constante.

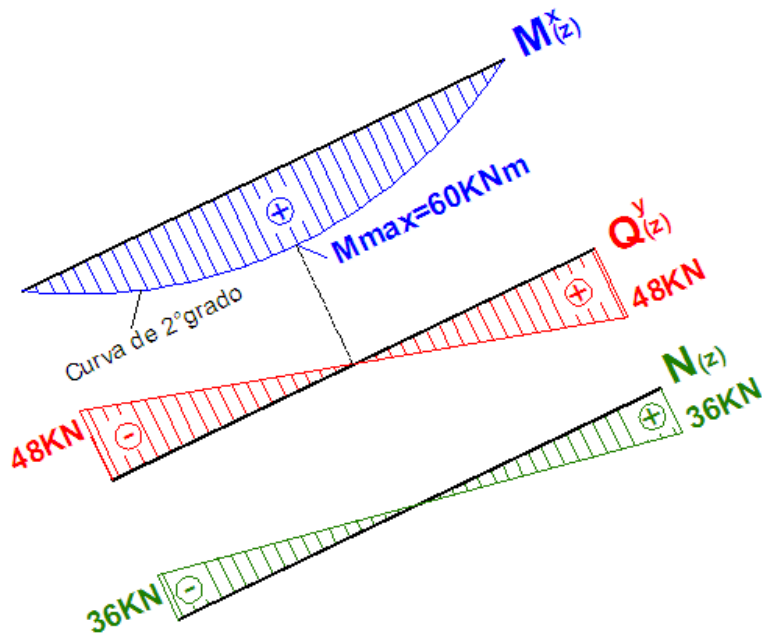
Ejemplo N°6: [Viga simplemente apoyada inclinada](#) cargada con [fuerza distribuida de valor constante](#).



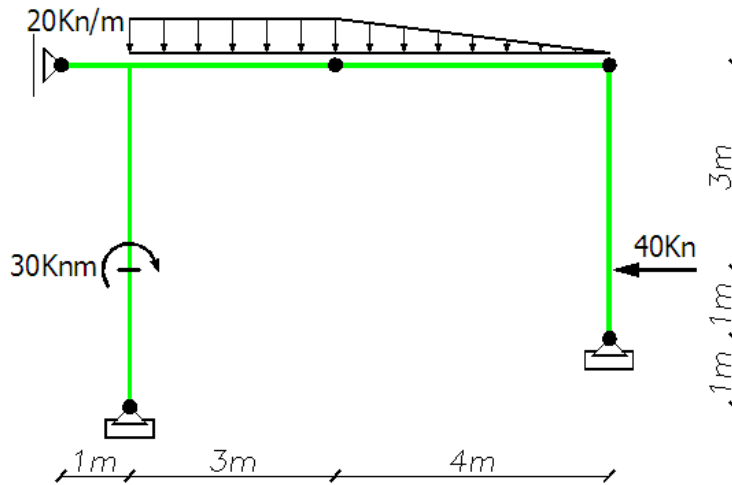
Se indica a continuación el **diagrama de cuerpo libre**.



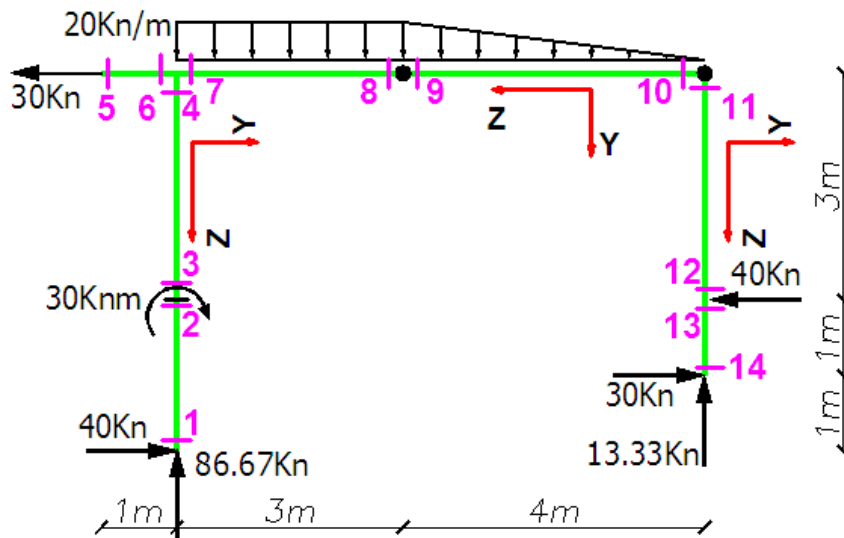
Finalmente se trazan los [diagramas de características](#).



Ejemplo N°7: [Cadena cinemática abierta de tres chapas.](#)



Se indica a continuación el [diagrama de cuerpo libre](#), las [secciones transversales de interés](#) y las [ternas locales](#).



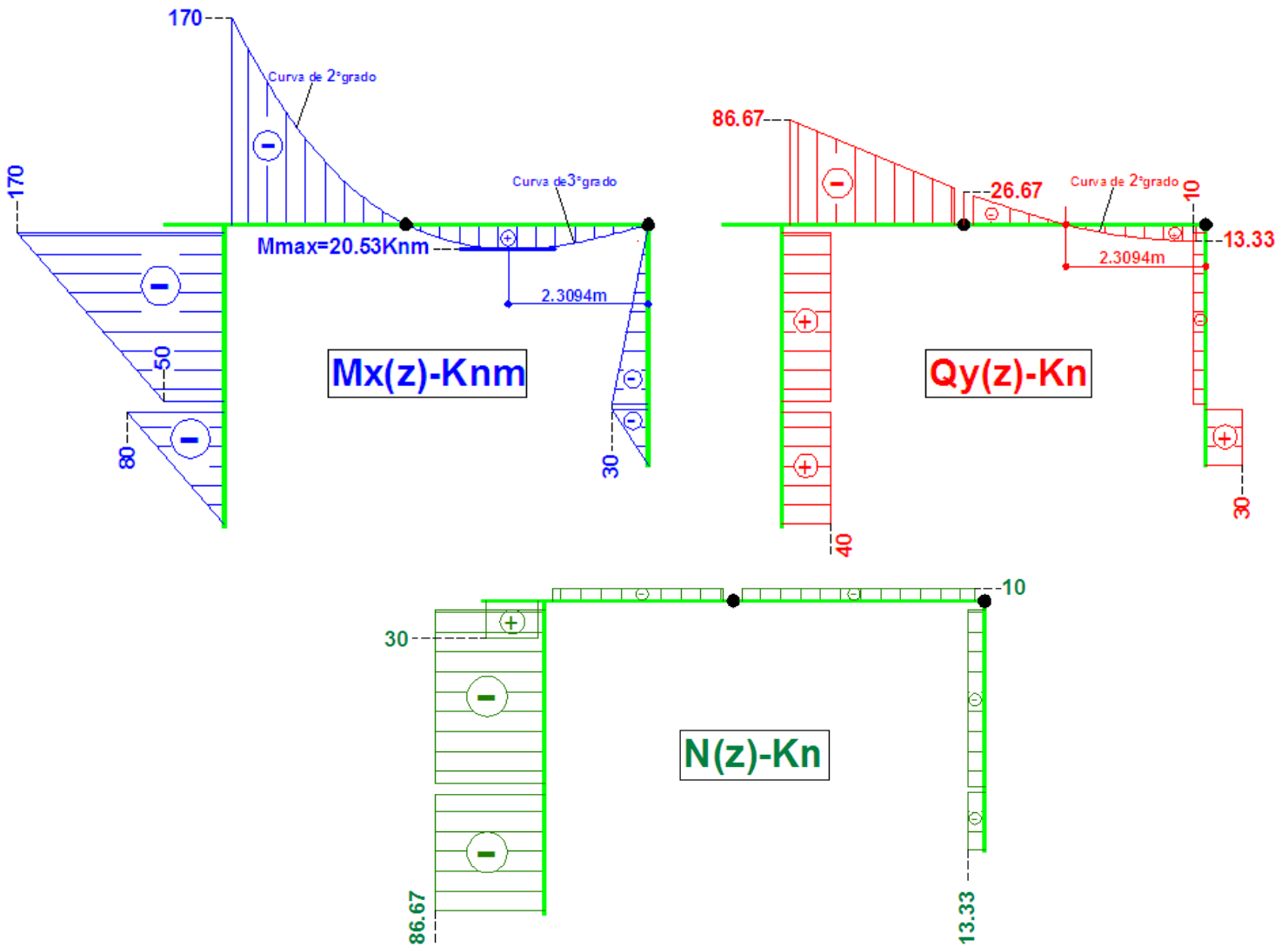
Se confecciona una tabla con los [esfuerzos característicos en las secciones transversales de interés \(STI\)](#).

STI	$M_x(z)$ -Knm	$Q_y(z)$ -Kn	$N(z)$ -Kn
1	0	40	-86.67
2	-80	40	-86.67
3	-50	40	-86.67
4	-170	40	-86.67
5	0	0	30
6	0	0	30
7	-170	-86.67	-10

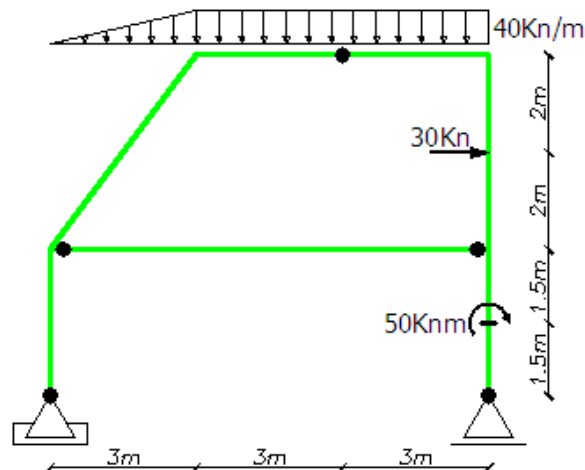
STI	$M_x(z)$ -Knm	$Q_y(z)$ -Kn	$N(z)$ -Kn
8	0	-26.67	-10
9	0	-26.67	-10
10	0	13.33	-10
11	0	-10	-13.33
12	-30	-10	-13.33
13	-30	30	-13.33
14	0	30	-13.33

Finalmente se trazan los diagramas de características teniendo en cuenta las relaciones diferenciales:

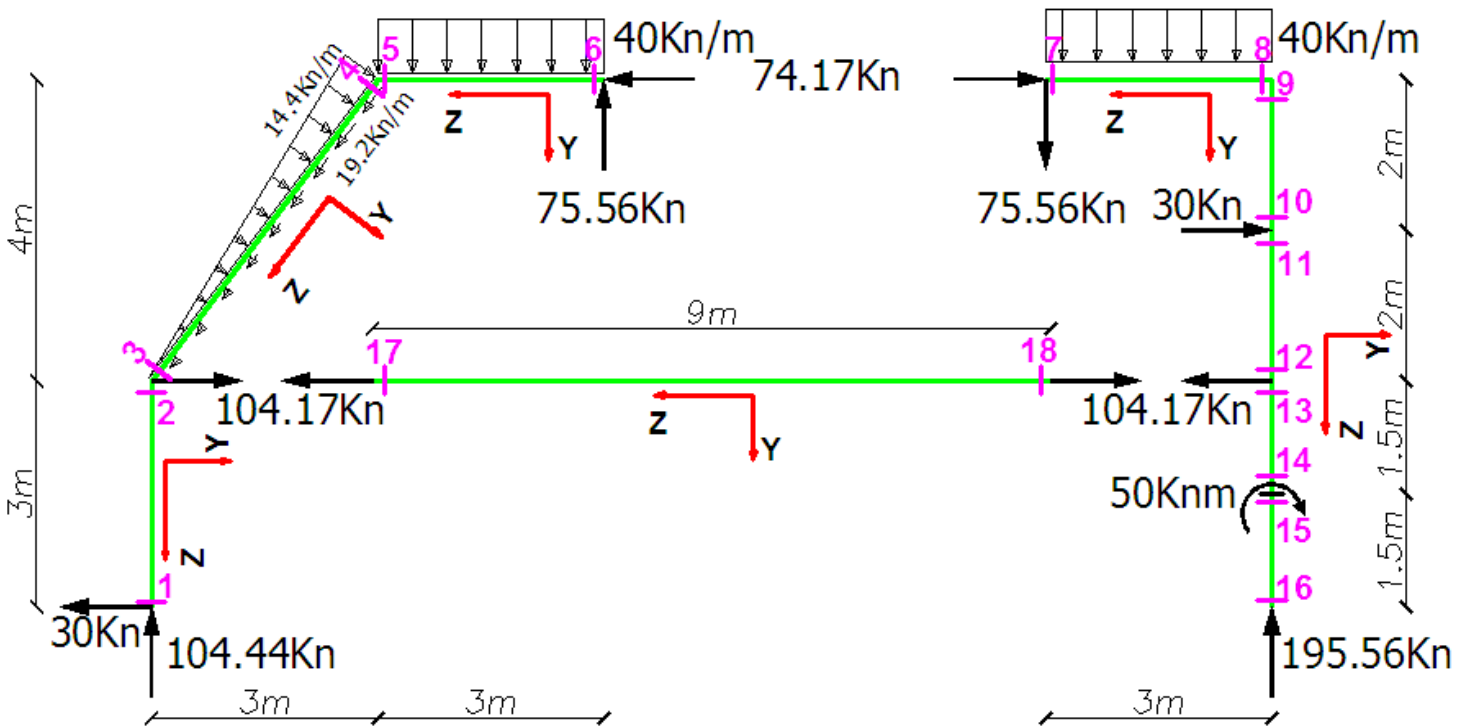
$$dMx(z)/dz=Qy(z) \quad dQy(z)/dz=-qy(z) \quad dN(z)/dz=-qz(z)$$



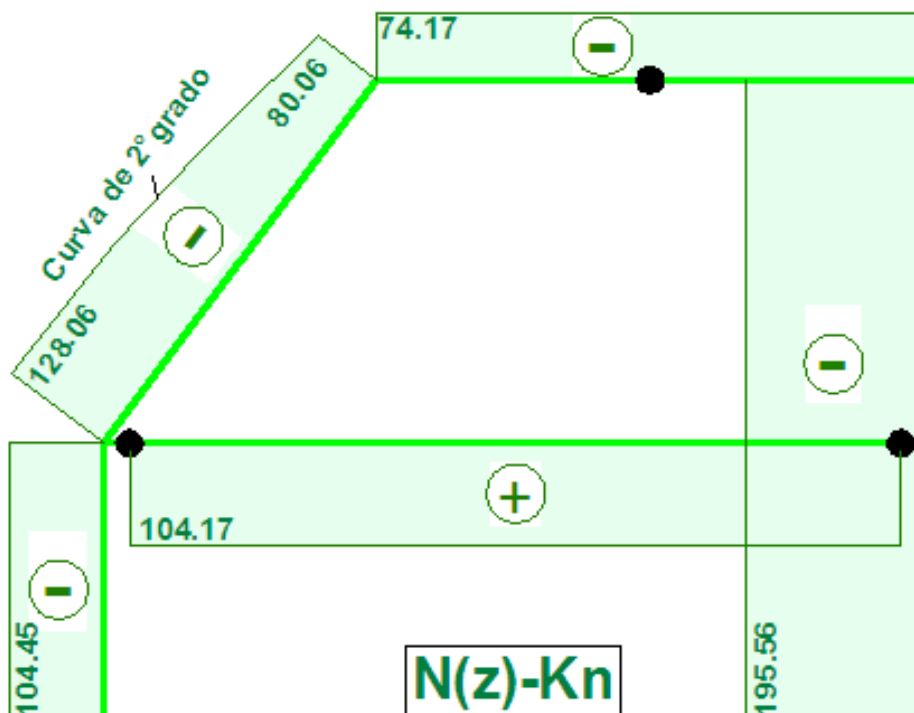
Ejemplo N°8: Cadena cinemática cerrada de tres chapas.

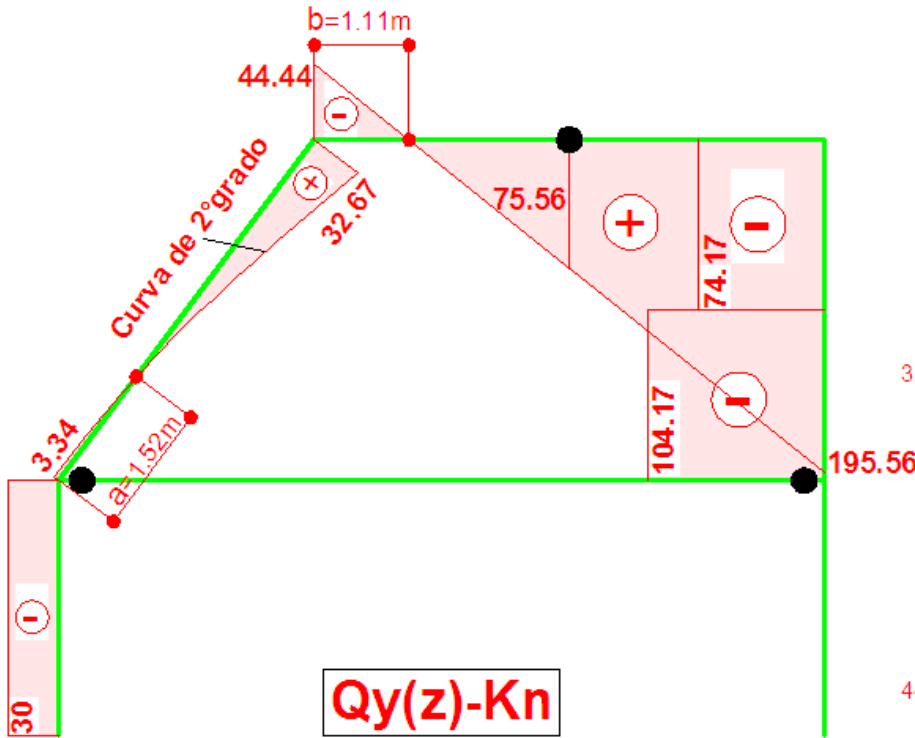


Se indica a continuación el [diagrama de cuerpo libre con la estructura separada en sus chapas componentes](#), las [secciones transversales de interés](#) y las [ternas locales](#).

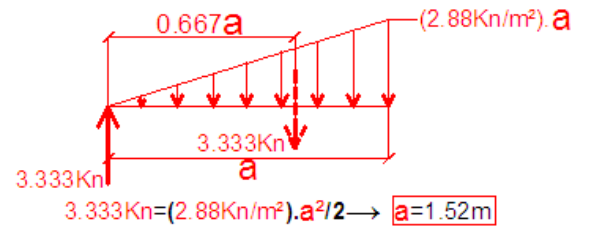


De acuerdo al procedimiento conocido (determinación de los [esfuerzos característicos](#) en [secciones transversales de interés](#) y aplicación de las [relaciones diferenciales](#)) se trazan a continuación los [diagramas de características](#).

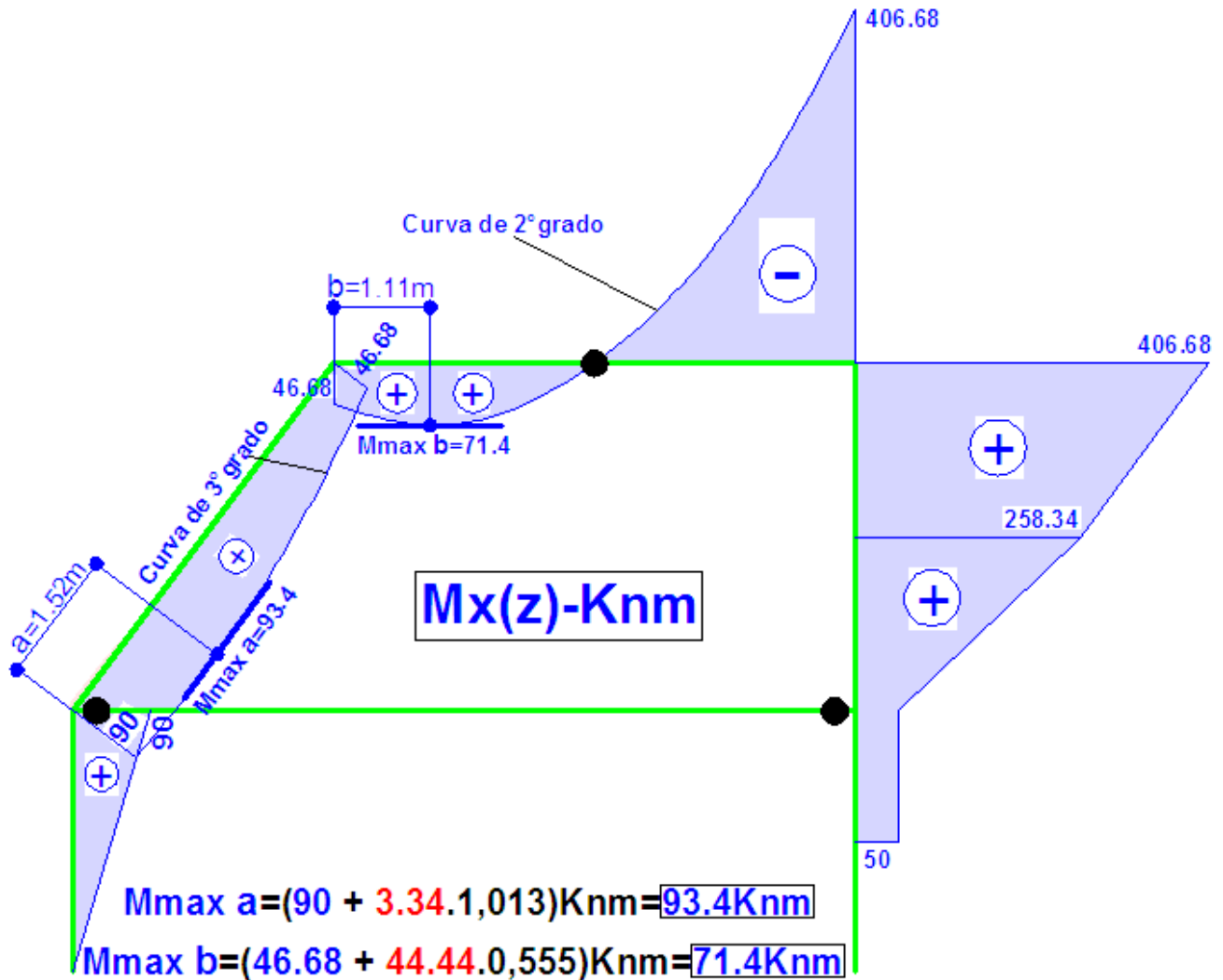
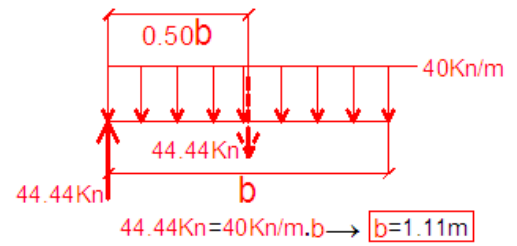




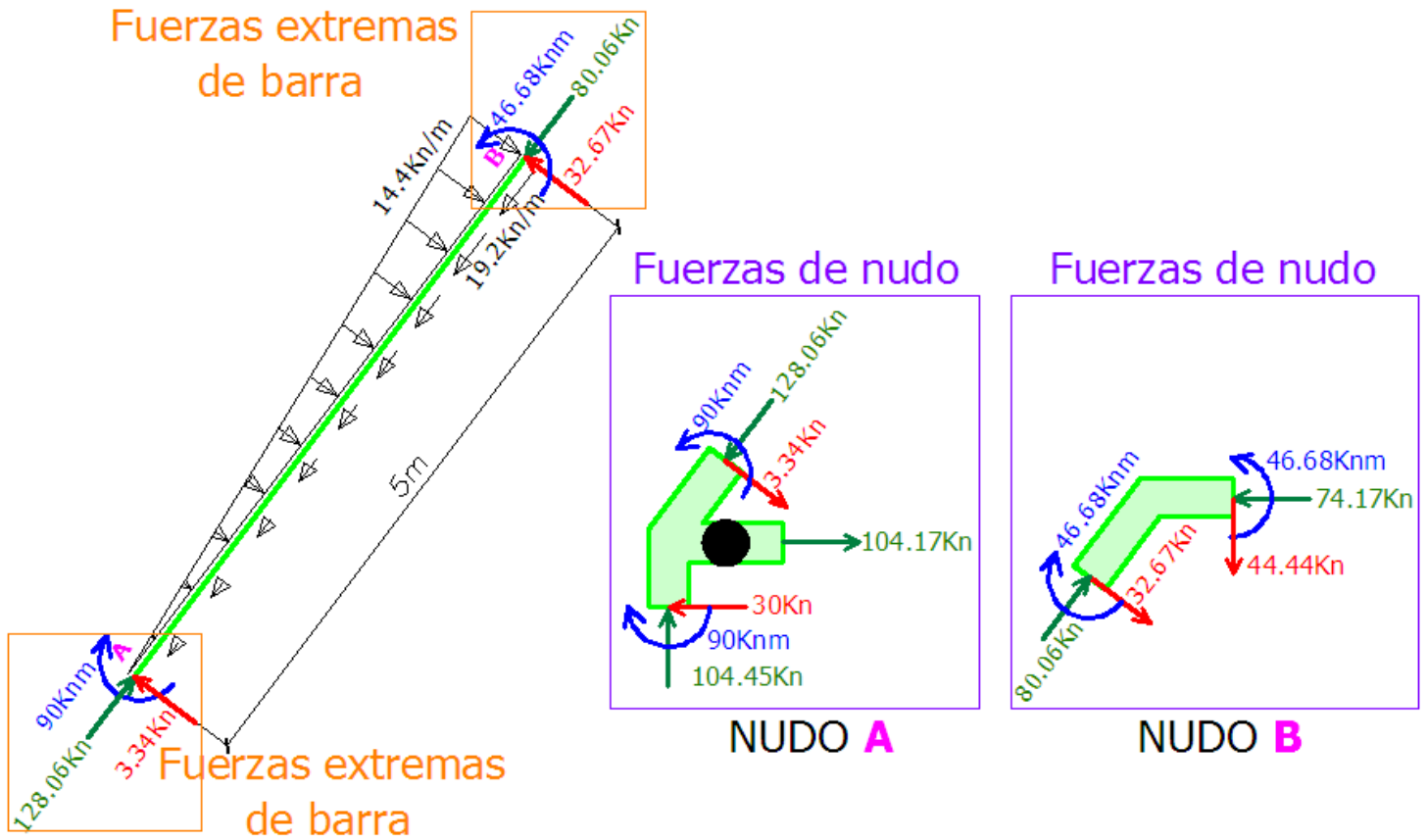
Determinación de la distancia a



Determinación de la distancia b



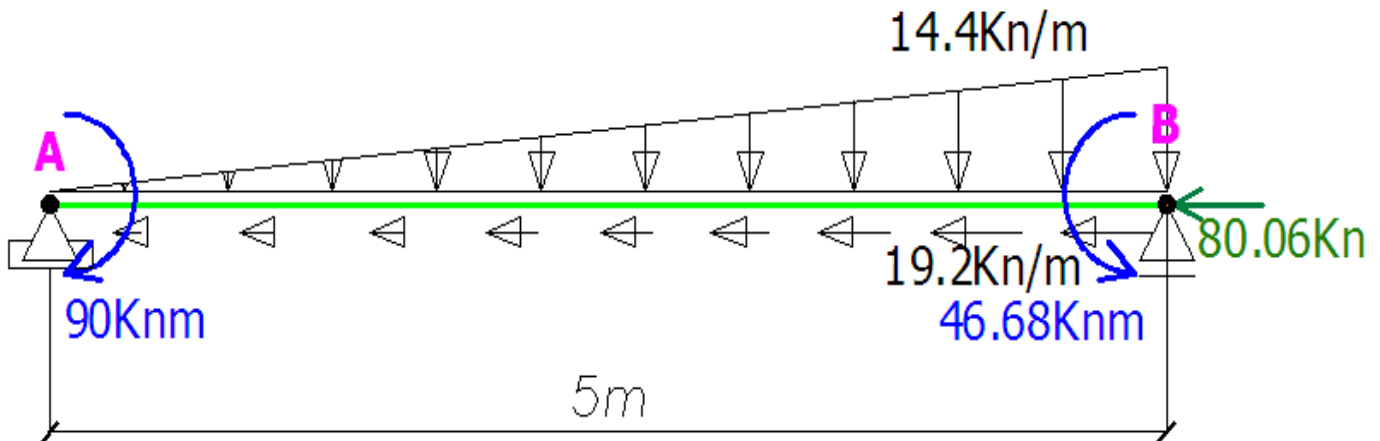
En lo que sigue se indica el diagrama de cuerpo libre de la barra inclinada de la estructura analizada como así también de los nudos a los cuales se conecta:



Las **fuerzas extremas de barra** se determinan leyendo los diagramas de características previamente trazados y las **fuerzas de nudo** haciendo uso del principio de acción y reacción.

Puede comprobar el lector el equilibrio de los sistemas de fuerzas que actúan en la barra y en los nudos.

Horizontalizando la barra inclinada es posible la siguiente representación grafica considerando a dicha barra como una viga simplemente apoyada:



Del análisis de la viga simplemente apoyada y haciendo actuar los estados de carga de a uno a la vez resulta la descomposición de diagramas de características que continúa:

Diagrama de momento flexor (Knm).

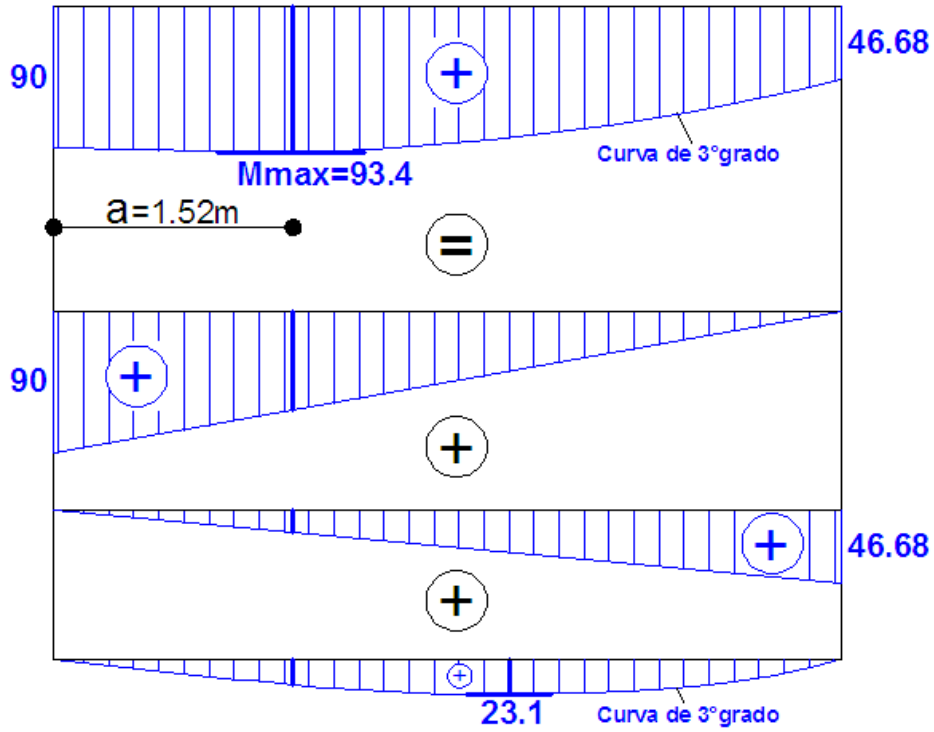


Diagrama de esfuerzo de corte (Kn).

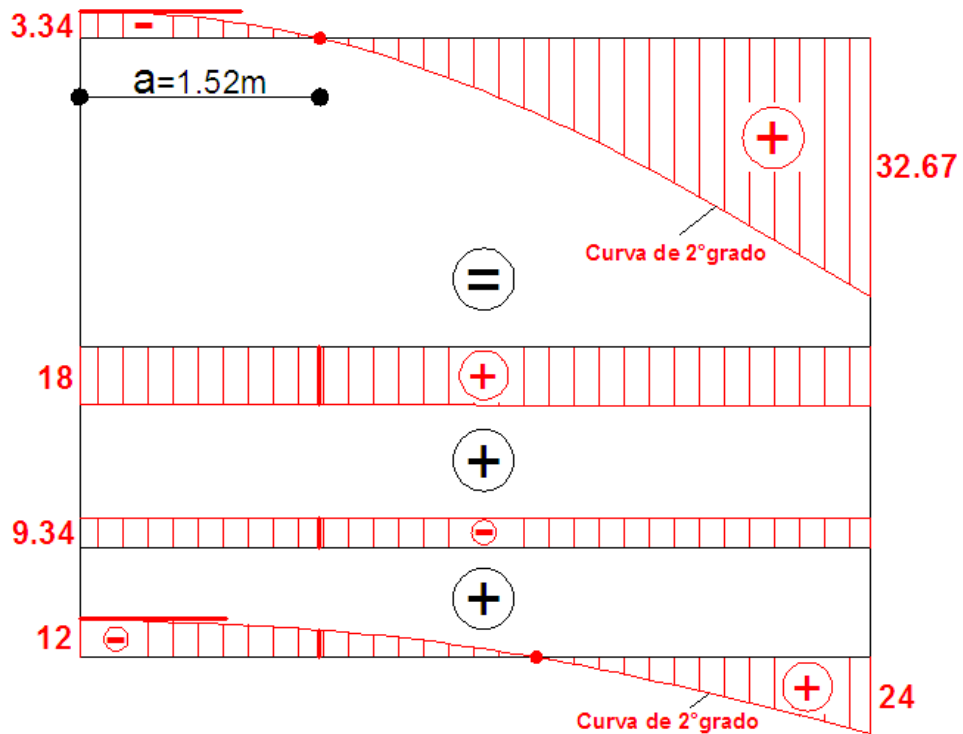
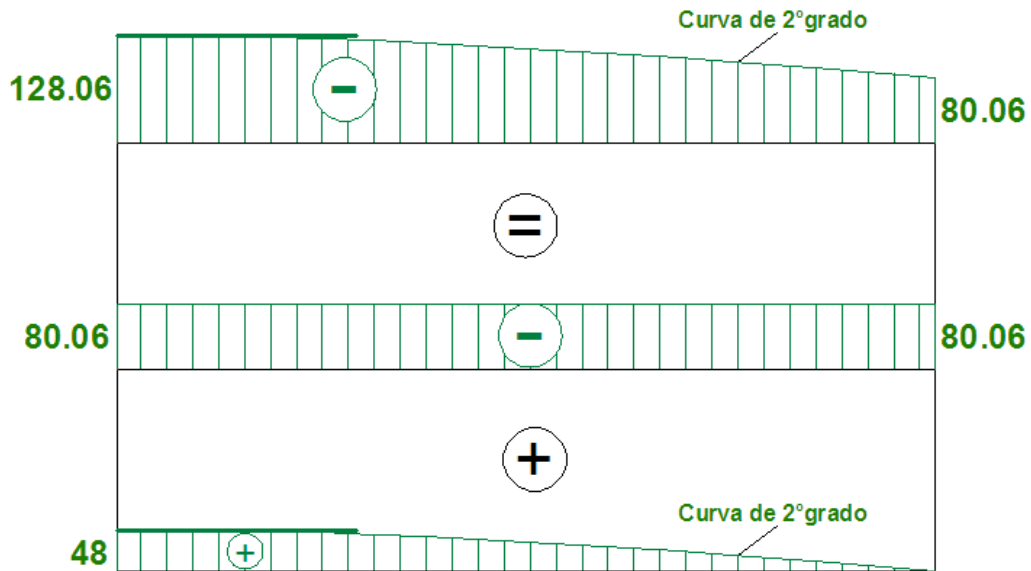


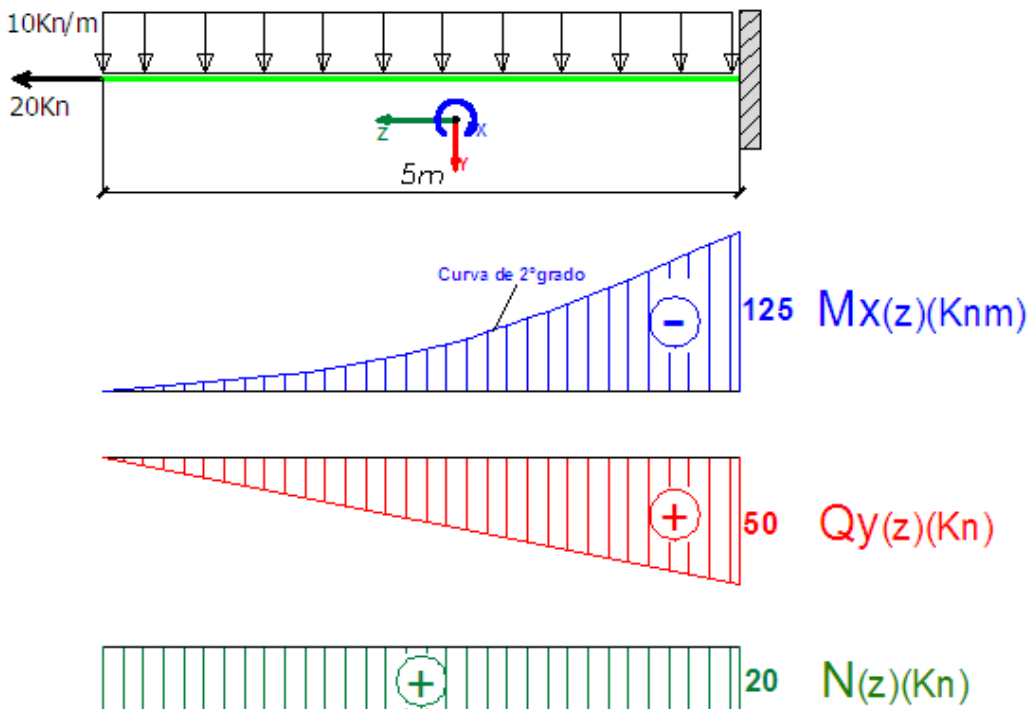
Diagrama de esfuerzo normal (Kn).



El lector deberá dedicar el tiempo necesario a comprender la descomposición precedentemente efectuada.

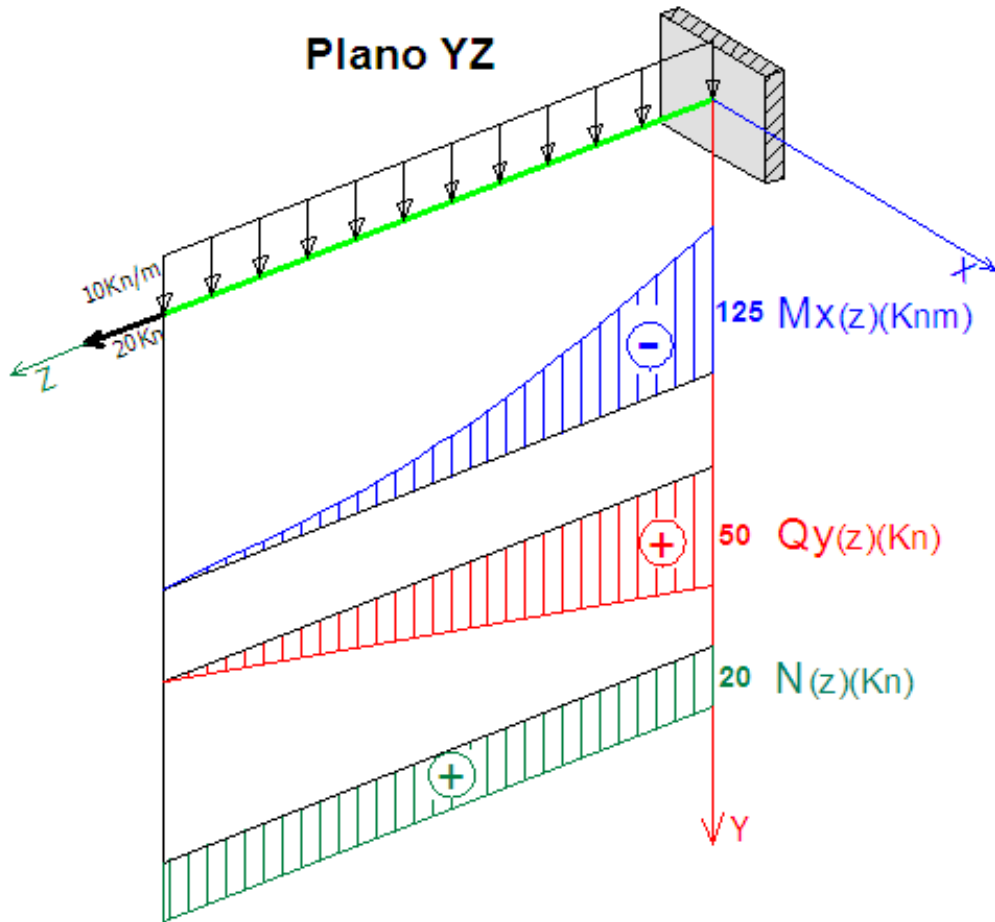
ANALISIS DE ESTRUCTURAS ESPACIALES.

Sea la siguiente estructura denominada ménsula o voladizo solicitada como se muestra:

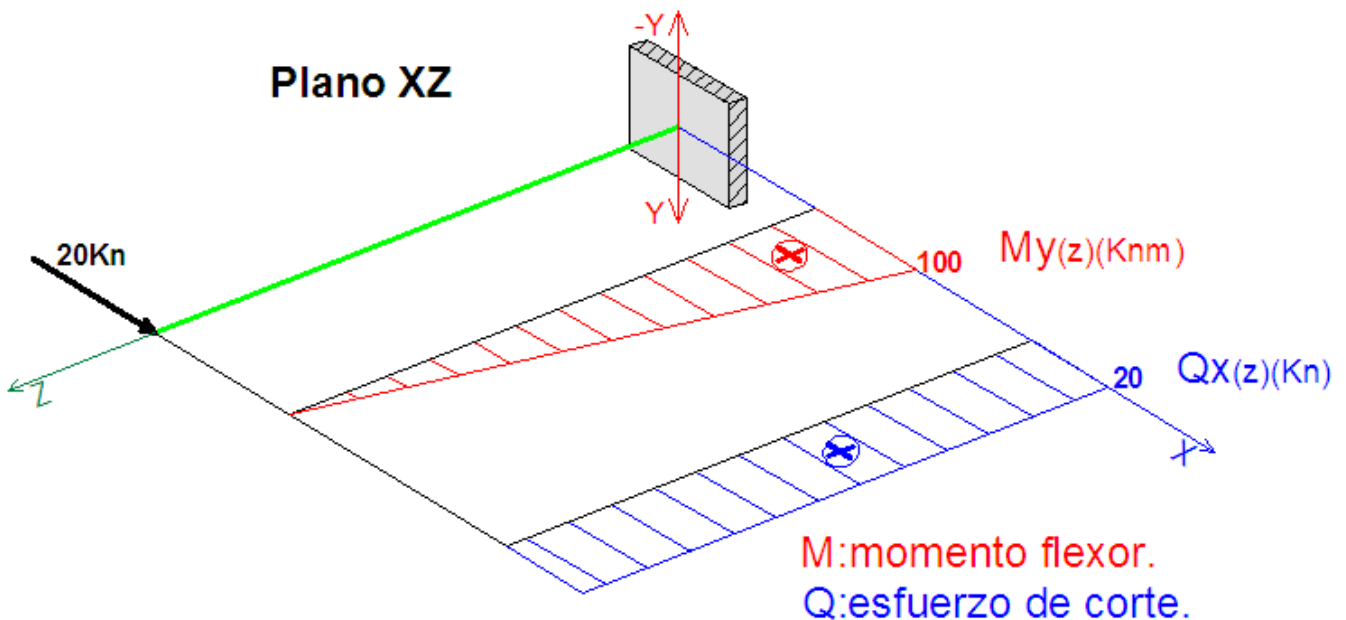


Obsérvese que la estructura se encuentra **contenida en el plano ZY** y consecuentemente se han trazado los diagramas de características correspondientes.

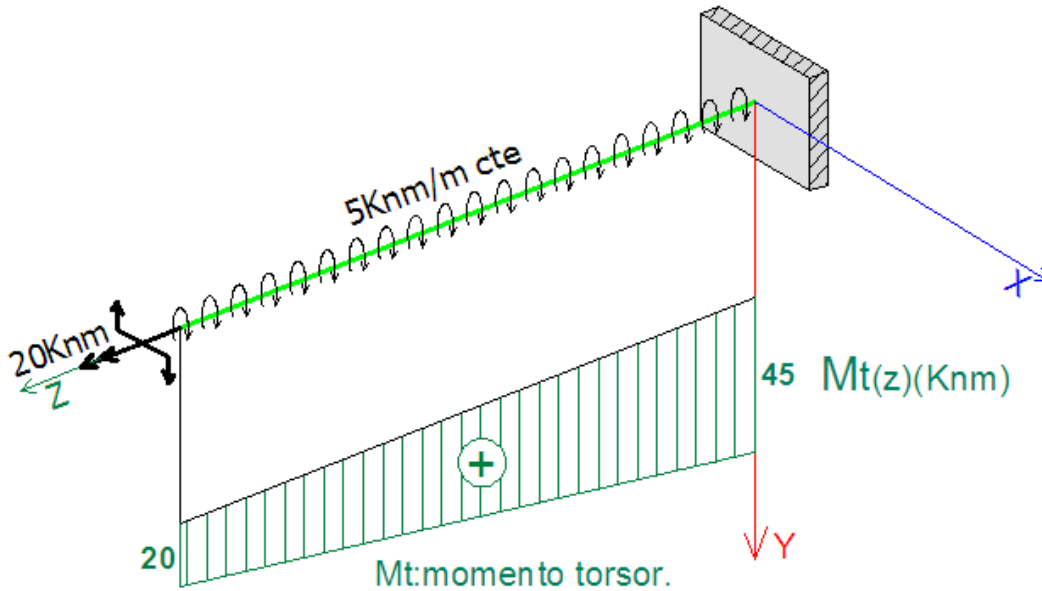
Si a continuación a [idéntica estructura](#) se le da [carácter de espacial](#) resulta:



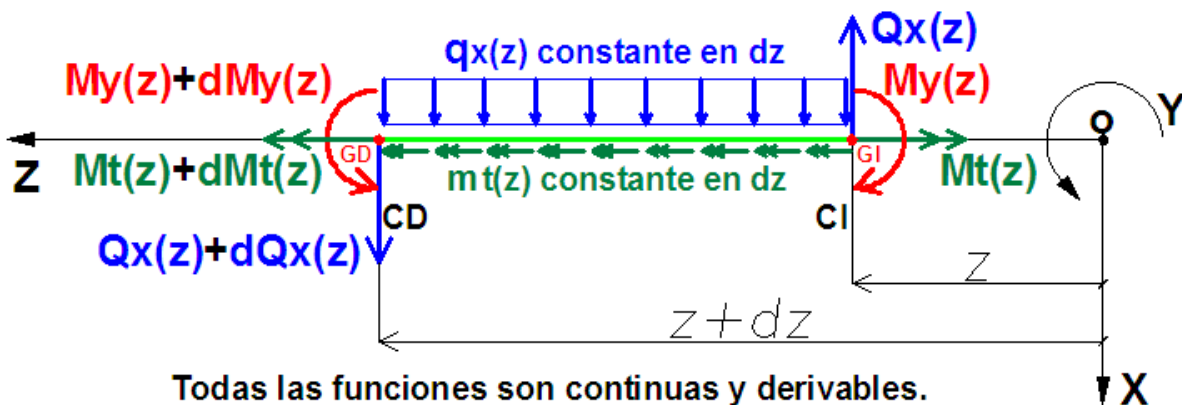
En la situación planteada, es posible aplicarle a la [estructura espacial](#) un [estado de carga](#) en el **plano ZX**. Se grafica lo indicado incluyendo los diagramas de características que resultan:



Finalmente, también es posible aplicarle a la estructura espacial cuplas de fuerzas cuyo vector momento coincide con el eje de barra resultando la principal diferencia entre las estructuras planas y espaciales. Se grafica:



A continuación se deducen las relaciones diferenciales referentes a los estados de carga y esfuerzos característicos incorporados a partir del tratamiento espacial de la estructura.



A continuación se plantean las ecuaciones de equilibrio por reducción del sistema de fuerzas al punto **GD**. Entonces:

$$M_z=0 \rightarrow Mt(z) + dMt(z) - Mt(z) + mt(z).dz=0 \rightarrow \boxed{dMt(z)/dz=-mt(z)}$$

$$R_x=0 \rightarrow Q_x(z) + dQ_x(z) - Q_x(z) + q_x(z).dz=0 \rightarrow \boxed{dQ_x(z)/dz=-q_x(z)}$$

$$M_y=0 \rightarrow My(z) + dMy(z) - My(z) + Q_x(z).dz - q_x(z).dz^2/2=0 \rightarrow \boxed{dMy(z)/dz=-Q_x(z)}$$

El término $q_x(z).dz^2/2$ se desprecia por ser un infinitésimo de orden superior.

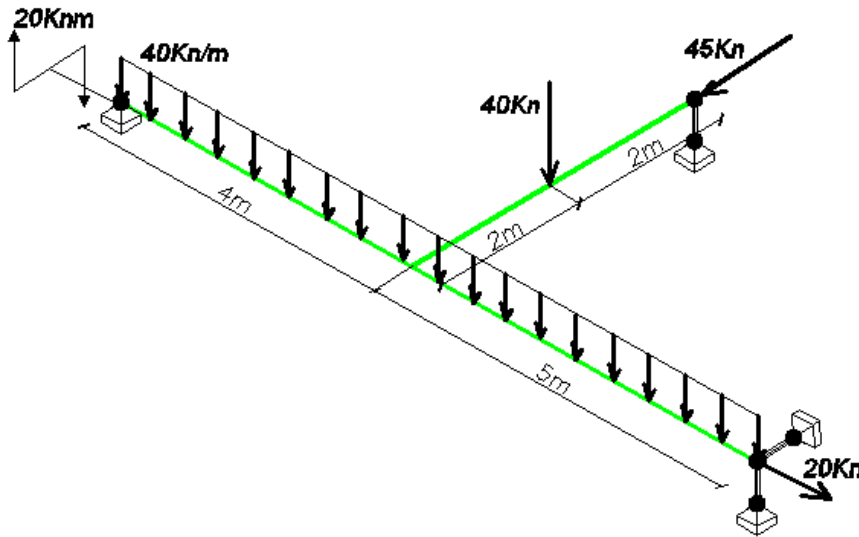
Se recomienda al lector revisar detalladamente la relación entre My y Qx.

Las estructuras diseñadas para resistir todos los esfuerzos característicos (**momento flexor**, **esfuerzo de corte**, **esfuerzo normal** y **momento torsor**) se denominan de **alma llena**.

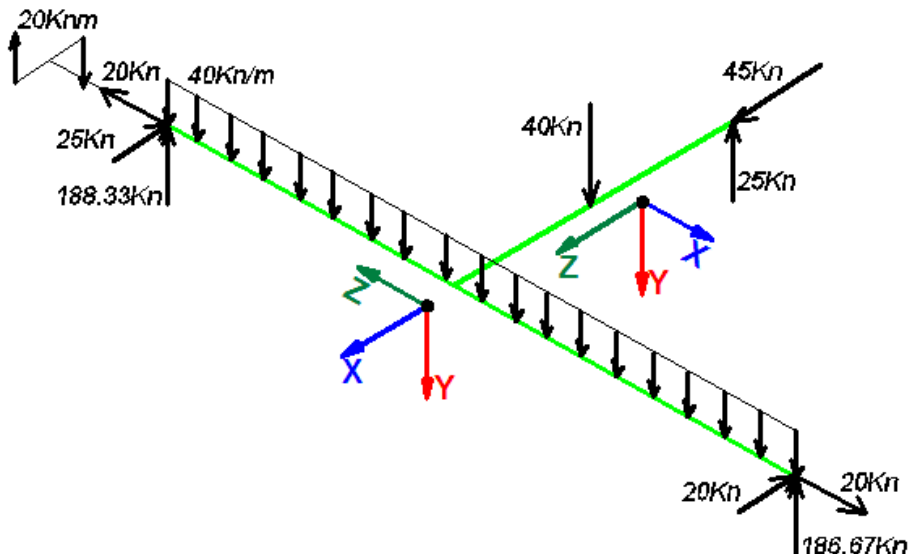
Por otra parte a las estructuras conformadas por **vigas y columnas** se las suele denominar **pórticos**.

EJEMPLOS DE TRAZADO DE DIAGRAMAS DE CARACTERÍSTICAS EN ESTRUCTURAS ESPACIALES.

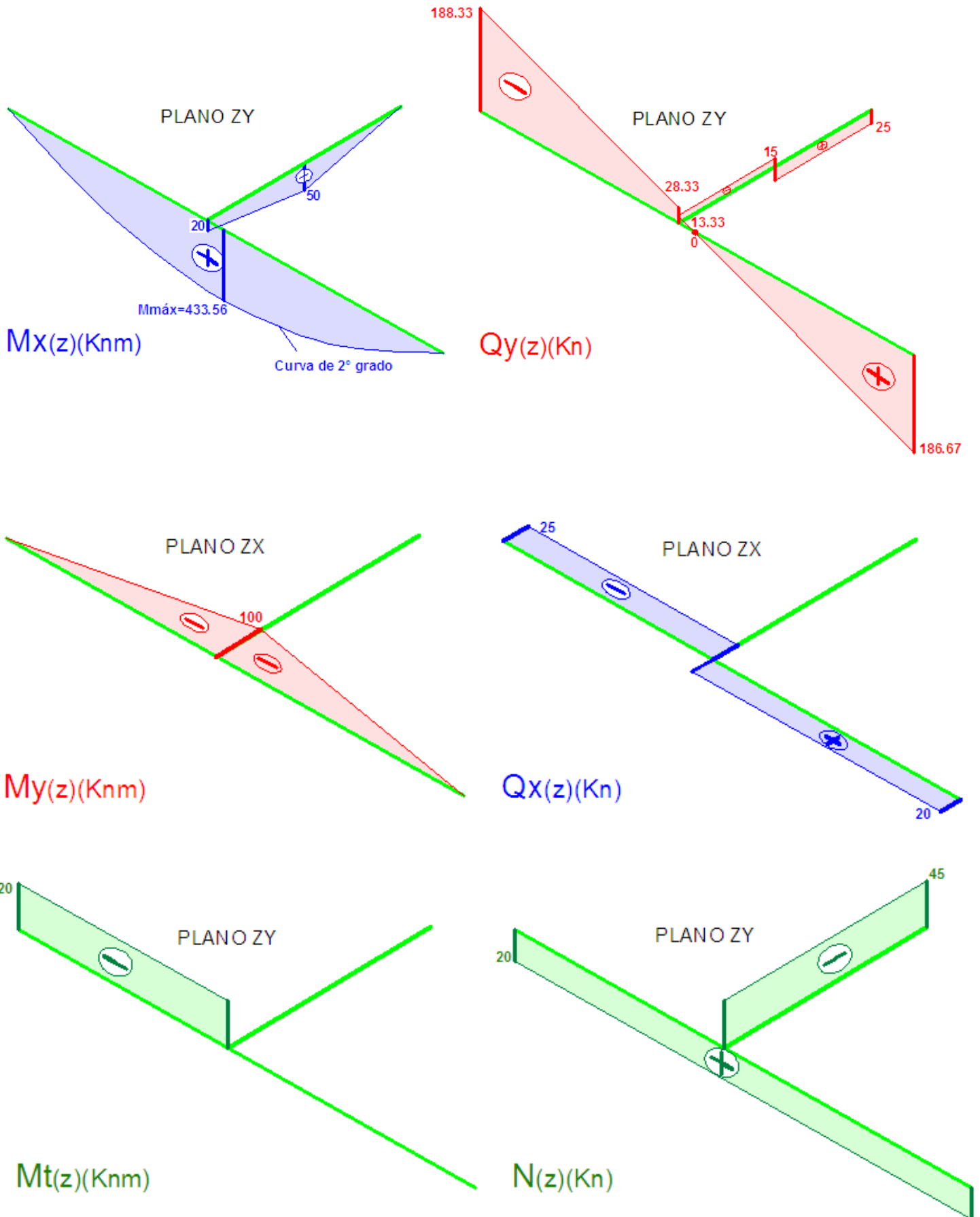
Ejemplo N°1: Estructura espacial contenida geoméricamente en un plano y solicitada por un estado de carga general.



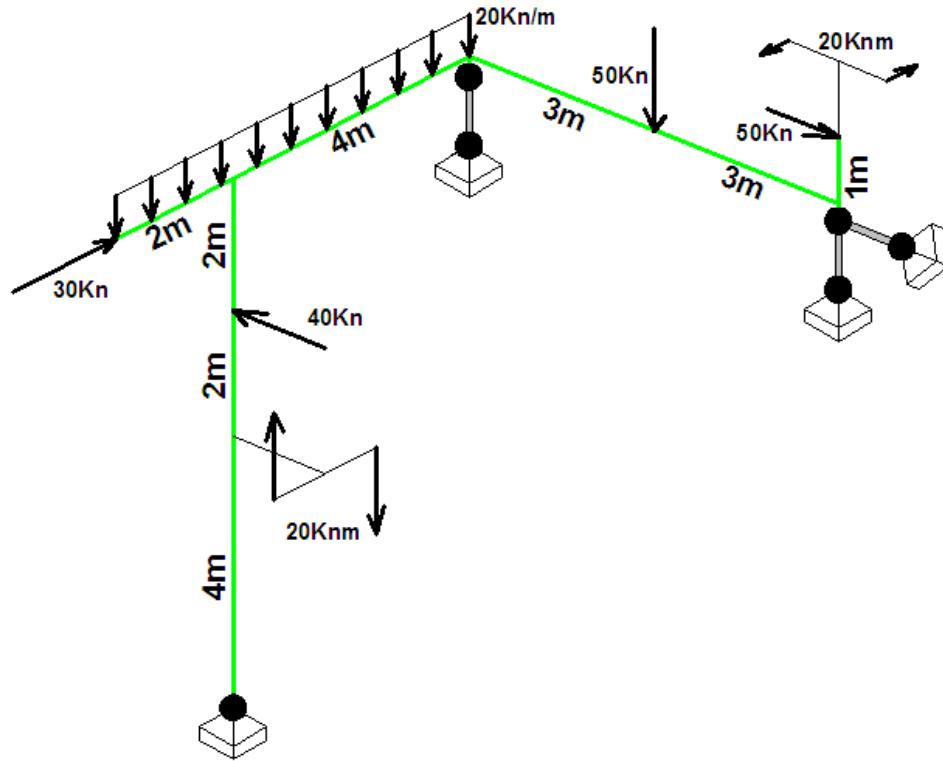
Se indica el diagrama de cuerpo libre y las ternas locales.



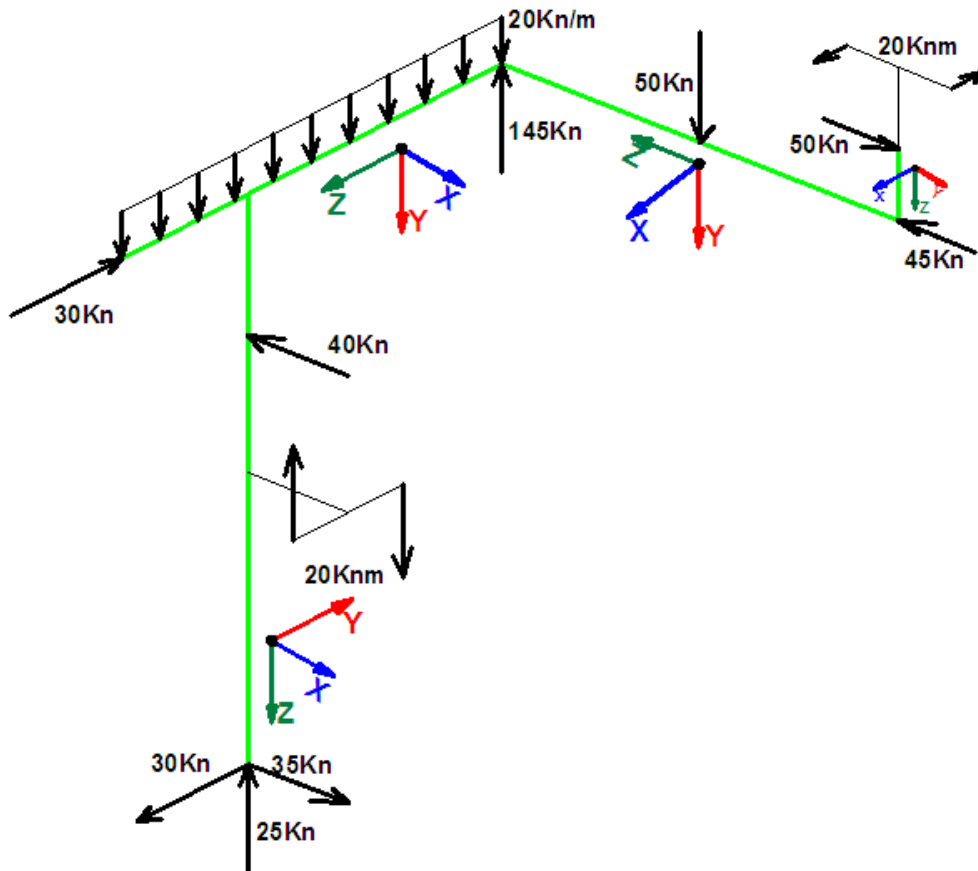
Los [diagramas de características](#) se representan a continuación:



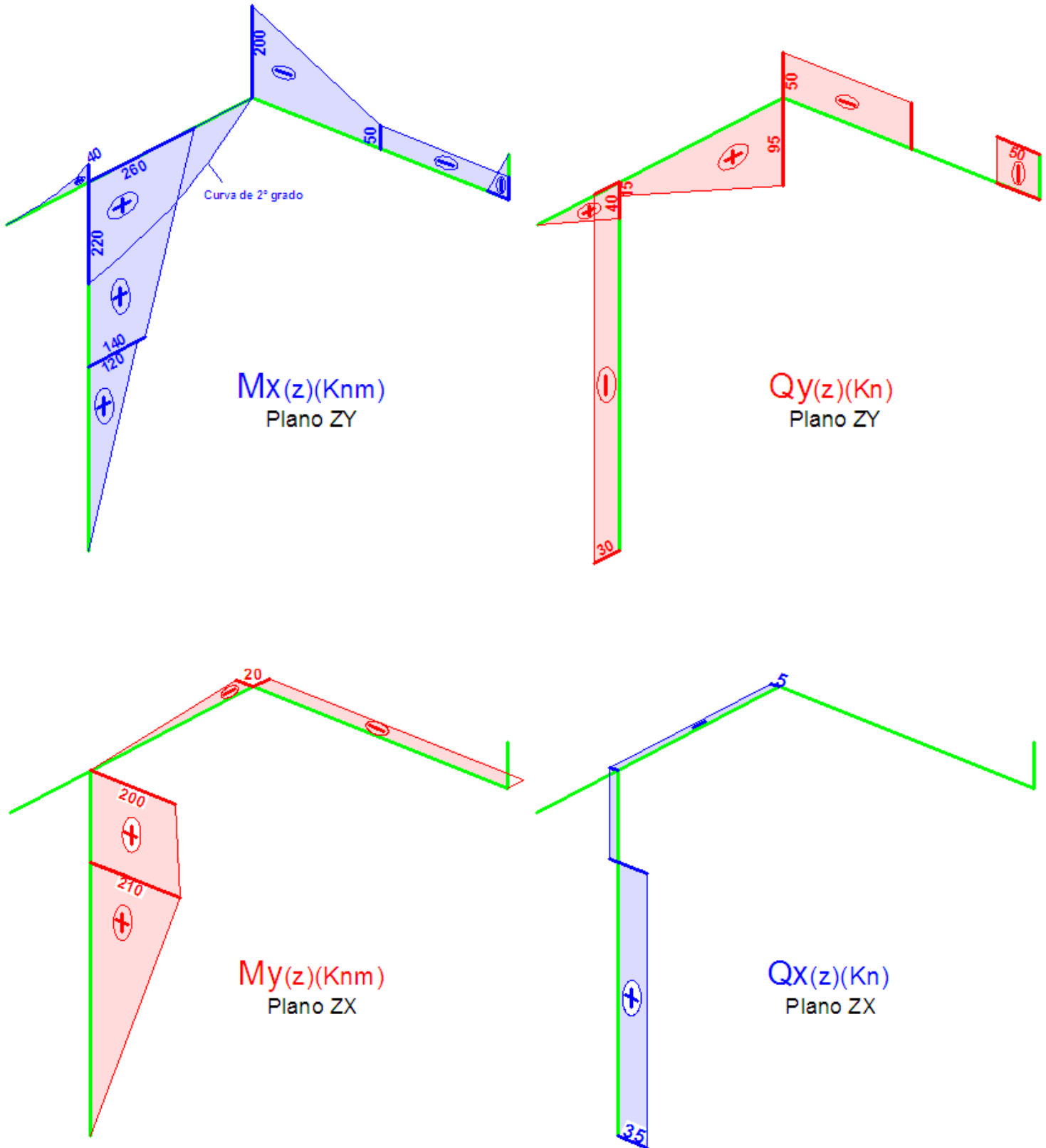
Ejemplo N°2: Estructura espacial [general](#) (sin ninguna particularidad).

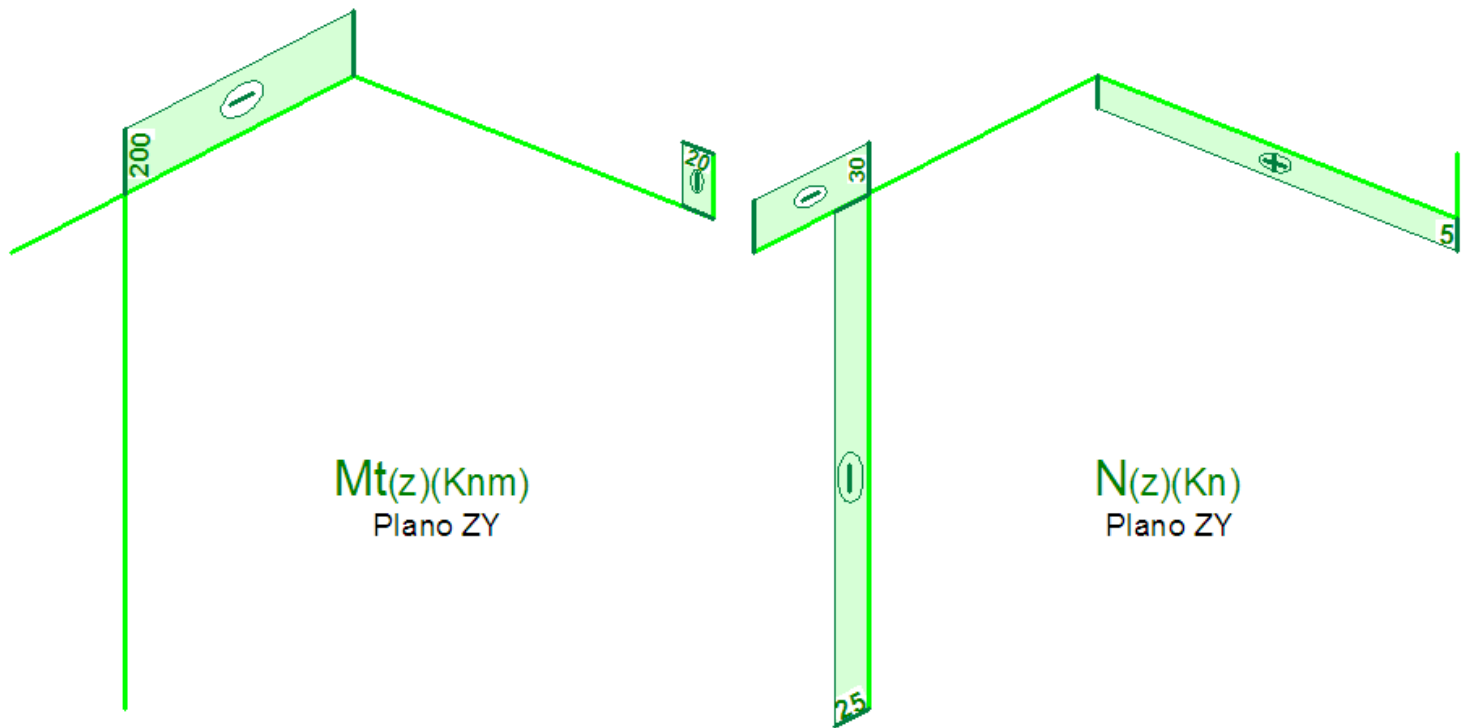


Se indica el [diagrama de cuerpo libre](#) y las [ternas locales](#).



En lo que sigue se trazan los [diagramas de características](#).

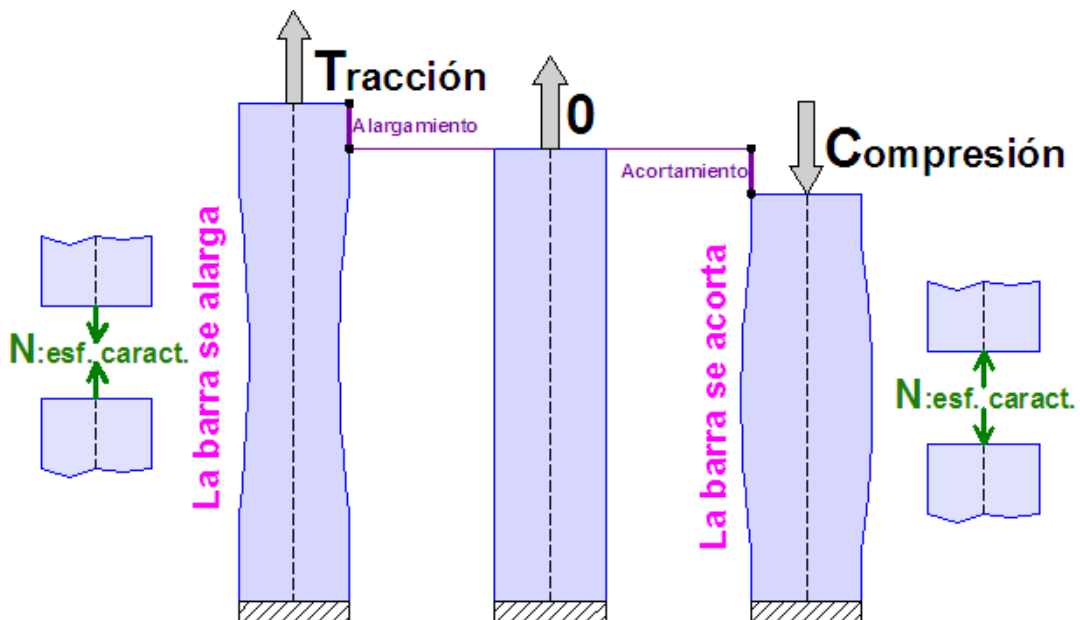




RELACION ENTRE LA DEFORMACION DE UNA BARRA SOLICITADA Y LOS ESFUERZOS CARACTERISTICOS.

Si bien la estática postula al cuerpo como infinitamente rígido, es necesario introducir el concepto de deformación (cambio de forma y de volumen del elemento estructural en estudio) con el objeto de poder comprender más acabadamente el motivo de la necesidad de aprender a determinar correctamente los esfuerzos característicos en una estructura solicitada.

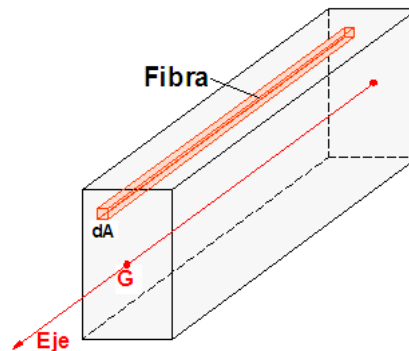
Como se dijo oportunamente, y el hecho físico es fácilmente entendible, una barra traccionada se alarga y una barra comprimida se acorta. Gráficamente:



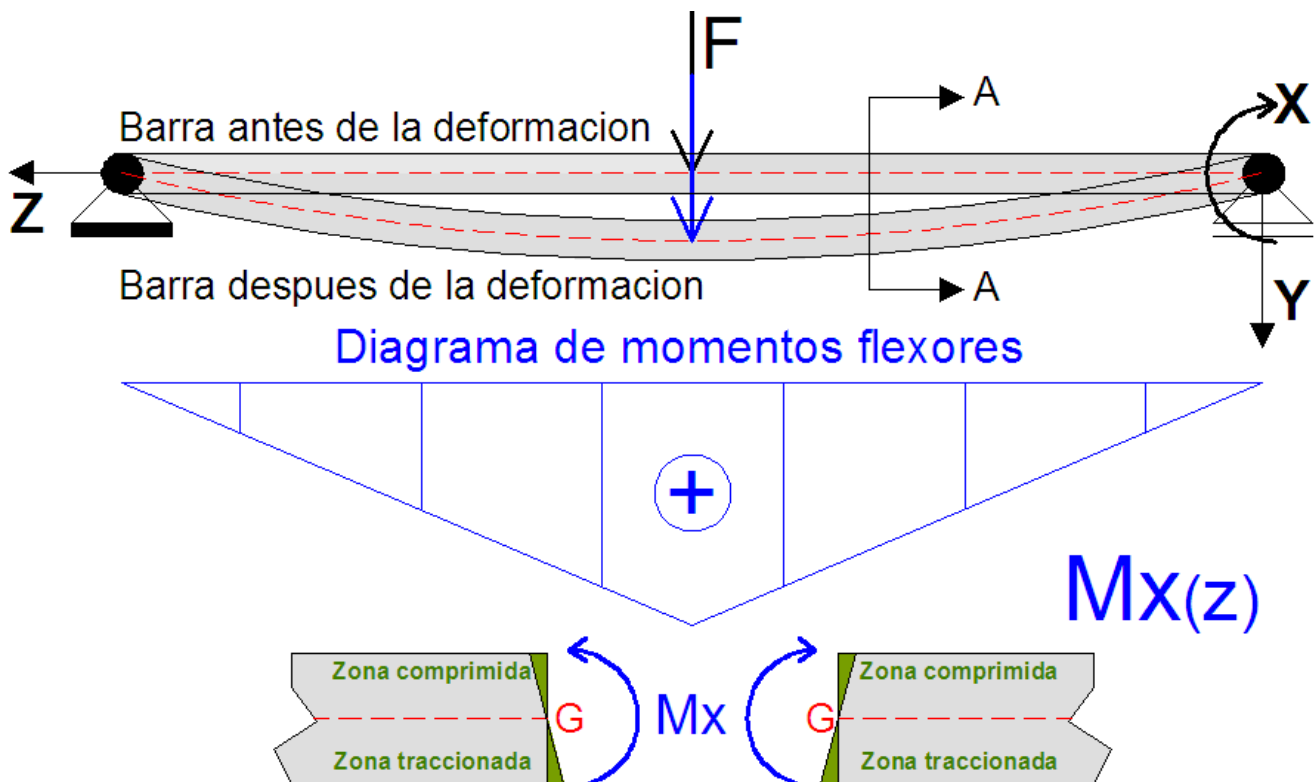
¿Que ocurre cuando la barra se flexiona?

Para dar respuesta a esta pregunta es necesario previamente conocer el [concepto de fibra](#). El mismo se desarrolla a continuación:

Si en la [sección transversal](#) se considera un diferencial de área (dA) y el mismo se traslada sobre las restantes secciones transversales en dirección paralela al eje de barra queda entonces definido el concepto de [fibra](#).



A continuación se relaciona la [deformación por flexión](#) con el [momento flexor](#):



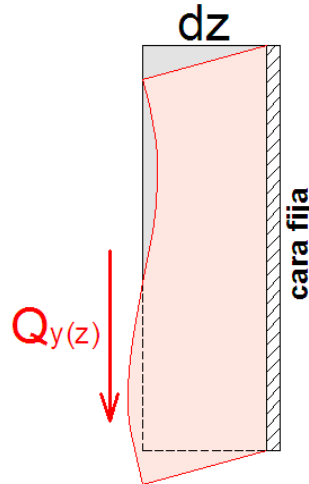
Puede observar el lector que, para el caso graficado, [las fibras inferiores tienden a alargarse](#) (desde el punto estático [se traccionan](#)) y [las fibras superiores tienden a acortarse](#) (desde el punto de vista estático [se comprimen](#)).

Este [efecto](#) queda evidenciado además por el accionar del [momento flexor considerado como fuerza exterior](#) (ver figura precedente):

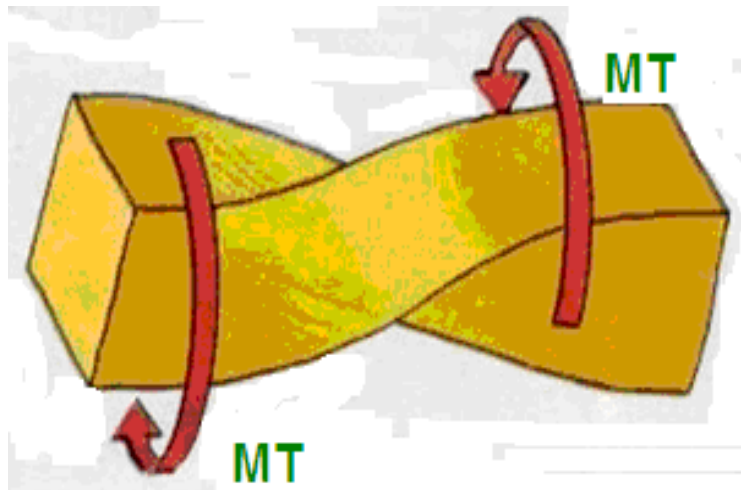
Como se sabe, el esfuerzo de corte es consecuencia de la flexión variable (cuando el diagrama de momento flexor es constante el diagrama de esfuerzo de corte es nulo) en un todo de acuerdo a la relación diferencial que se indica a continuación:

$$dM_x(z)/dz = Q_y(z)$$

A continuación y para un elemento diferencial de barra con una de sus caras fijas se relaciona la deformación por corte con el esfuerzo de corte.



Finalmente se relaciona la deformación por torsión con el momento torsor:

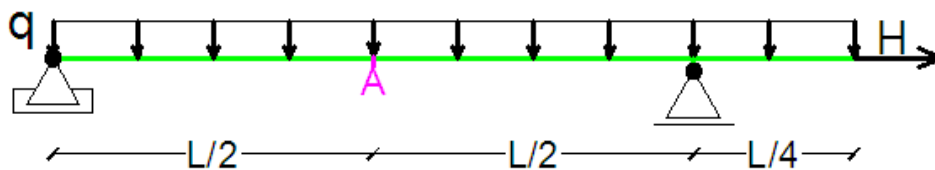


EJERCICIOS PROPUESTOS.

Para los ejercicios contenidos en la unidad de sistemas de fuerzas y los contenidos en la unidad de cuerpos vinculados se propone desarrollar el trazado de diagramas de características verificando los resultados obtenidos mediante un programa para cálculo de estructuras.

APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES A LA DETERMINACION DE ESFUERZOS CARACTERISTICOS.

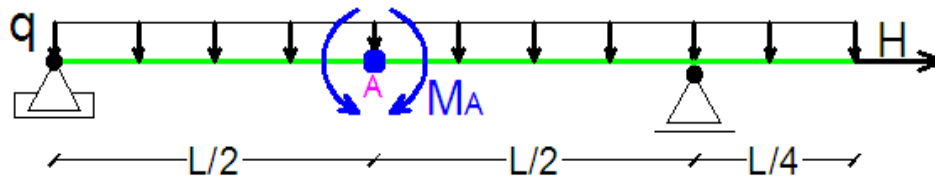
En este apartado y con el objeto fundamental de conocer las magnitudes correspondientes en la expresión de trabajo de los esfuerzos característicos, se desarrolla un ejemplo sencillo de determinación del momento flexor, esfuerzo de corte y esfuerzo normal en determinada sección transversal correspondiente a una estructura plana solicitada. Entonces:



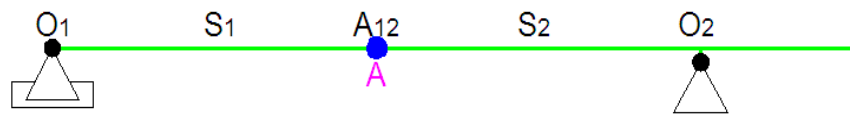
Para la estructura precedente se determinará **MA**, **QA** y **NA** por aplicación del principio de los trabajos virtuales.

Determinación de MA.

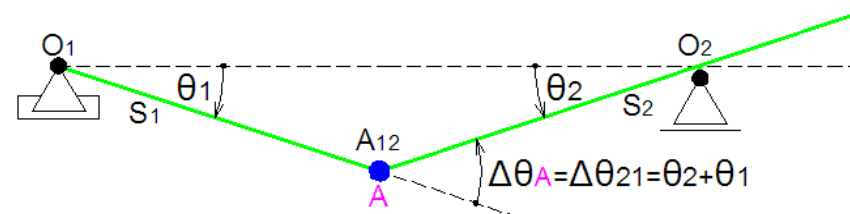
Primero se plantea el sistema equilibrado (**SE**) dejando en evidencia la incógnita a determinar (**MA**):



A continuación se indica el mecanismo de un grado de libertad al que se le aplica el desplazamiento virtual (DV):



Como desplazamiento virtual se adopta el giro θ1 de la chapa **S1** respecto de su punto fijo **O1**:



Finalmente, aplicando la ecuación del principio de los trabajos virtuales resulta:

$$W_{ve}=0 \rightarrow -MA \cdot \theta_1 - MA \cdot \theta_2 + q \cdot L/2 \cdot \theta_1 \cdot L/4 + q \cdot L/2 \cdot \theta_2 \cdot L/4 - q \cdot L/4 \cdot \theta_2 \cdot L/8 = 0$$

Operando:

$$MA \cdot (\theta_2 + \theta_1) = MA \cdot \Delta\theta_A = (q \cdot L^2/8) \cdot \theta_1 + (3 \cdot q \cdot L^2/32) \cdot \theta_2$$

La última expresión indica que la magnitud correspondiente en la expresión de trabajo virtual para el momento flexor es el giro relativo entre las chapas respecto de la articulación que surge de poner en evidencia dicho esfuerzo característico ($\Delta\theta_A$).

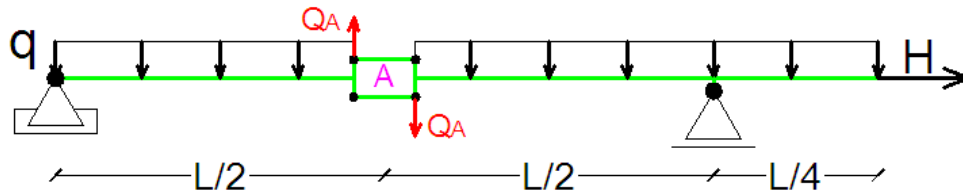
Completando la operatoria y teniendo en cuenta que en este caso en módulo se tiene $\theta_1 = \theta_2$ es posible arribar al valor de M_A :

$$M_A \cdot (\theta_1 + \theta_1) = (q \cdot L^2 / 8) \cdot \theta_1 + (3 \cdot q \cdot L^2 / 32) \cdot \theta_1$$

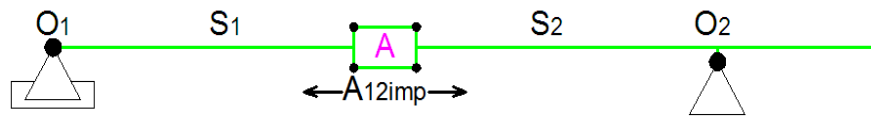
$$2 \cdot M_A = (q \cdot L^2 / 8) + (3 \cdot q \cdot L^2 / 32) \rightarrow M_A = 7 \cdot q \cdot L^2 / 64$$

Determinación de Q_A .

Primero se plantea el sistema equilibrado (SE) dejando en evidencia la incógnita a determinar (Q_A):



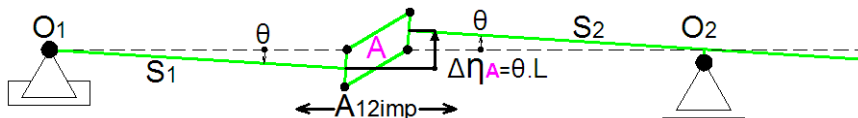
A continuación se indica el mecanismo de un grado de libertad al que se le aplica el desplazamiento virtual (DV):



Como desplazamiento virtual se adopta el giro θ_1 de la chapa **S1** respecto de su punto fijo **O1**. Téngase en cuenta que en este caso la articulación relativa impropia no permite el giro relativo entre las chapas (una biela se alargaría y la otra se acortaría contradiciendo el postulado de rigidez de la estática). Por este motivo resulta:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta$$

Entonces:



Finalmente, aplicando la ecuación del principio de los trabajos virtuales y teniendo en cuenta el análisis efectuado al determinar el momento flexor resulta:

$$W_{ve} = 0 \rightarrow Q_A \cdot \Delta \eta_A = Q_A \cdot \theta \cdot L = (q \cdot L^2 / 8) \cdot \theta - (q \cdot L^2 / 8) \cdot \theta + (q \cdot L^2 / 32) \cdot \theta$$

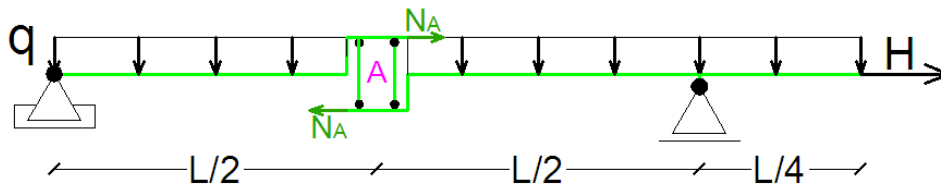
Operando se tiene:

$$Q_A = q \cdot L / 32$$

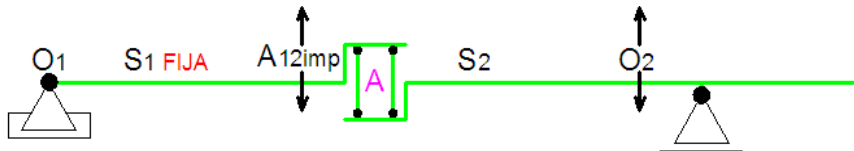
En este caso la magnitud correspondiente en la expresión de trabajo virtual para el esfuerzo de corte es el corrimiento relativo transversal al eje de barra en la sección donde se pretende determinar dicho esfuerzo característico ($\Delta\eta_A$).

Determinación de N_A .

Primero se plantea el sistema equilibrado (**SE**) dejando en evidencia la incógnita a determinar (**N_A**):

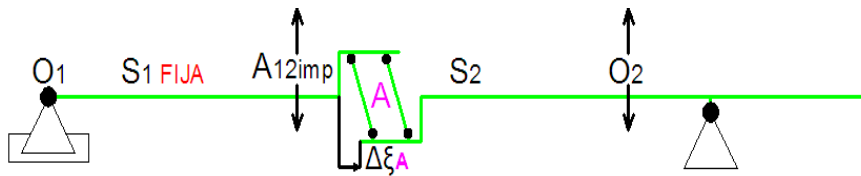


A continuación se indica el mecanismo de un grado de libertad al que se le aplica el desplazamiento virtual (**DV**):



Obsérvese que la articulación relativa entre chapas coincide con el punto fijo de la chapa **S2**. Por lo tanto la chapa **S1** con dos puntos fijos (**O_1** y **A_{12imp}**) se encuentra fija.

Como desplazamiento virtual se adopta $\Delta\xi_A$ (corrimiento relativo longitudinal en la sección **A**) en sentido contrario al esfuerzo normal:



Aplicando la ecuación del principio de los trabajos virtuales resulta:

$$W_{ve}=0 \rightarrow N_A \cdot \Delta\xi_A = H \cdot \Delta\xi_A \rightarrow N_A = H$$

En este caso la magnitud correspondiente en la expresión de trabajo virtual para el esfuerzo normal es el corrimiento relativo en dirección del eje de barra en la sección donde se pretende determinar dicho esfuerzo característico ($\Delta\xi_A$).