



ESTABILIDAD I

TEMA 4

Esfuerzos internos.

Esfuerzos internos



4.1. INTRODUCCIÓN

Si un sistema de fuerzas en equilibrio F_1, F_2, \dots, F_n está actuando sobre un cuerpo libre, se dice que dicho cuerpo se encuentra en *equilibrio*. Si se considera un cuerpo tipo barra, como por ejemplo el de la Fig. 4.1, sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio, y si se practica un corte por medio de un plano α y se separa la parte *I* de la parte *II*, aparecen fuerzas y momentos que rompen el equilibrio inicial.

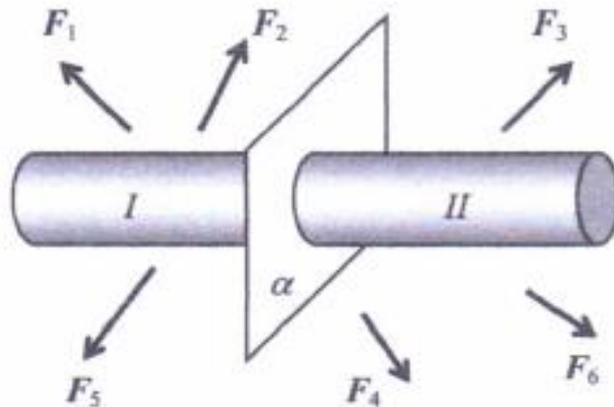


Figura 4.1: Cuerpo en equilibrio

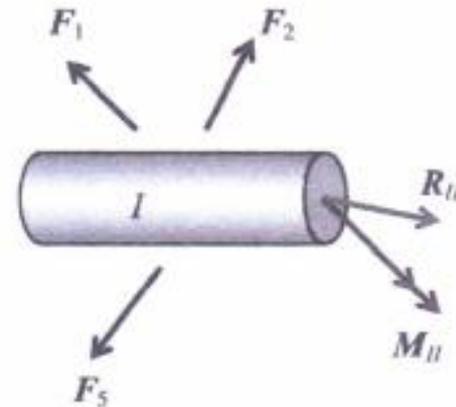


Figura 4.2: Cuerpo seccionado por un plano

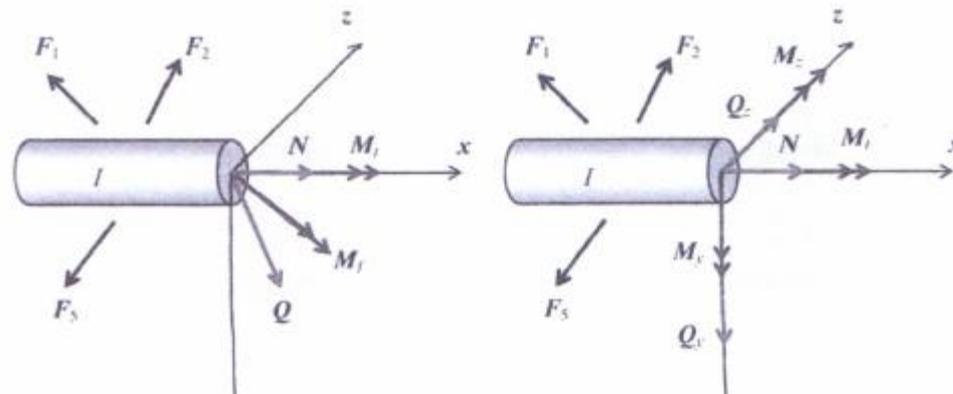


Para restablecer el equilibrio de la parte *I*, es necesario aplicarle el efecto que anteriormente estaba ejerciendo en la sección de corte la parte *II*, efecto que será igual al de la resultante de fuerzas y de momentos del sistema de fuerzas actuando sobre la parte *II*, como se ilustra en la Fig. 4.2. Por estar inicialmente el sistema en equilibrio, estas resultantes serán de los mismos valores y de sentidos contrarios a las resultantes de fuerzas y de momentos que actúan sobre la parte *I*. Esto significa que, antes de efectuar el corte en dicha sección, existía una *interacción* entre las dos partes.

Esfuerzos internos



Trasladando el sistema fuerza-par resultante de las fuerzas que actúan en el cuerpo *II* al origen de coordenadas, se equilibra la parte *I*, como se ve en la Fig. 4.3. La componente de la fuerza en la dirección del eje *x* se denomina *esfuerzo axial o normal* y se identifica con la letra *N*; la componente en el plano de la sección transversal se llama *esfuerzo de corte* y se identifica con la letra *Q*. La componente del par de fuerzas en la dirección del eje *x* se denomina *momento torsor* y se identifica con la denominación M_t ; la componente del par de fuerzas en el plano de la sección transversal se conoce como *momento flector* y se lo identifica con M_f . Tanto el esfuerzo de corte *Q* como el momento flector M_f pueden, a su vez, descomponerse en la dirección de los ejes *z* e *y* que definen el plano de la sección transversal, obteniéndose de este modo Q_z , Q_y , M_z y M_y .

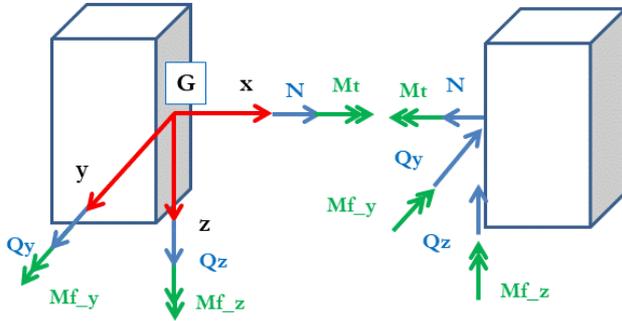


Esfuerzos internos



Cara positiva
(o cara izquierda de la sección de análisis)

Cara derecha



$$\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x})\mathbf{i} + Q_y(\mathbf{x})\mathbf{j} + Q_z(\mathbf{x})\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_d(\mathbf{x}) = M_t(\mathbf{x})\mathbf{i} + M_{fy}(\mathbf{x})\mathbf{j} + M_{fz}(\mathbf{x})\mathbf{k}$$

$N(\mathbf{x})$: esfuerzo normal

$Q_y(\mathbf{x}); Q_z(\mathbf{x})$: esfuerzos de corte, cortantes, cizalladura

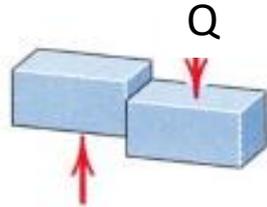
$M_t(\mathbf{x})$: momento torsor

$M_{fy}(\mathbf{x}); M_{fz}(\mathbf{x})$: momento flectores

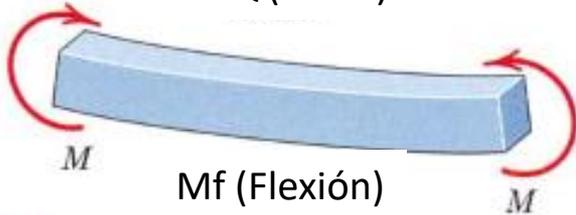
Esfuerzos internos



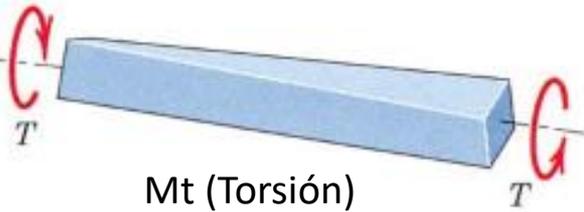
Esfuerzos que puede soportar una estructura



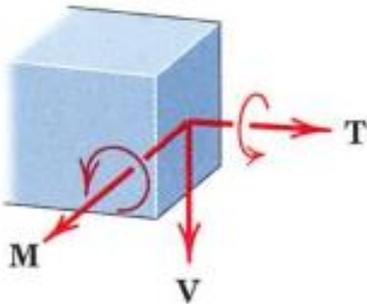
Q (Corte)



Mf (Flexión)



Mt (Torsión)



Combined loading

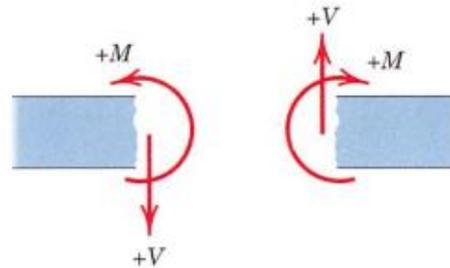


Figure 5/23

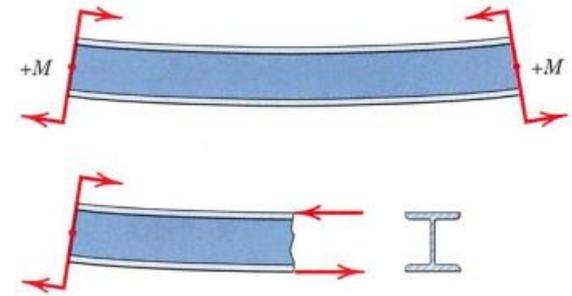
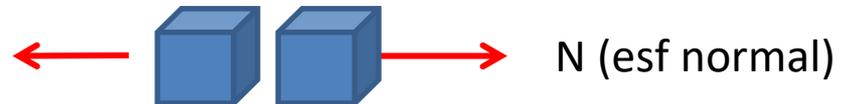


Figure 5/24



N (esf normal)

Esfuerzos internos

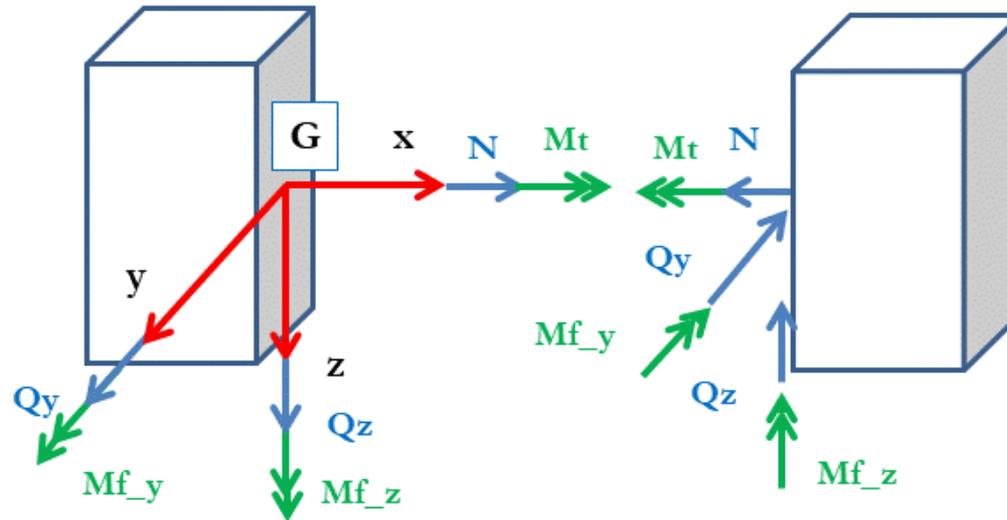


Convención de signos: esfuerzos positivos

Cara positiva

(o cara izquierda de la sección de análisis)

Cara derecha



Los esfuerzos los consideramos positivos cuando sus respectivos vectores hacen proyección positiva respecto de los ejes coordenadas de la cara positiva.

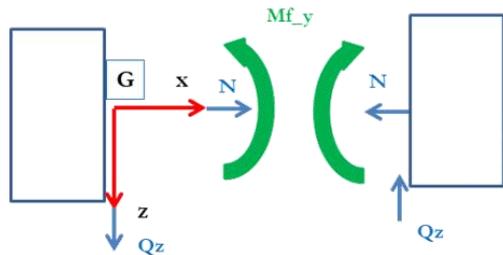
Los diagramas los dibujamos coincidiendo su signo con el eje correspondiente, perpendicular al eje de la barra.

Esfuerzos internos

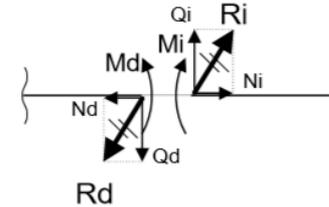


Caso 2D

Cara positiva
(o cara izquierda de la sección de análisis)



Cara derecha



Descomponiendo a “Ri” y “Rd” en sus componentes, coincidentes y perpendiculares al eje de la barra, se obtendrá así: N – Q, conjuntamente con su momento de traslación M

Esfuerzos característicos:

- ⇒ Momento Flexor (M)
- ⇒ Esfuerzo Axial (N)
- ⇒ Esfuerzo de Corte (Q)

Momento Flector (M): Es el par de pares necesarios para trasladar la Rd (Resultante de la sub—estructura derecha) a la cara izquierda de la sección i-i y la Ri (resultante de la sub—estructura izquierda) a la cara derecha de la sección considerada.

Esfuerzo axial (N): es el grupo de dos FUERZAS que resulta de proyectar la Ri que actúa en la cara derecha y la Rd que actúa en la cara izquierda, SOBRE LA TANGENTE AL EJE BARICÉNTRICO DE LA BARRA en cada punto considerado.

Esfuerzo de corte (Q): Es el grupo de dos FUERZAS, que resulta de proyectar la Ri que actúa en la cara derecha y Rd que actúa en la cara izquierda, sobre la NORMAL AL EJE BARICÉNTRICO de la pieza en cada punto considerado.

Por lo tanto **M**- **N**- y **Q**, son los tres parámetros de las Ri y Rd en cada punto de una estructura en equilibrio.

N y Q nos determina por lo tanto, la magnitud y dirección de la Ri y Rd.

M define su ubicación

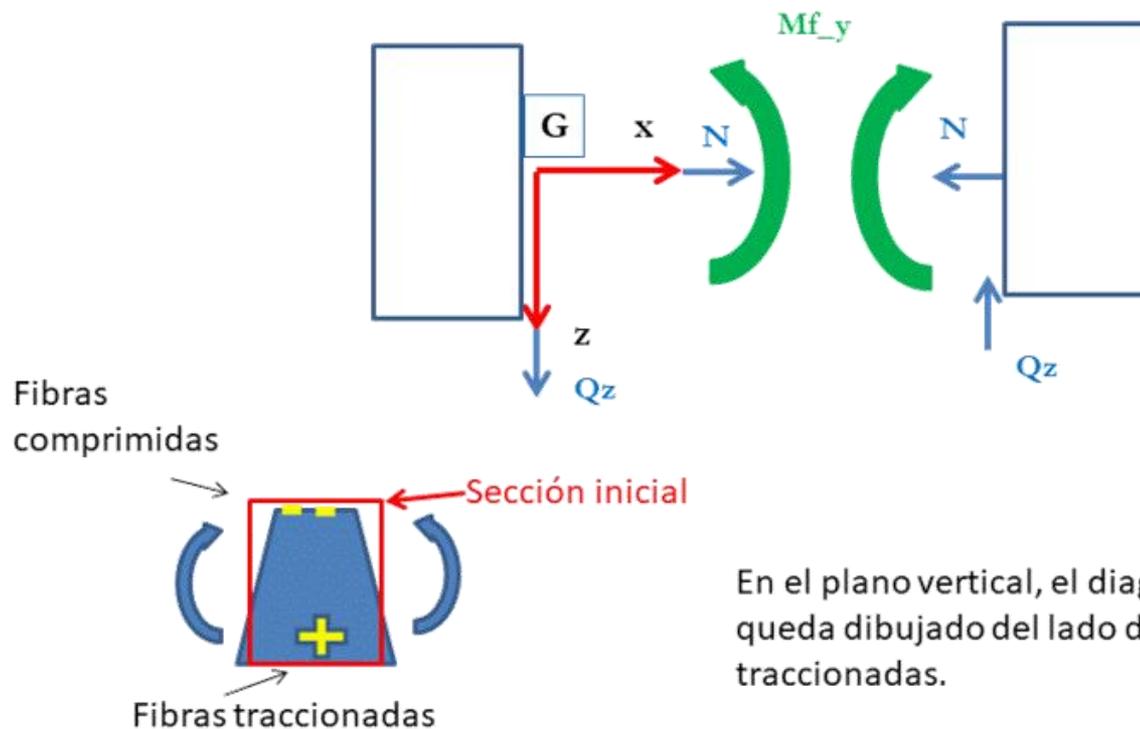
Esfuerzos internos



Esfuerzos positivos Plano Vertical X-Z

Cara positiva
(o cara izquierda de la sección de análisis)

Cara derecha

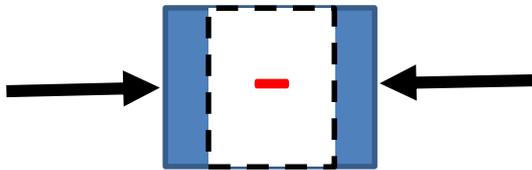
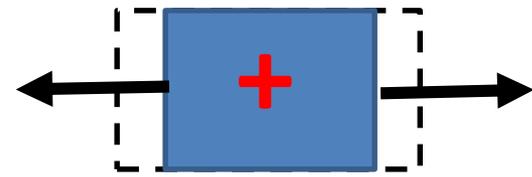


En el plano vertical, el diagrama de Momentos queda dibujado del lado de las fibras traccionadas.

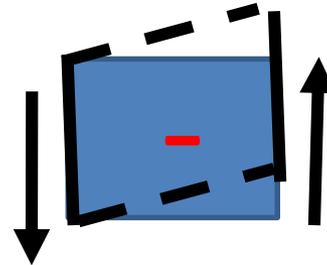
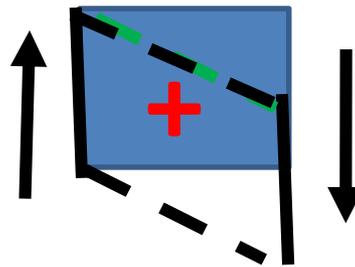
Esfuerzos internos



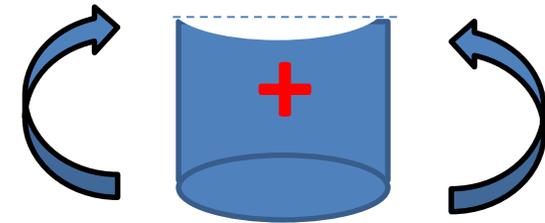
Convención de signos Plano Vertical X-Z (tomando una “rebanada” del elemento de long ΔX)



Esf. Normal

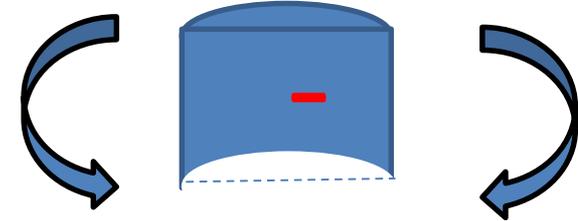


Esf. De Corte



Fibras comprimidas

Fibras Traccionadas



Fibras Traccionadas

Fibras comprimidas

Momento flector

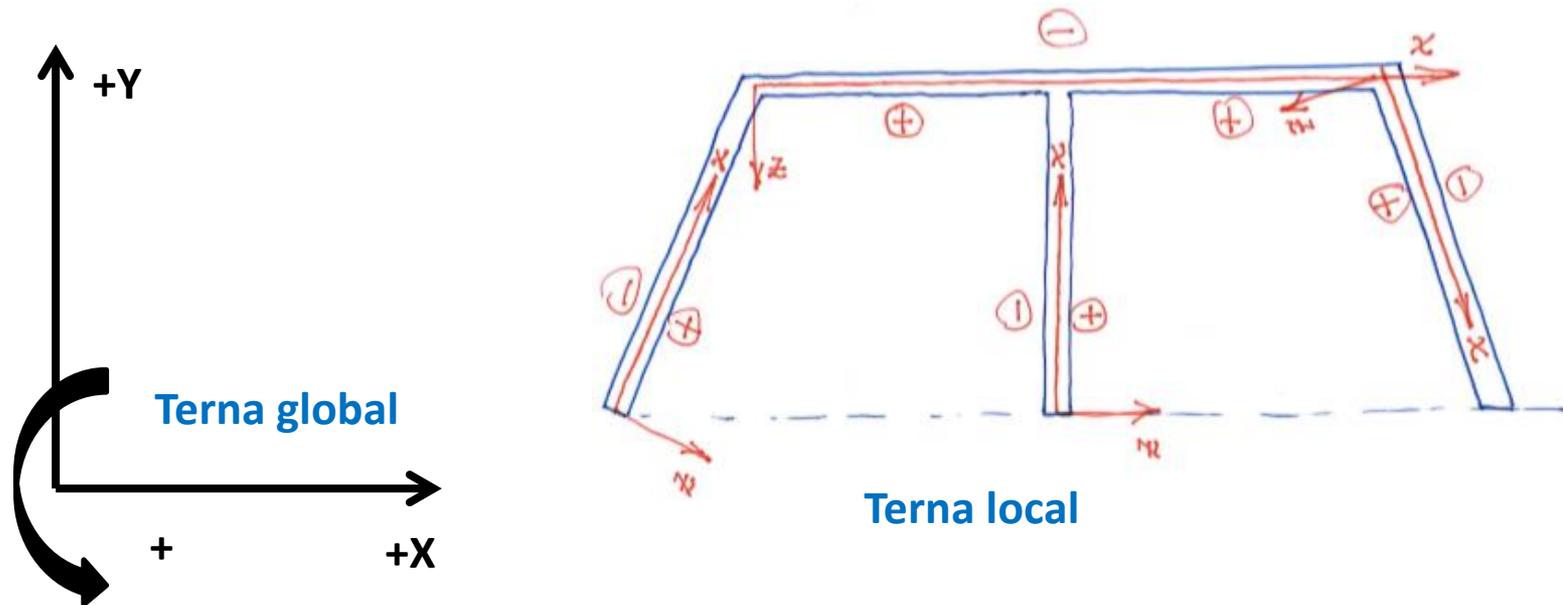
Esfuerzos internos



TERNA GLOBAL Y TERNA LOCAL.

Terna global: Es aquella aplicada a la totalidad de la estructura con el objeto de determinar las componentes de reacción de vínculo externo.

Terna local: Es aquella aplicada a cada barra en particular.

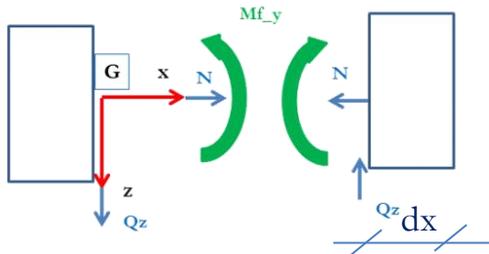


Esfuerzos internos



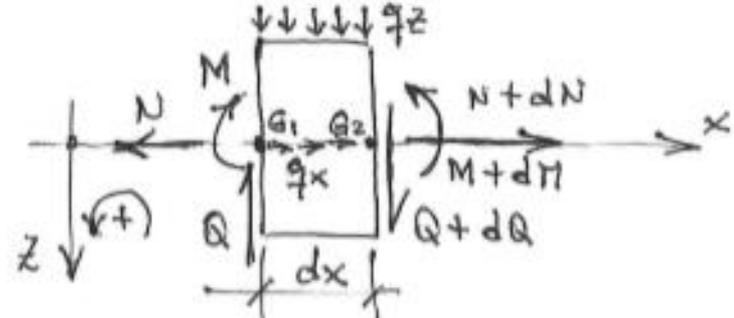
Relaciones diferenciales Plano Vertical X-Z (Ing. Giacoia)

Cara positiva
(o cara izquierda de la sección de análisis)



Cara derecha

5 | Relaciones diferenciales.



$$1) \sum P_x = 0 \Rightarrow (N + dN) + q_x \cdot dx - N = 0$$

$$2) \sum P_z = 0 \Rightarrow (Q + dQ) + q_z \cdot dx - Q = 0$$

$$3) \sum M^{Gz} = 0 \Rightarrow (M + dM) - M - Q \cdot dx = 0$$

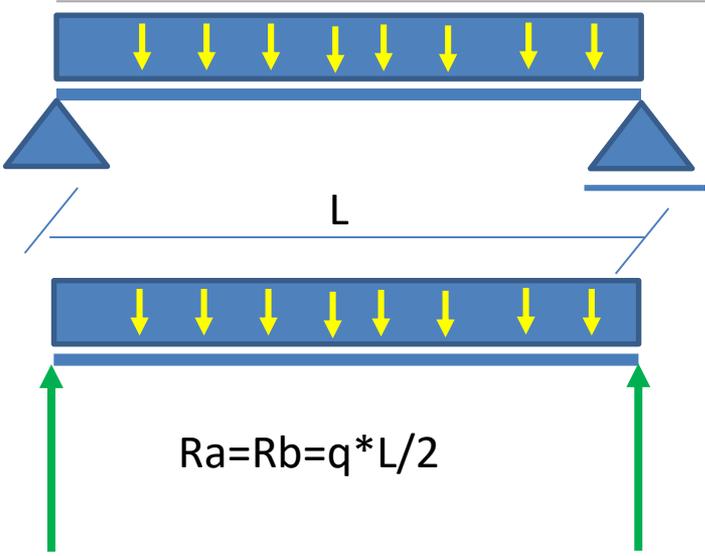
(despr. infinitesimos de orden sup.)

$$\text{De (1): } \frac{dN(x)}{dx} = -q_x(x)$$

$$\text{De (2): } \frac{dQ(x)}{dx} = -q_z(x)$$

$$\text{De (3): } \frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

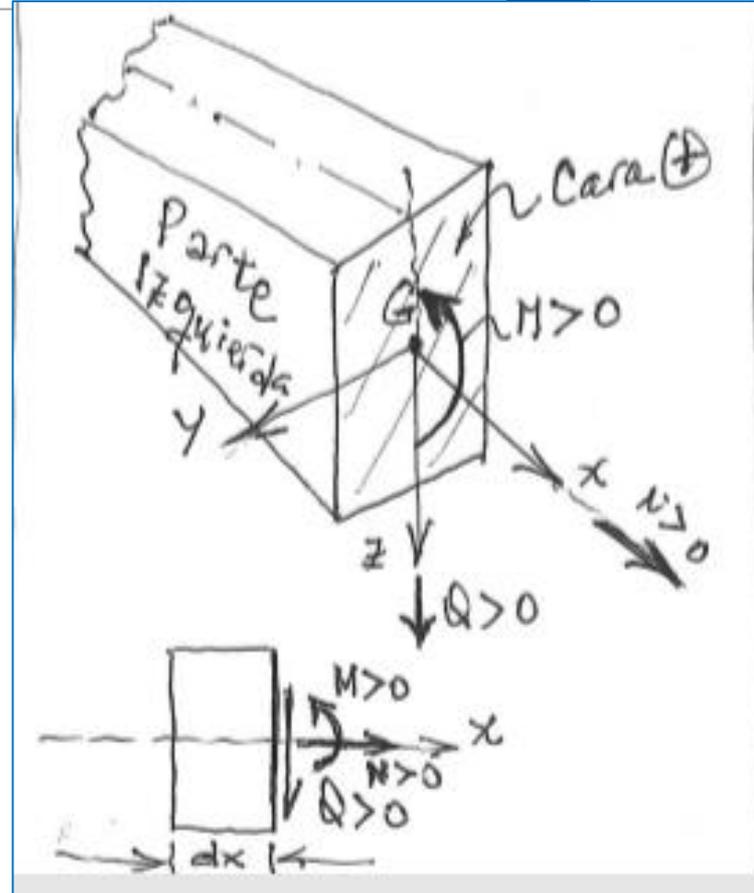
Esfuerzos internos



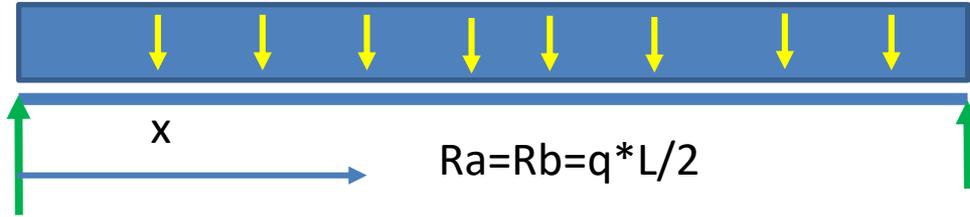
$$q(x) = \text{cte} = q$$

DCL

Cortamos en una sección genérica a una distancia “x” del apoyo izquierdo



Esfuerzos internos



Handwritten derivation of internal forces and moment:

$$Q_z(x) + qx - \frac{qL}{2} = 0$$

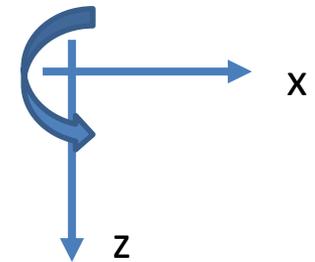
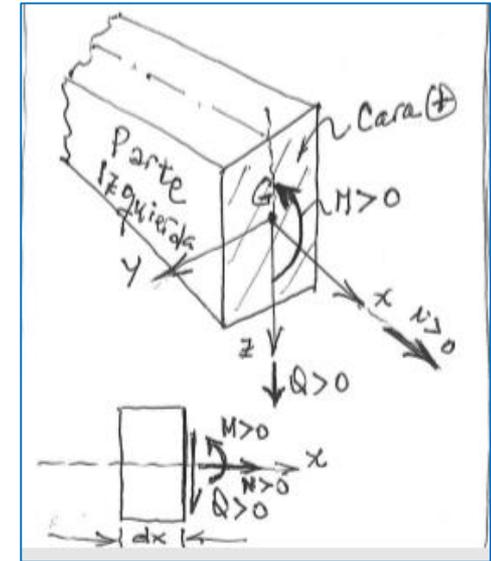
$$Q_z(x) = \frac{qL}{2} - qx \quad \boxed{\frac{dQ_z}{dx} = -q}$$

$$M_y(x) - Q_z(x) \cdot x - \frac{qx^2}{2} = 0$$

$$M_y(x) = Q_z(x) \cdot x + \frac{qx^2}{2}$$

$$M_y(x) = \frac{qL}{2}x - qx^2 + \frac{qx^2}{2}$$

$$M_y(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} \quad \frac{dM_y}{dx} = \frac{qL}{2} - qx = Q_z$$



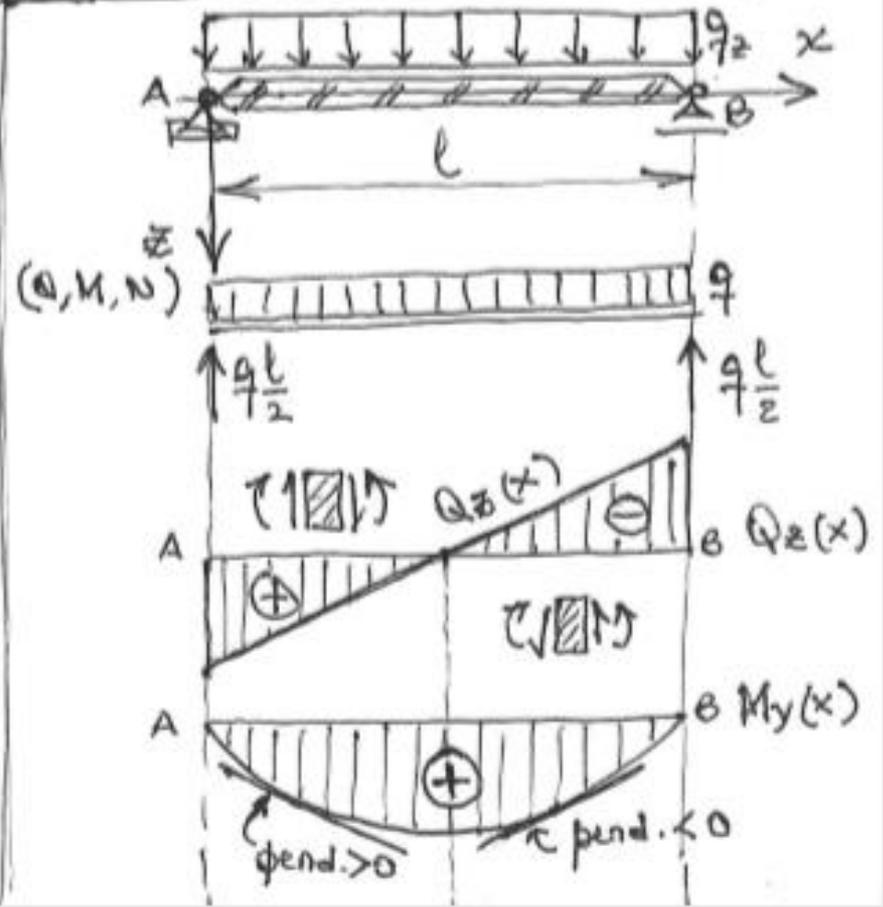
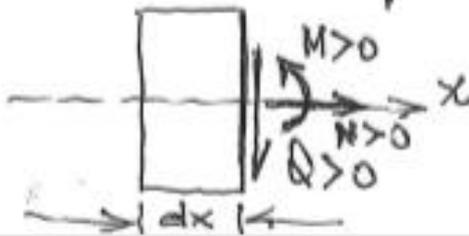
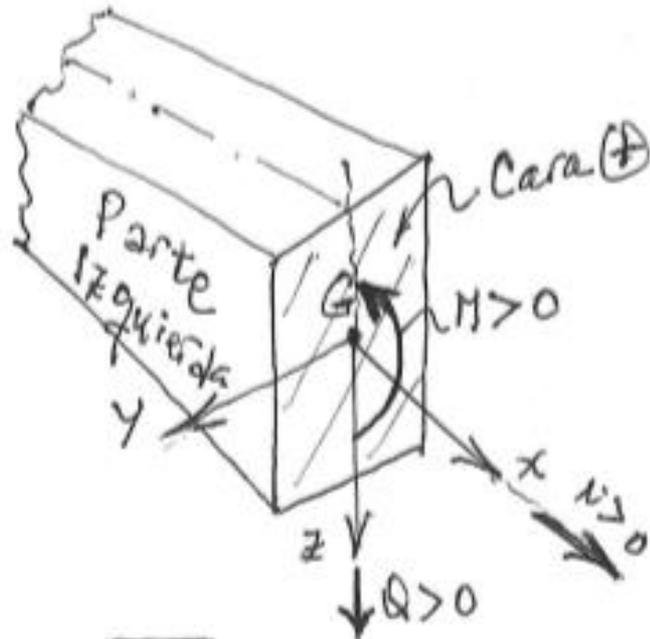
$$M_{y_max}(x=L/2) = \frac{qL^2}{8}$$

Esfuerzos internos



3 Esfuerzos Característicos (+)

6 ¿Cómo resultan las cosas?

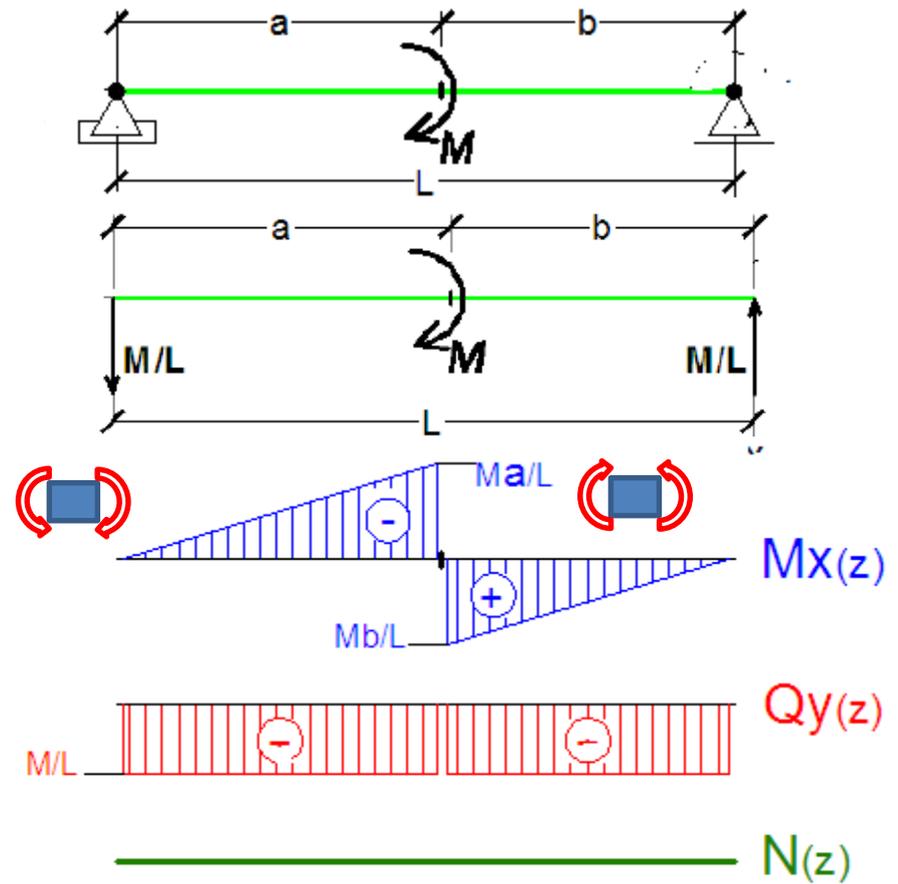
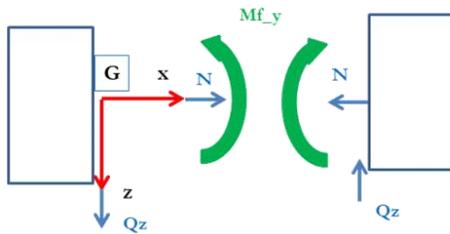


Esfuerzos internos



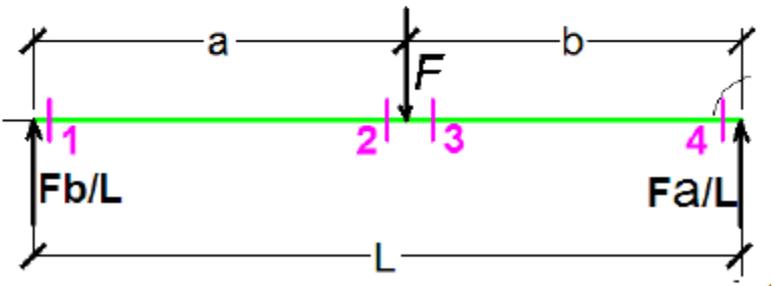
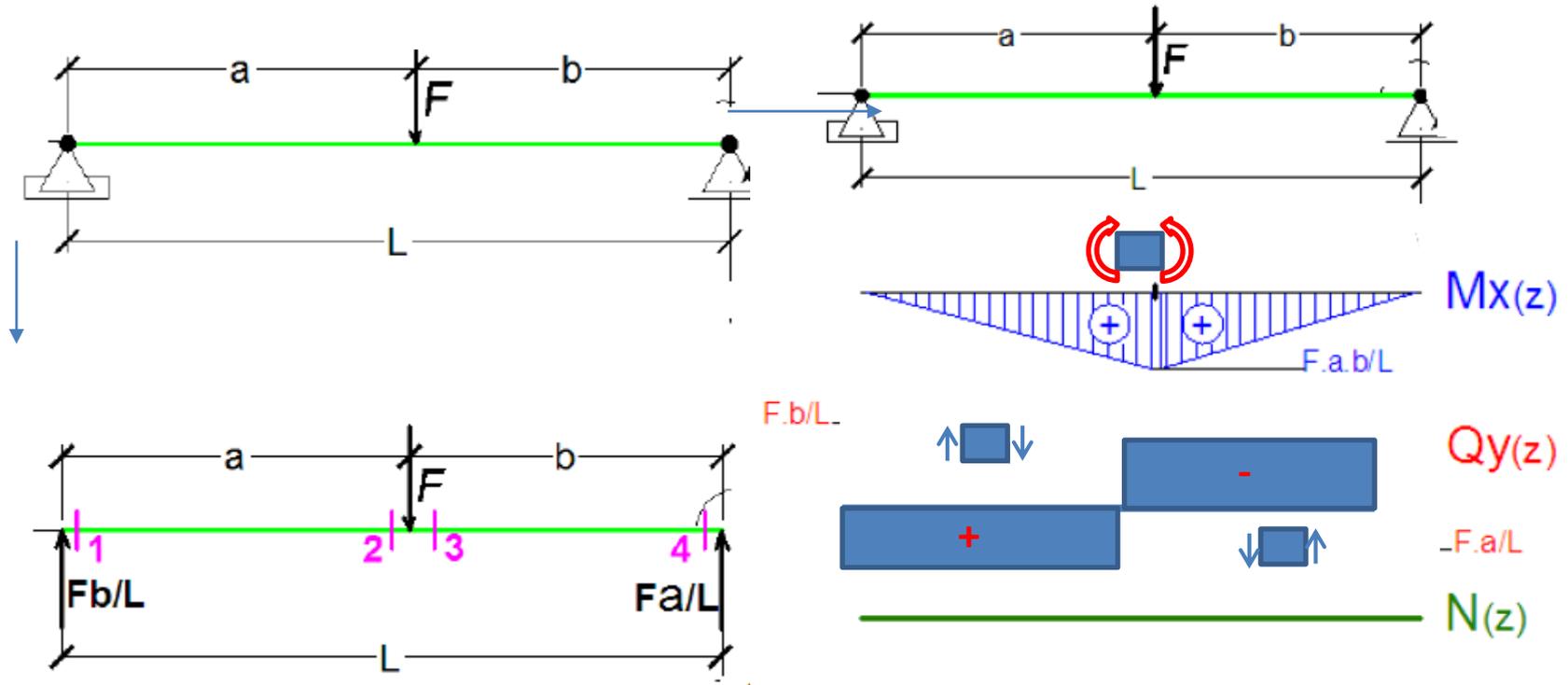
Cara positiva
(o cara izquierda de la sección de análisis)

Cara derecha



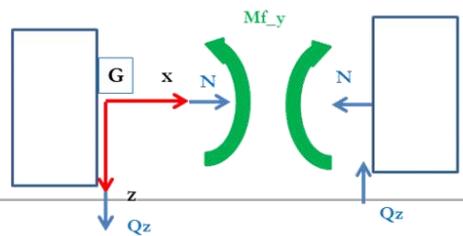


Esfuerzos internos



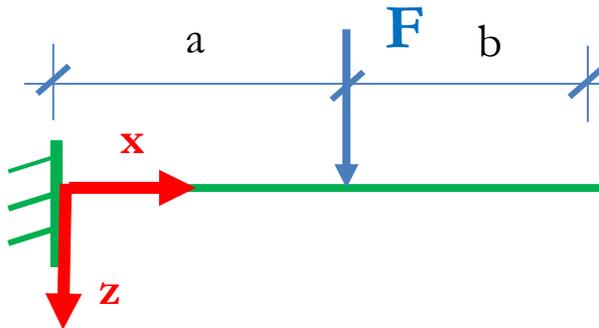
Cara positiva
(o cara izquierda de la sección de análisis)

Cara derecha



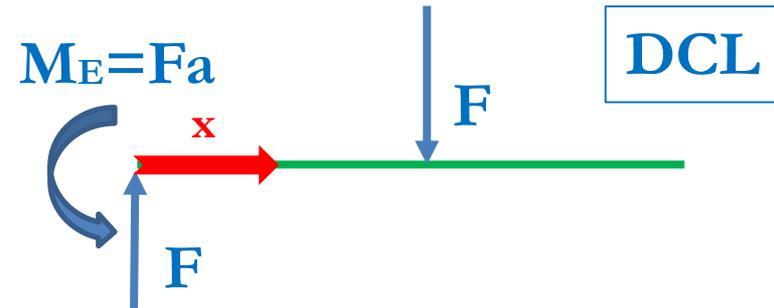
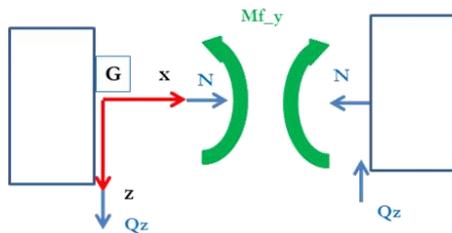


Esfuerzos internos



Cara positiva
(o cara izquierda de la sección de análisis)

Cara derecha

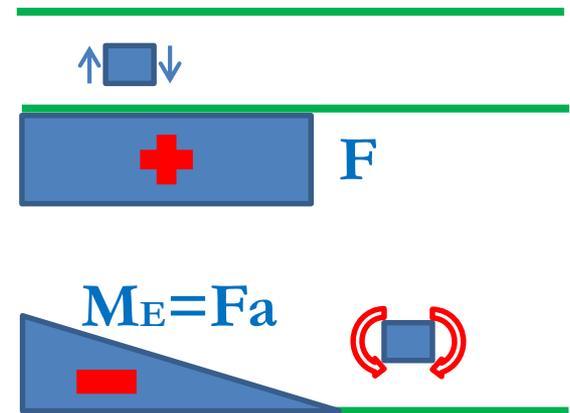


$$N(x) = 0$$

$$Q_z(x) = F = \text{cte}$$

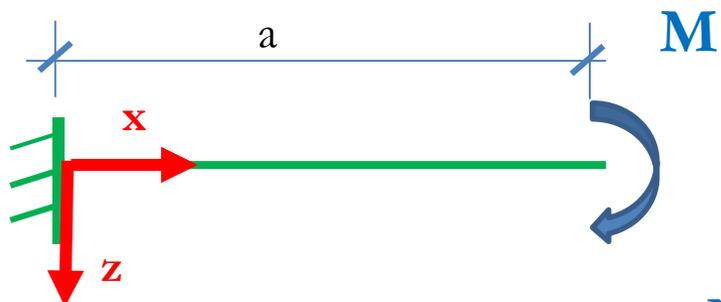
$$M_y(x)$$

$$M_y(x) = Fx - Fa; \quad x < a$$





Esfuerzos internos



$$M_E = M$$

DCL



$$N(x) = 0$$

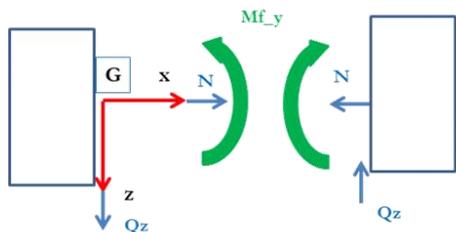


$$Q_z(x) = 0$$



Cara positiva
(o cara izquierda de la sección de análisis)

Cara derecha

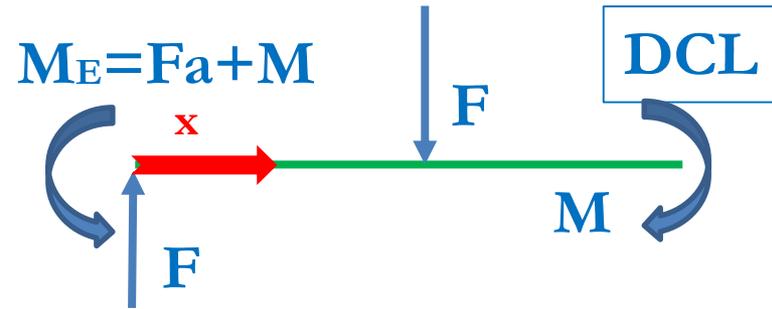
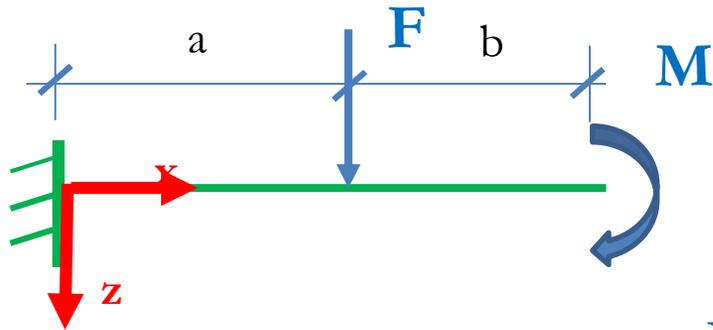


$$M_y(x) = M = \text{cte}$$





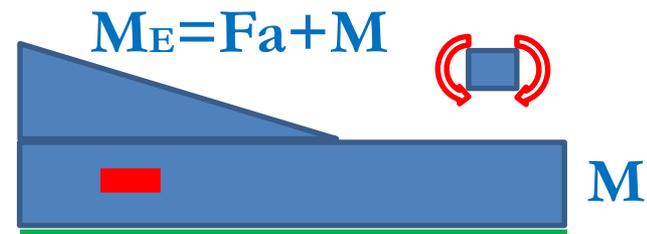
Esfuerzos internos



$$N(x) = 0$$

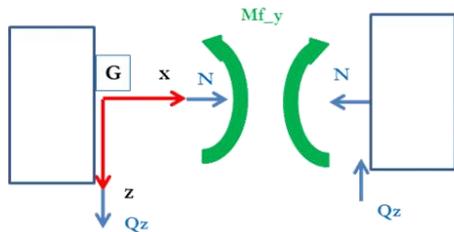
$$Q_z(x) = F = \text{cte}$$

$$M_y(x)$$



Cara positiva
(o cara izquierda de la sección de análisis)

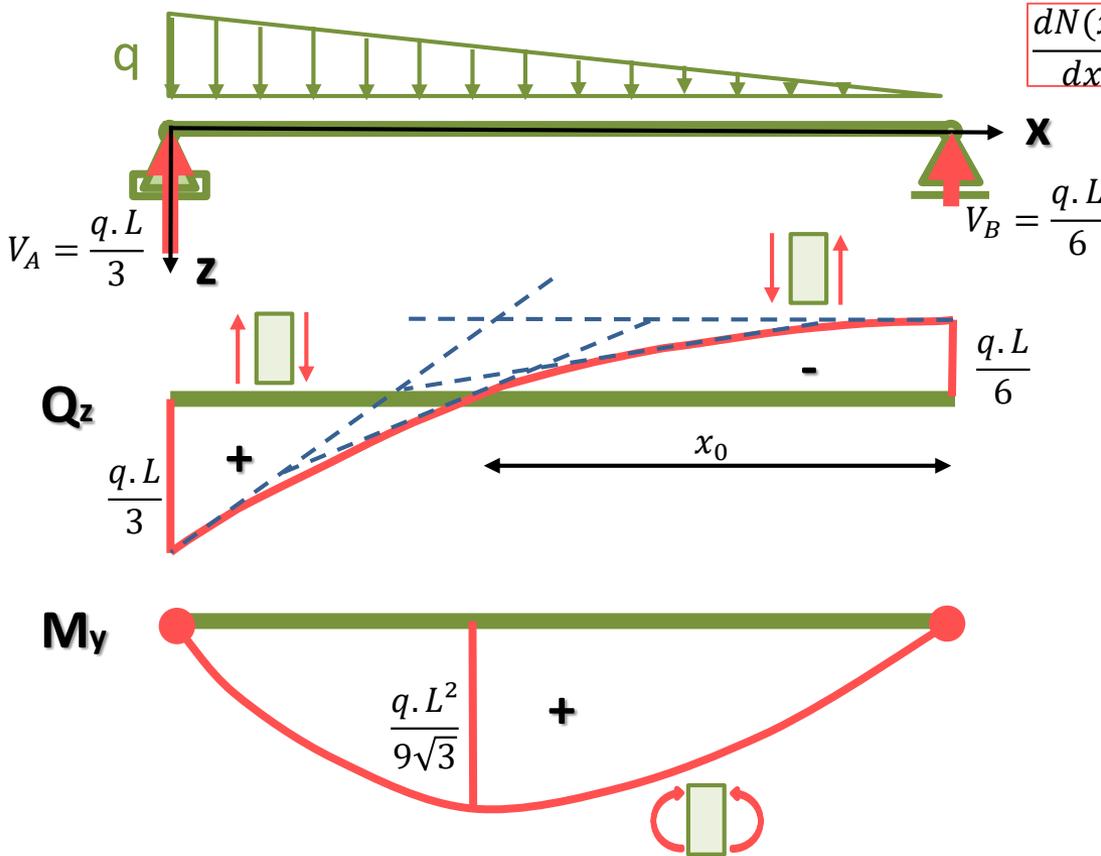
Cara derecha



$$M_y(x) = Fx - Fa - M; \quad x < a$$

$$M_y(x) = -M; \quad x > a$$

8 Diagramas de Características



$$\frac{dN(x)}{dx} = -q_x(x)$$

$$\frac{dQ_z(x)}{dx} = -q_z(x)$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = Q_z(x)$$

$$Q_z = -\frac{qL}{6} + \frac{q}{L} \cdot x_0 \cdot \frac{x_0}{2} = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$M_y = \frac{qL}{6} \cdot x_0 - \frac{q}{L} \cdot x_0 \cdot \frac{x_0}{2} \cdot \frac{x_0}{3} = \frac{q \cdot L^2}{9\sqrt{3}}$$

Ing. Patricia Lucía Aab





Esfuerzos internos

Q: Convención Chiumenti

5.2 Ejemplo 1

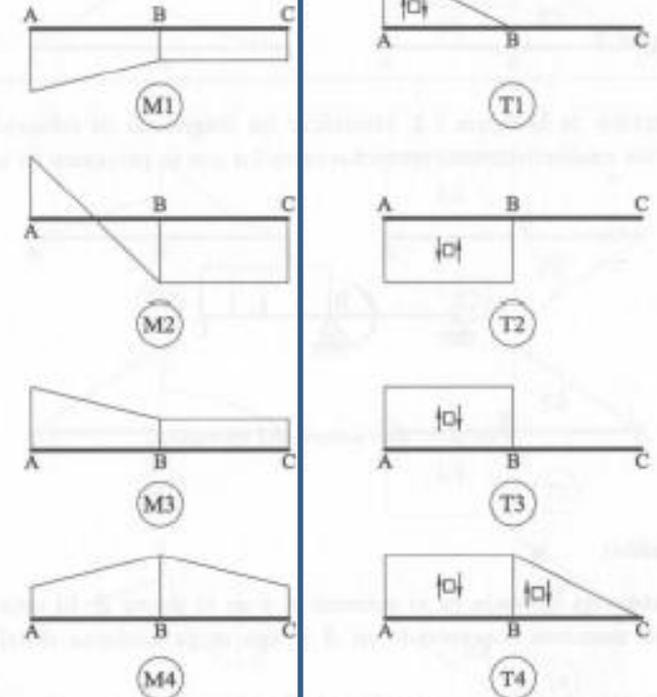
Para la estructura de la figura 5.1, identificar los diagramas de esfuerzo cortante y momento flector cualitativamente correctos entre los que se proponen en la figura 5.2.



Fig. 5.1: Estructura del ejemplo 1

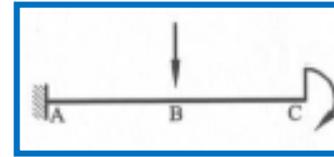
5.2.1 Solución:

Se trata de una viga empotrada en el extremo A. Hay una carga concentrada en el punto B y un momento concentrado en el extremo libre C. La carga concentrada tiene que dar lugar a un salto en el diagrama de cortantes, así como a una variación en la pendiente (derivada) del momento flector.



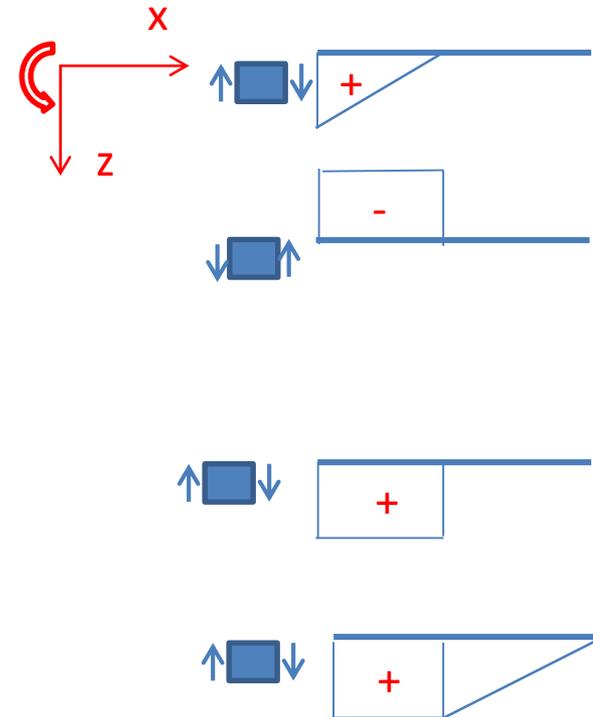
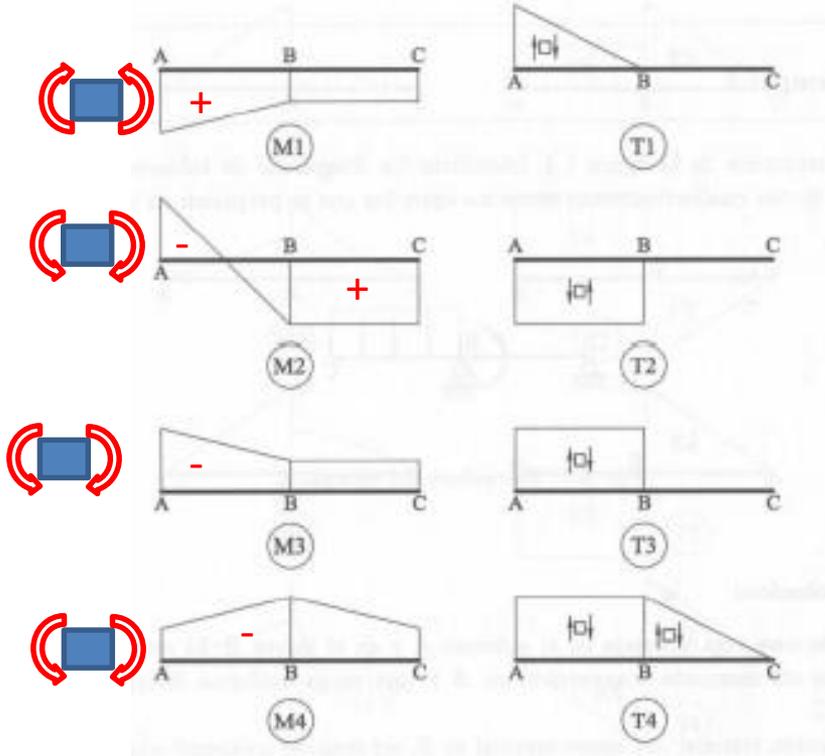
Nota: Chiumenti grafica los esfuerzos de Corte “espejado” respecto a la convención utilizada en E I. Prestar atención a los sentidos de las flechas que indican el sentido “físico” de los esfuerzos de corte

Esfuerzos internos



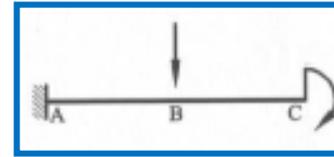
Q: Convención Chiumentì

Q: Convención E I

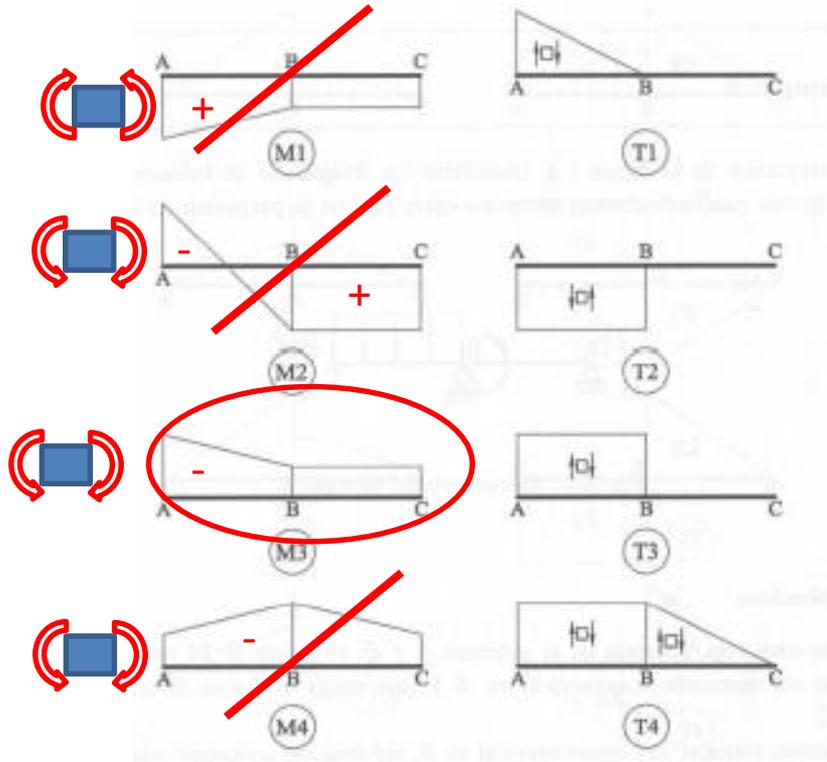


Nota: Chiumentì grafica los esfuerzos de Corte “espejado” respecto a la convención utilizada en E I. Prestar atención a los sentidos de las flechas que indican el sentido “físico” de los esfuerzos de corte

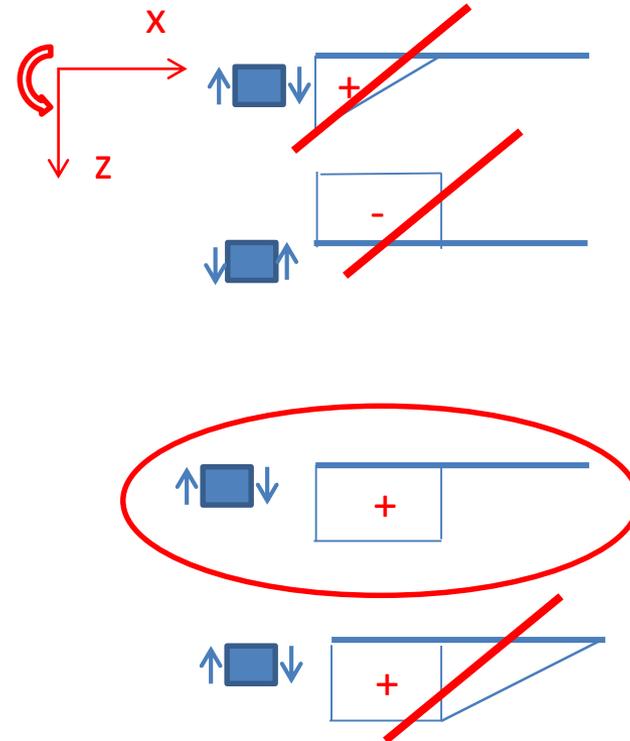
Esfuerzos internos



Q: Convención Chiumentì



Q: Convención E I



Nota: Chiumentì grafica los esfuerzos de Corte “espejado” respecto a la convención utilizada en E I. Prestar atención a los sentidos de las flechas que indican el sentido “físico” de los esfuerzos de corte

Esfuerzos internos



5.9 Ejemplo 8

En la figura 5.16 se muestran los diagramas de cortante y momento flector de una viga continua isostática. Se pide identificar la condición de carga y de apoyo compatible con estos diagramas entre las propuestas en la figura 5.17



Fig. 5.16: Diagramas de esfuerzo cortante y momento flector para el ejemplo 8.



Esfuerzos internos

5.9.1 Solución:

En el tramo A-B el diagrama del momento flector es lineal mientras es parabólico en los tramos B-C y C-D. Esto nos lleva a suponer una carga uniforme en los tramos B-C y C-D. Observando la pendiente del diagrama de cortantes podemos ver como su variación es igual en ambos tramos, o sea que la carga uniforme tiene que tener el mismo valor tanto en B-C como en C-D. Podemos así descartar el diagrama e) que indica una carga uniforme en los tramos A-B y C-D. De acuerdo con la concavidad del diagrama parabólico de momentos también resulta inaceptable la hipótesis d), que presenta una carga uniforme hacia arriba.

El extremo D de la viga continua presenta valores nulos para el cortante y momento flector: este punto tiene que ser un extremo libre. La opción b) supone un apoyo en D. A partir de la ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto B es evidente que en este apoyo debe haber con una reacción vertical hacia arriba no nula, en desacuerdo con el diagrama de cortantes mostrado.

De la ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto B para la opción a) resulta ahora que en el apoyo A existe una reacción vertical hacia abajo no nula. Esta reacción da lugar a tracción en las fibras superiores en el tramo A-B, así como un

Esfuerzos internos

cortante anti-horario. Ambas circunstancias están en desacuerdo con los diagramas de esfuerzos mostrados.

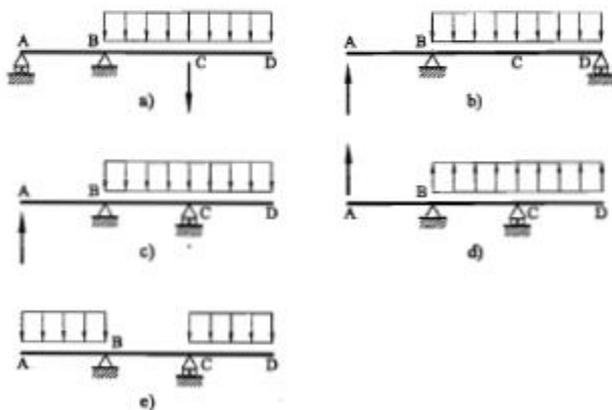


Fig. 5.17: Condiciones de carga y de apoyo propuestas para el ejemplo 8.

La opción correcta tiene que ser la c). Empezando desde el extremo A, se puede comprobar que el diagrama de cortantes debe de ser horario y mantenerse constante en todo el tramo A-B. La ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto C nos dice que la reacción en el apoyo B es vertical hacia abajo, dando lugar a un salto como indica el diagrama de cortantes. A continuación el esfuerzo cortante se vería incrementado a consecuencia de la carga uniforme hasta el otro apoyo en C. La ecuación de equilibrio de momentos respecto al punto B nos indica una reacción vertical hacia arriba que se ve reflejada en el diagrama de cortantes como otro salto hacia arriba. Finalmente, en el tramo C-D el cortante tiene que empezar con valor nulo en el extremo libre D para ir incrementándose (en sentido horario) hasta el punto C por efecto de la carga uniforme.

Por lo que concierne al diagrama de momento flector, en el tramo A-B el momento tiene que crecer linealmente de A hasta B a causa de la carga concentrada en A que tracciona las fibras inferiores.

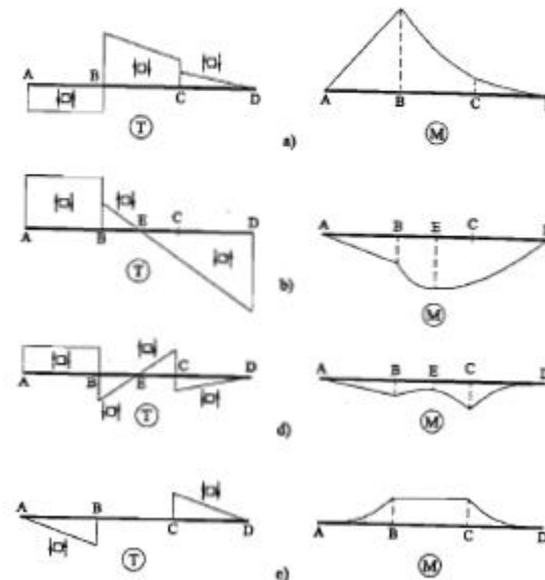
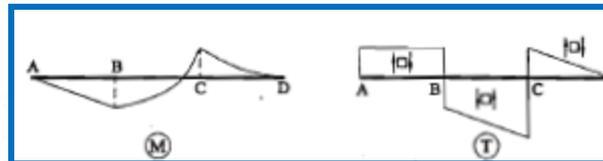
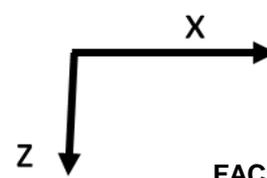
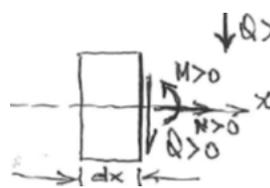


Fig. 5.18: Diagramas de esfuerzo cortante y momento flector relativos a las demás condiciones de carga y apoyo propuestas en el ejemplo 8.

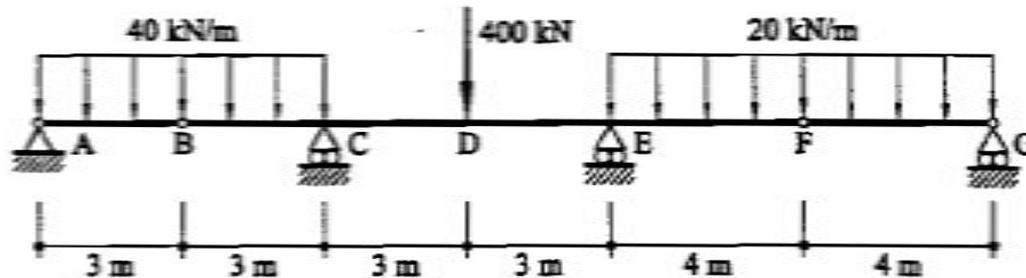
En el tramo C-D la carga uniforme da lugar a una variación parabólica que empieza con valor nulo en el extremo libre D y se incrementa hasta el punto C, traccionando las fibras superiores de la viga. Finalmente, otra variación parabólica tiene que cerrar el diagrama en el tramo B-C uniendo los valores (con signo opuesto) conseguidos en B y C respectivamente. Todas estas observaciones se confirman en el diagrama de momentos.

En la figura 5.18 se presentan los diagramas de cortante y momento flector para todas las demás condiciones de carga y apoyo presentadas en la figura 5.17.





Viga Continua



Momento flector nulo en la rótula F, en el tramo F-G:

$$V_G \cdot 4 - (20 \cdot 4) \cdot 2 = 0$$

$$M_{(F)}^{FG} = 0$$

$$V_G = 40 \text{ kN}$$

Momento flector nulo en la rótula B, en el tramo A-B:

$$-V_A \cdot 3 + (40 \cdot 3) \cdot 1,5 = 0$$

$$M_{(B)}^{AB} = 0$$

$$V_A = 60 \text{ kN}$$

Equilibrio de momentos en el punto C:

$$-V_A \cdot 6 + (40 \cdot 6) \cdot 3 - 400 \cdot 3 + V_E \cdot 6 - (20 \cdot 8) \cdot 10 + V_G \cdot 14 = 0$$

$$M_{(C)} = 0$$

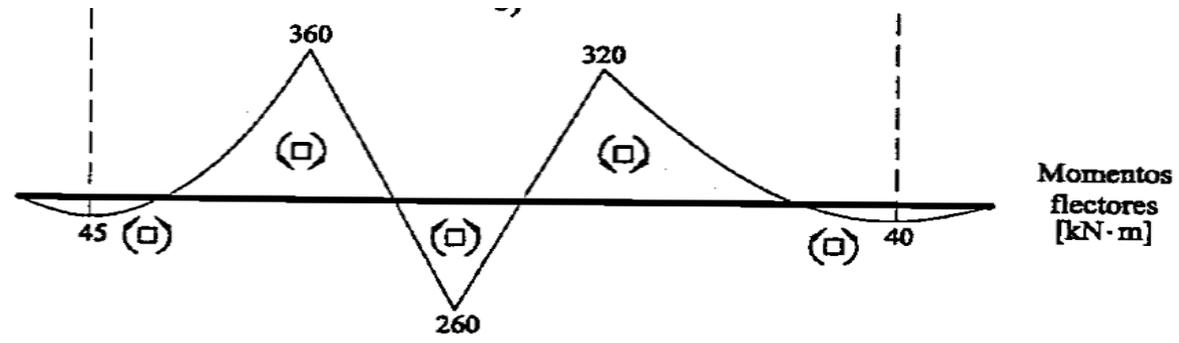
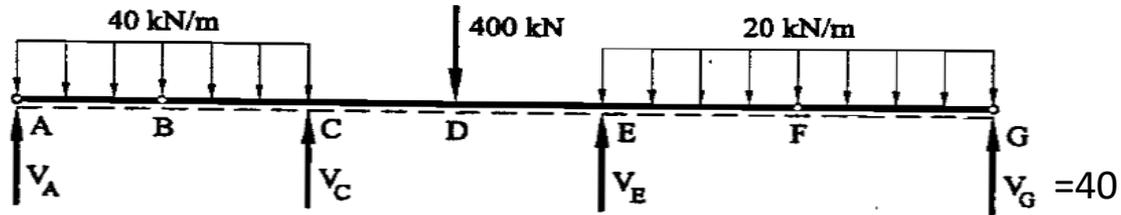
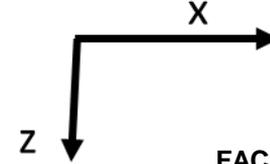
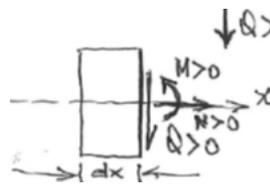
$$V_E = 313,33 \text{ kN}$$

Equilibrio de fuerzas verticales:

$$V_A + V_C + V_E + V_G - 40 \cdot 6 - 400 - 20 \cdot 8 = 0$$

$$R_y = 0$$

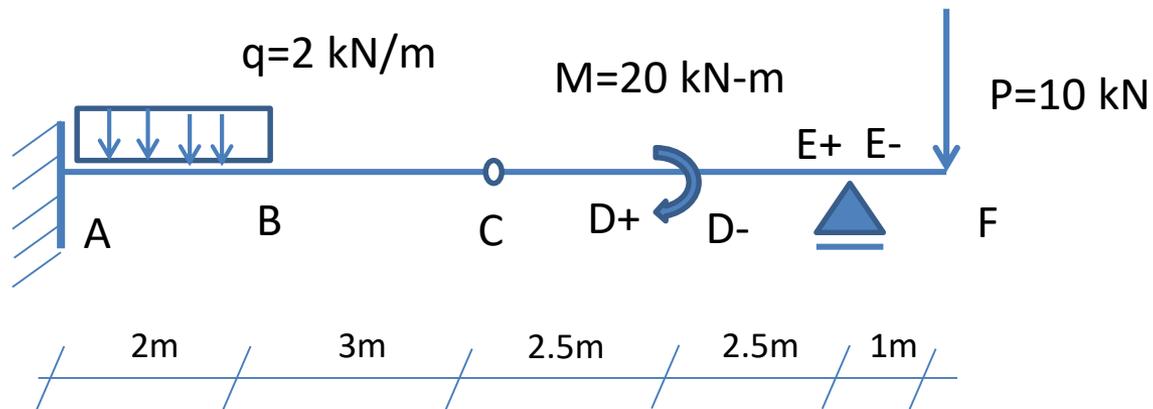
$$V_C = 386,67 \text{ kN}$$



Esfuerzos internos



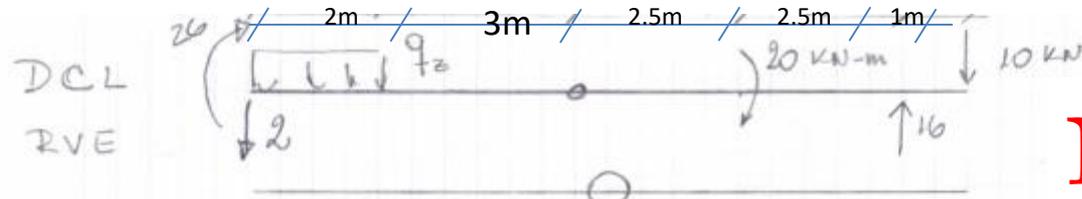
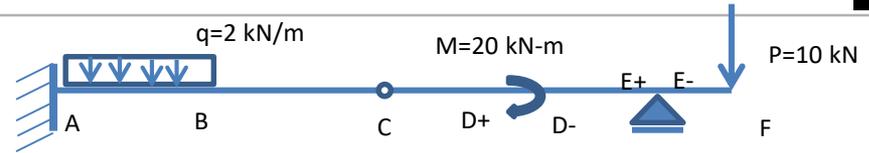
Viga continua



Esfuerzos internos



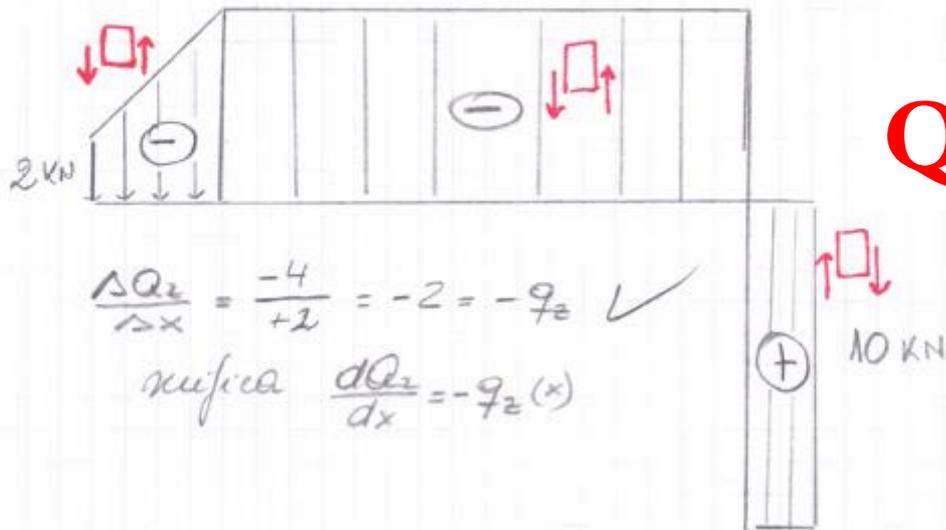
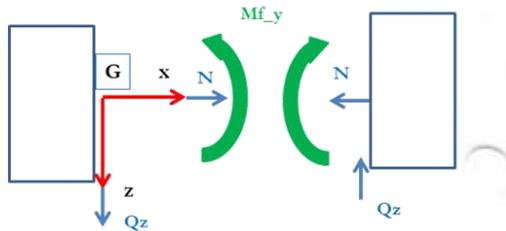
Viga continua



$N(x)$

Cara positiva
(o cara izquierda de la sección de análisis)

Cara derecha



$Q_z(x)$

$$\frac{\Delta Q_z}{\Delta x} = \frac{-4}{+2} = -2 = -q_z \quad \checkmark$$

mejora $\frac{dQ_z}{dx} = -q_z(x)$

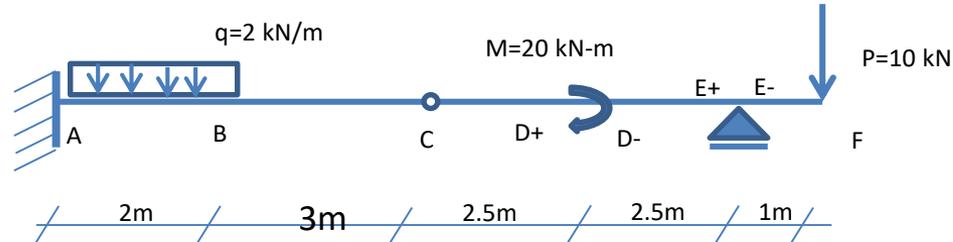
Esfuerzos positivos, terna derecha

De B a F no hay carga distribuida $\Rightarrow Q_z = \text{cte}$ en los tramos BE y EF

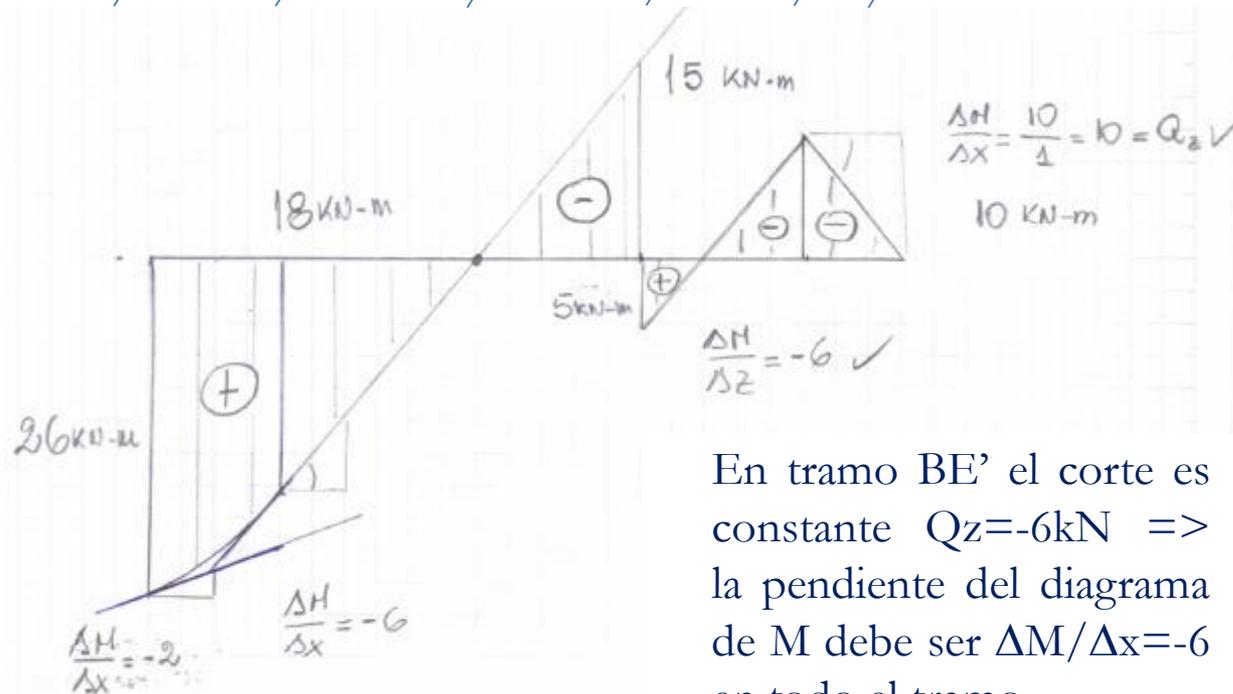
Esfuerzos internos



Viga continua



$M_y(x)$



En tramo BE' el corte es constante $Q_z = -6 \text{ kN} \Rightarrow$ la pendiente del diagrama de M debe ser $\Delta M / \Delta x = -6$ en todo el tramo



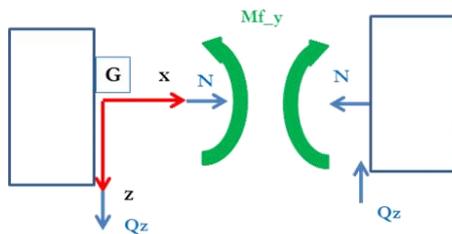
Viga continua

CÁLCULOS

Cara positiva

(o cara izquierda de la sección de análisis)

Cara derecha



| | $Q_z(x)$ [kN] | $M_y(x)$ [kN-m] |
|----------------|------------------------|---------------------------------------|
| A | -2 | +26 |
| B | $-2 - 2 \times 2 = -6$ | $+26 - 2 \times 2 - 4 \times 1 = +18$ |
| C | -6 | $+18 - 6 \times 3 = 0$ |
| D ⁻ | -6 | $-6 \times 2.5 = -15$ |
| D ⁺ | -6 | $-15 + 20 = 5$ |
| E ⁻ | -6 | $5 - 6 \times 2.5 = -10$ |
| E ⁺ | $-6 + 16 = +10$ | -10 |
| F | +10 | $-10 + 10 \times 1 = 0$ |

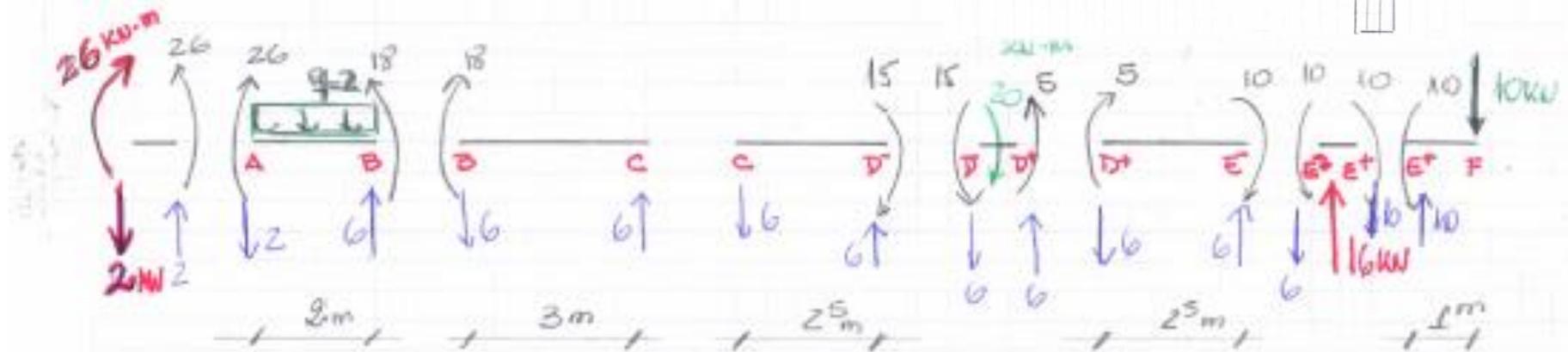
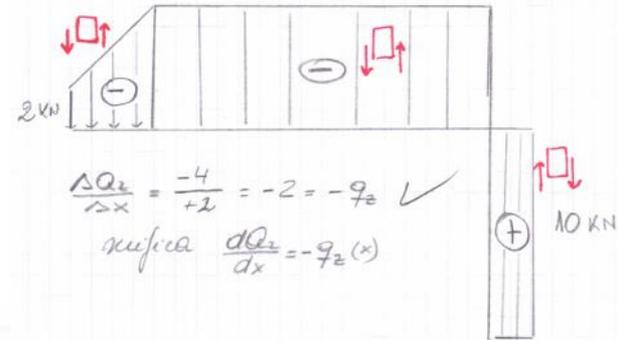
Esfuerzos positivos, terna derecha

Esfuerzos internos



Viga continua

Despiece de la estructura: verificar equilibrio en cada tramo



- RVE

- Cargas exteriores
- esfuerzos de corte $Q_2(x)$ [kN]
- momentos flectores $M_2(x)$ [kN-m]



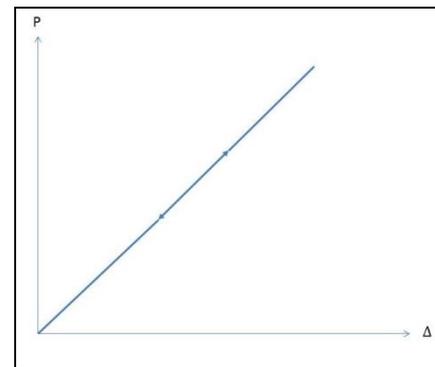
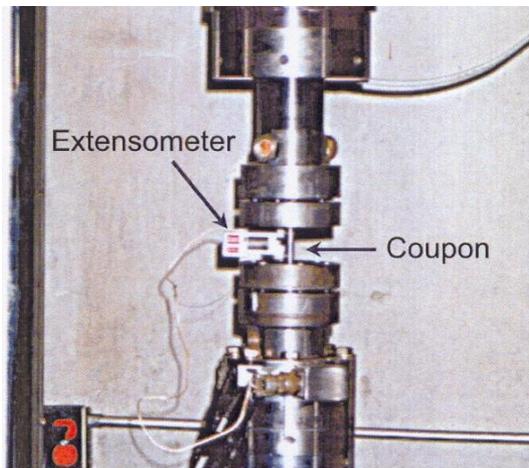
Ley de Hooke

Proporcionalidad entre carga y desplazamiento en un ensayo de tracción simple.

Matemáticamente, la ley de Hooke se expresa de la forma:

$$\delta = k P \quad (1.31)$$

donde k es la constante de proporcionalidad entre la fuerza aplicada P y el desplazamiento δ que ésta produce. Obviamente, esta constante depende de la geometría del problema y de las propiedades mecánicas del material de la viga.



PRINCIPIO SUPERPOSICION EFECTOS



Si se cumple la ley de Hooke y se supone que los desplazamientos producidos por las fuerzas actuantes son muy pequeños en relación a las dimensiones del cuerpo, de tal manera que se pueda considerar que éste mantiene la forma y dimensiones originales, entonces puede aplicarse el Principio de Superposición o Principio de Linealidad. El Principio de Superposición establece que los efectos que un sistema de fuerzas aplicadas origina en un cuerpo son iguales a la suma de los efectos que originan esas mismas fuerzas actuando por separado.

Si sobre un cuerpo actúa un sistema formado por tres fuerzas P_1 , P_2 y P_3 , el Principio de Superposición establece que la componente u del desplazamiento de un punto interior O , según una cierta dirección de referencia, será:

$$u = u_1 + u_2 + u_3 \quad (1.32)$$

donde u_1 , u_2 y u_3 son los valores que toma el correspondiente desplazamiento cuando actúan P_1 , P_2 y P_3 solas, respectivamente. Si la ley de Hooke es aplicable, será:

$$u_1 = k_1 P_1 \quad u_2 = k_2 P_2 \quad u_3 = k_3 P_3 \quad (1.33)$$

y podremos escribir:

$$u = k_1 P_1 + k_2 P_2 + k_3 P_3 \quad (1.34)$$

Lo dicho para la variable desplazamiento vale para cualquier otra variable, estática o cinemática.

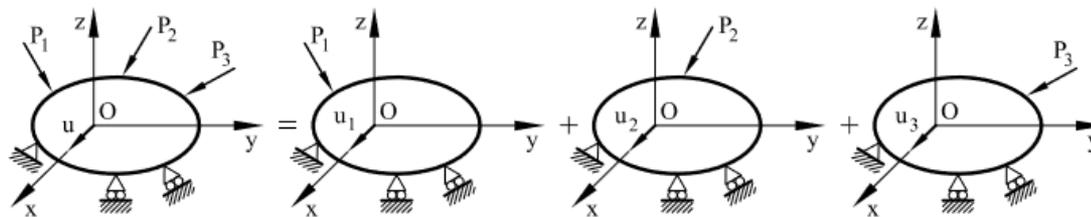
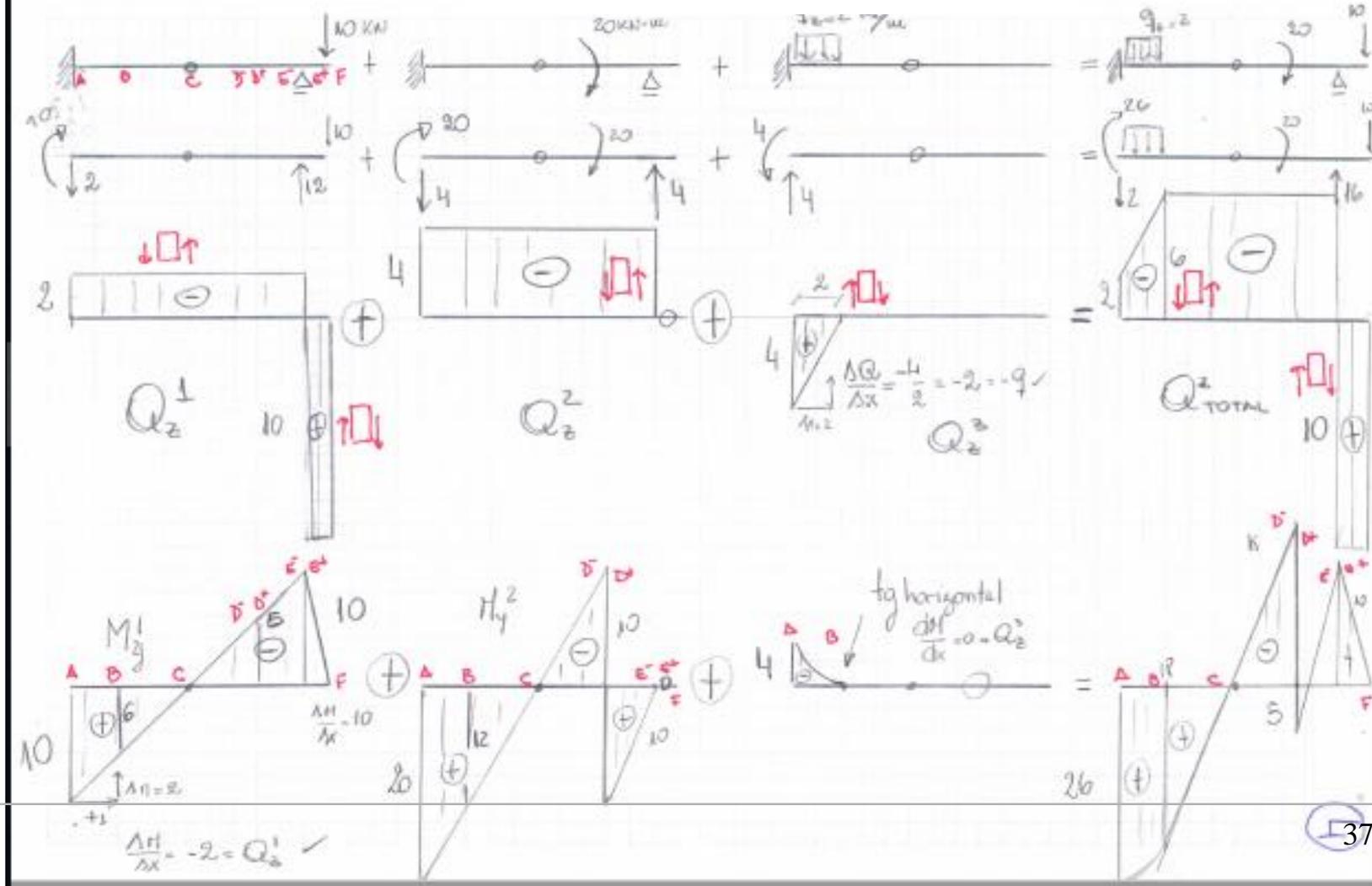


Fig. 1.15: Principio de superposición

Esfuerzos internos



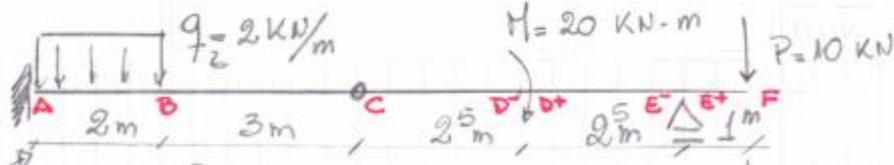
Superposición de Efectos



Esfuerzos internos



Superposición de Efectos



Habiendo calculado los esfuerzos para cada estado de carga, por separado, sumando ordenada a ordenada, obtenemos los esfuerzos para el estado de cargas total

$Q_z(x)$

| | | |
|----------------|-------------------------|----|
| A | $Q_z = -2 - 4 + 4 = -2$ | kN |
| B | $-2 - 4 = -6$ | ✓ |
| C | $-2 - 4 = -6$ | ✓ |
| D ⁻ | ✓ | |
| D ⁺ | ✓ | |
| E ⁻ | ✓ | |
| E ⁺ | $+10 + 0 + 0 = +10$ | kN |
| F | ✓ | |

$M_y(x)$

| | | |
|----------------|----------------------|------|
| A | $+10 + 20 - 4 = +26$ | kN·m |
| B | $+6 + 12 + 0 = +18$ | ✓ |
| C | 0 | |
| D ⁻ | $-5 - 10 + 0 = -15$ | ✓ |
| D ⁺ | $-5 + 10 + 0 = +5$ | ✓ |
| E ⁻ | $-10 + 0 + 0 = -10$ | ✓ |
| E ⁺ | -10 | ✓ |
| F | 0 | ✓ |



Estructuras 3D

Esfuerzos internos

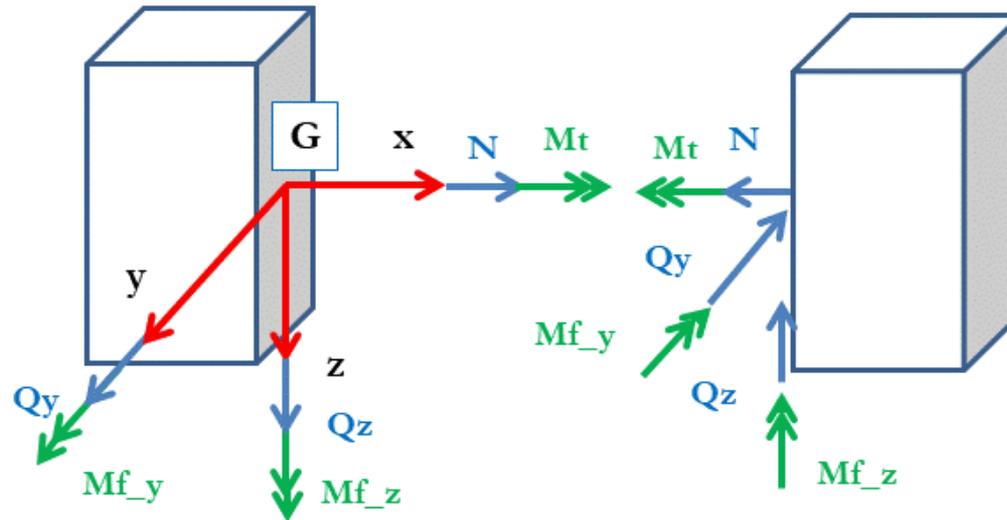


Convención de signos: esfuerzos positivos

Cara positiva

(o cara izquierda de la sección de análisis)

Cara derecha



Los esfuerzos los consideramos positivos cuando sus respectivos vectores hacen proyección positiva respecto de los ejes coordenadas de la cara positiva.

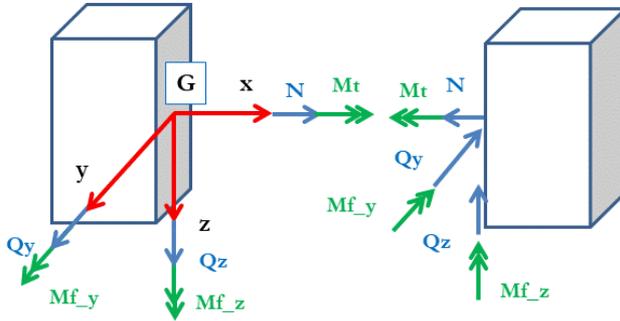
Los diagramas los dibujamos coincidiendo su signo con el eje correspondiente, perpendicular al eje de la barra.

Esfuerzos internos



Cara positiva
(o cara izquierda de la sección de análisis)

Cara derecha



$$\mathbf{R}_d(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x})\mathbf{i} + Q_y(\mathbf{x})\mathbf{j} + Q_z(\mathbf{x})\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_d(\mathbf{x}) = M_t(\mathbf{x})\mathbf{i} + M_{fy}(\mathbf{x})\mathbf{j} + M_{fz}(\mathbf{x})\mathbf{k}$$

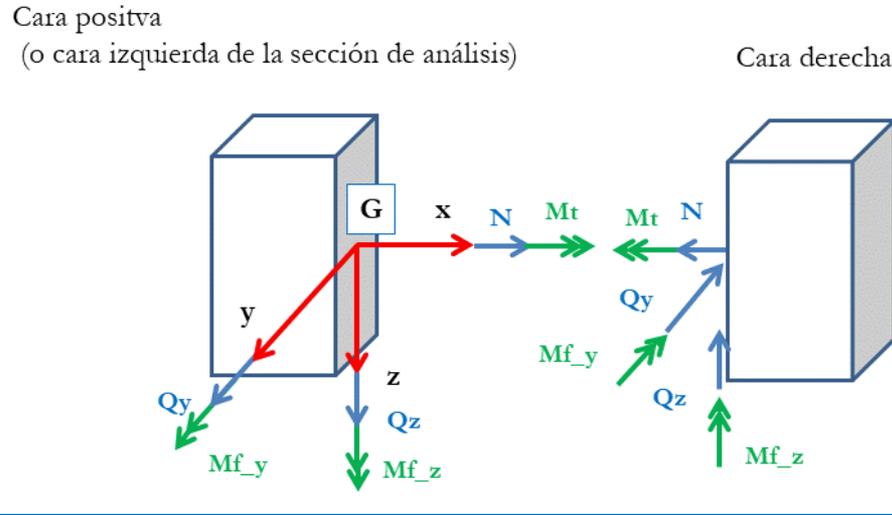
$N(\mathbf{x})$: esfuerzo normal

$Q_y(\mathbf{x}); Q_z(\mathbf{x})$: esfuerzos de corte, cortantes, cizalladura

$M_t(\mathbf{x})$: momento torsor

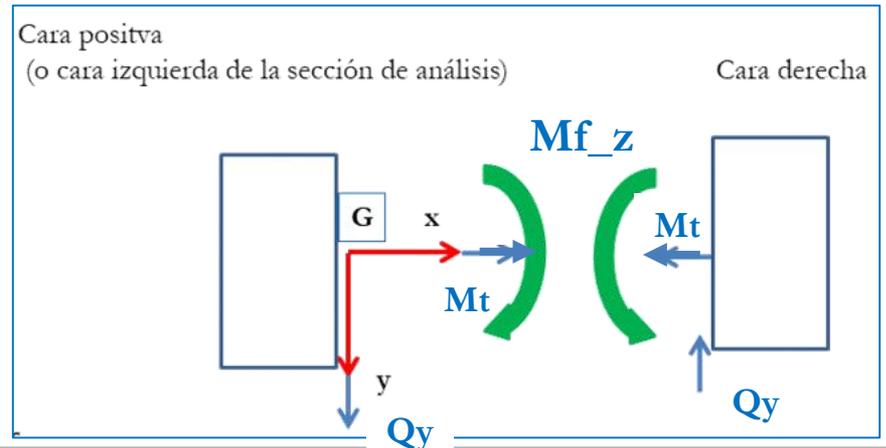
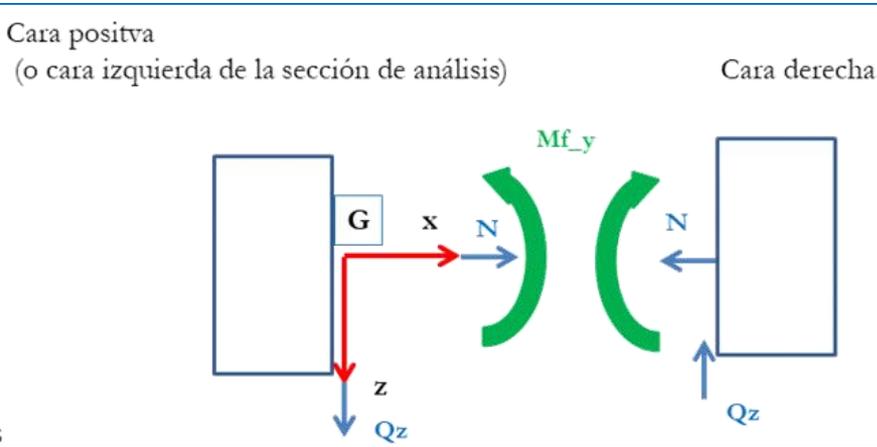
$M_{fy}(\mathbf{x}); M_{fz}(\mathbf{x})$: momento flectores

Esfuerzos internos



Esfuerzos positivos
Plano Vertical X-Z

Esfuerzos positivos
Plano Horizontal X-Y



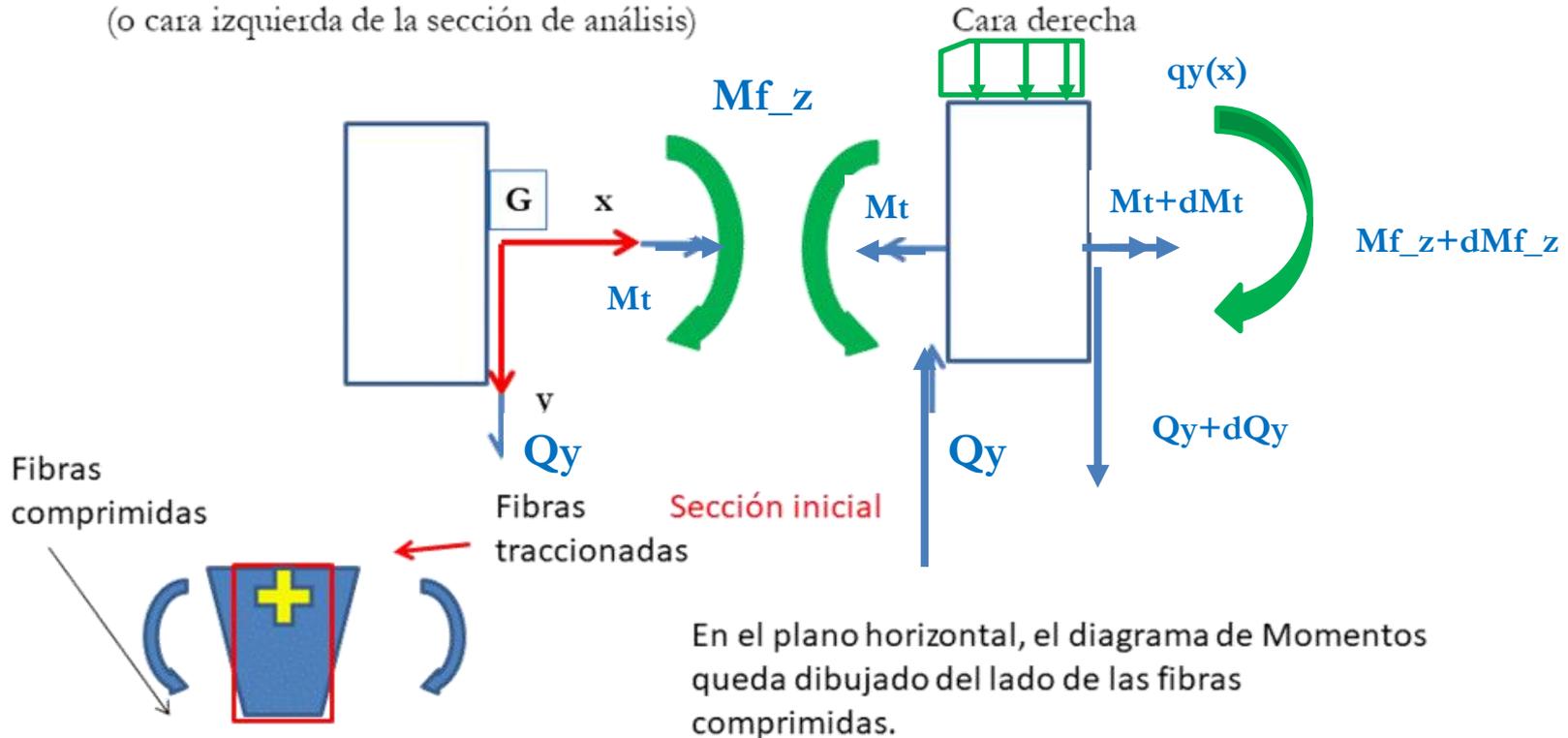
Esfuerzos internos



Esfuerzos positivos Plano Horizontal Plano X-Y

Cara positiva

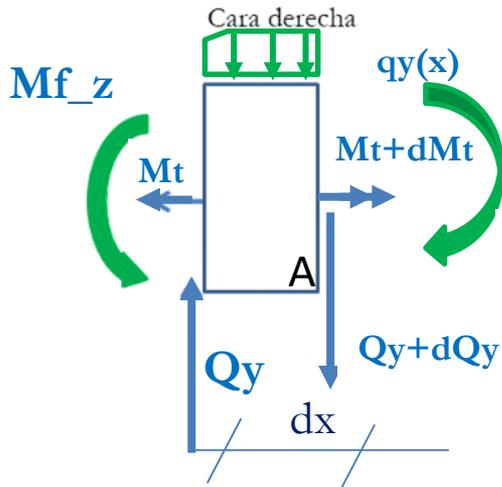
(o cara izquierda de la sección de análisis)



Esfuerzos internos



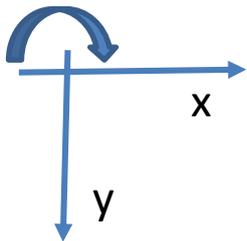
Esfuerzos positivos Plano Horizontal Plano X-Y



$$-Mt + Mt + dMt + mt(x) * dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dMt}{dx} = -mt(x)$$

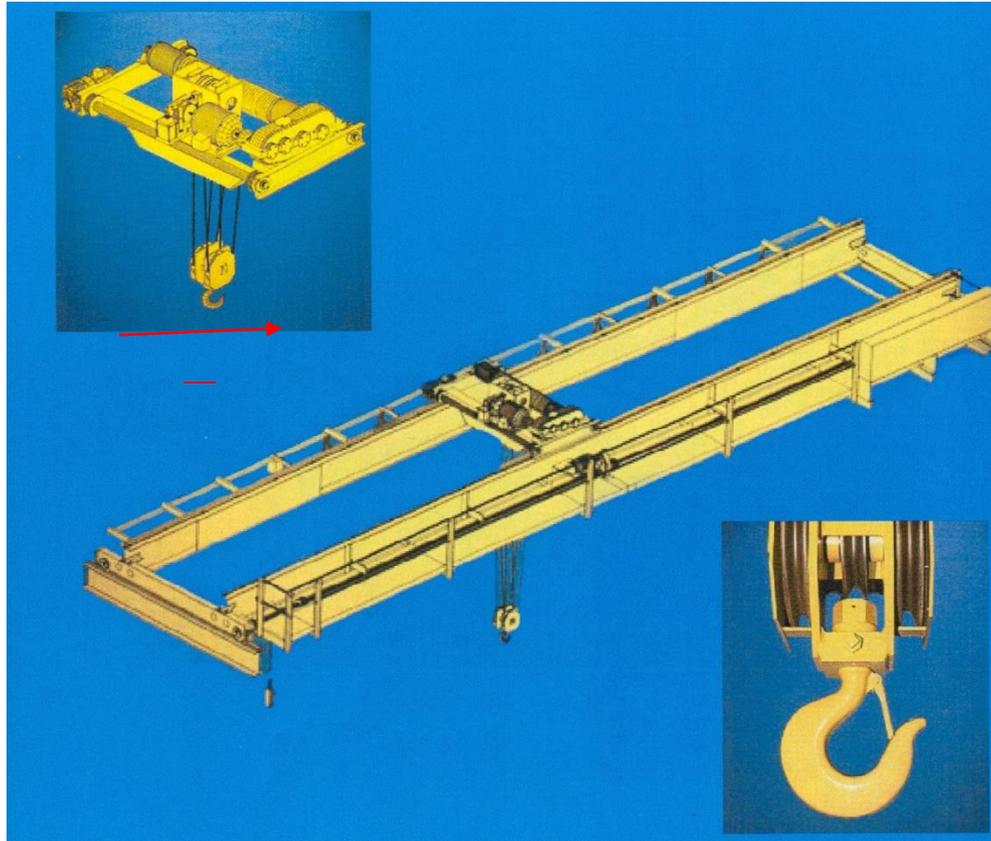
$$-Qy + Qy + dQy + qy(x) * dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQy}{dx} = -qy(x)$$

$$-Mf_z + Mf_z + dMf_z + Qy(x) * dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dMf_z}{dx} = -Qy(x)$$





Viga puente grúa



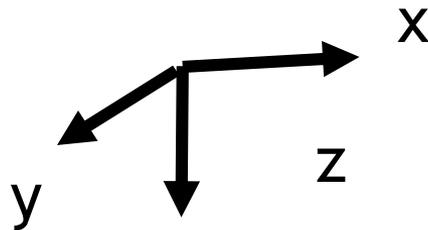
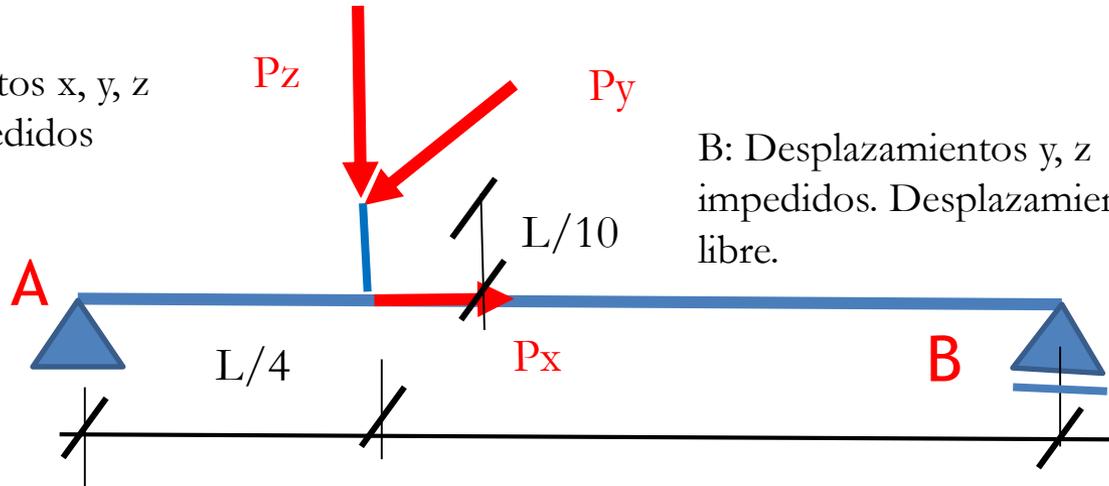
Esfuerzos internos



Viga puente grúa

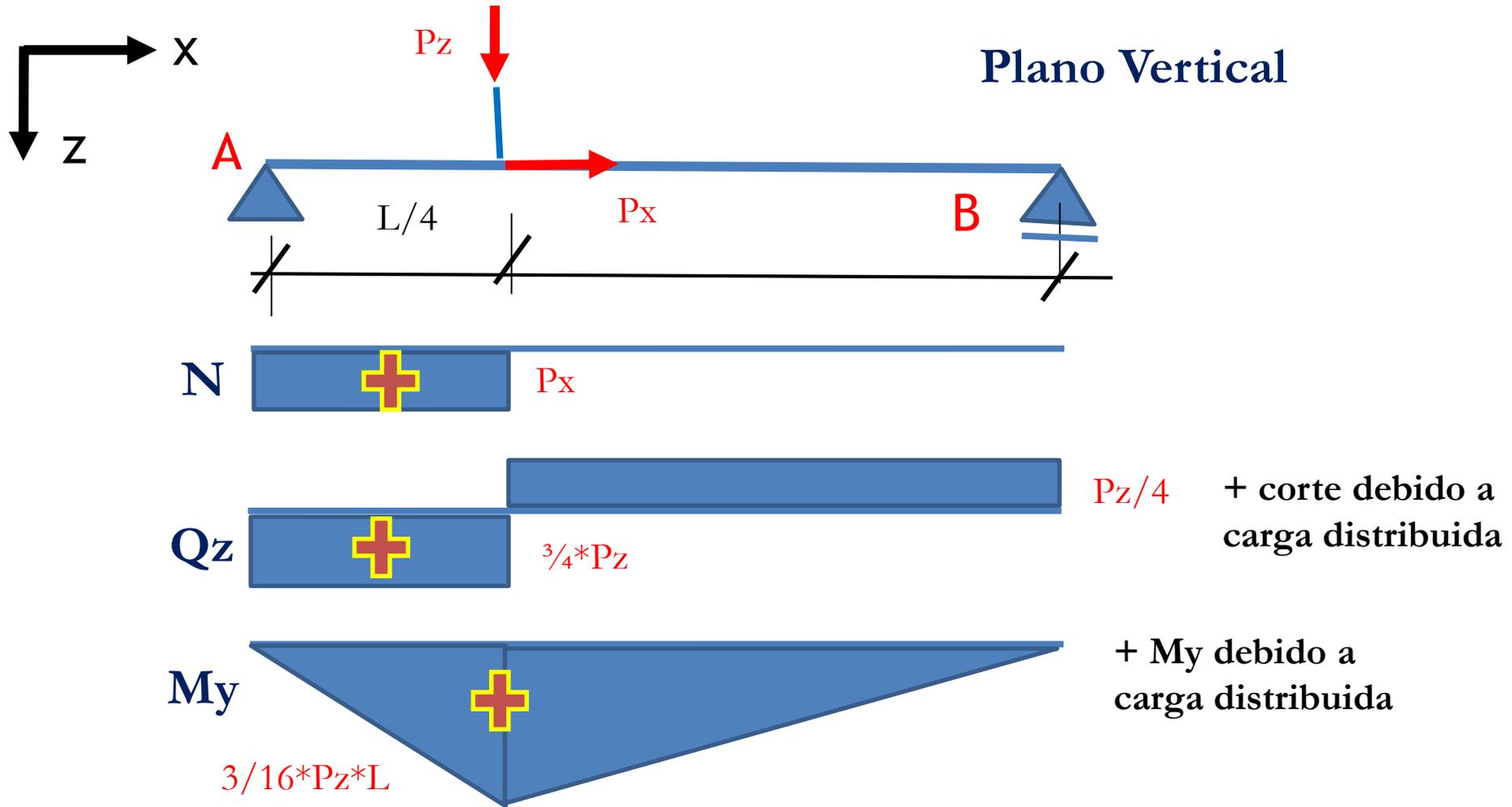
A: Desplazamientos x, y, z
y giro $tita_x$ impedidos

B: Desplazamientos y, z
impedidos. Desplazamiento x
libre.

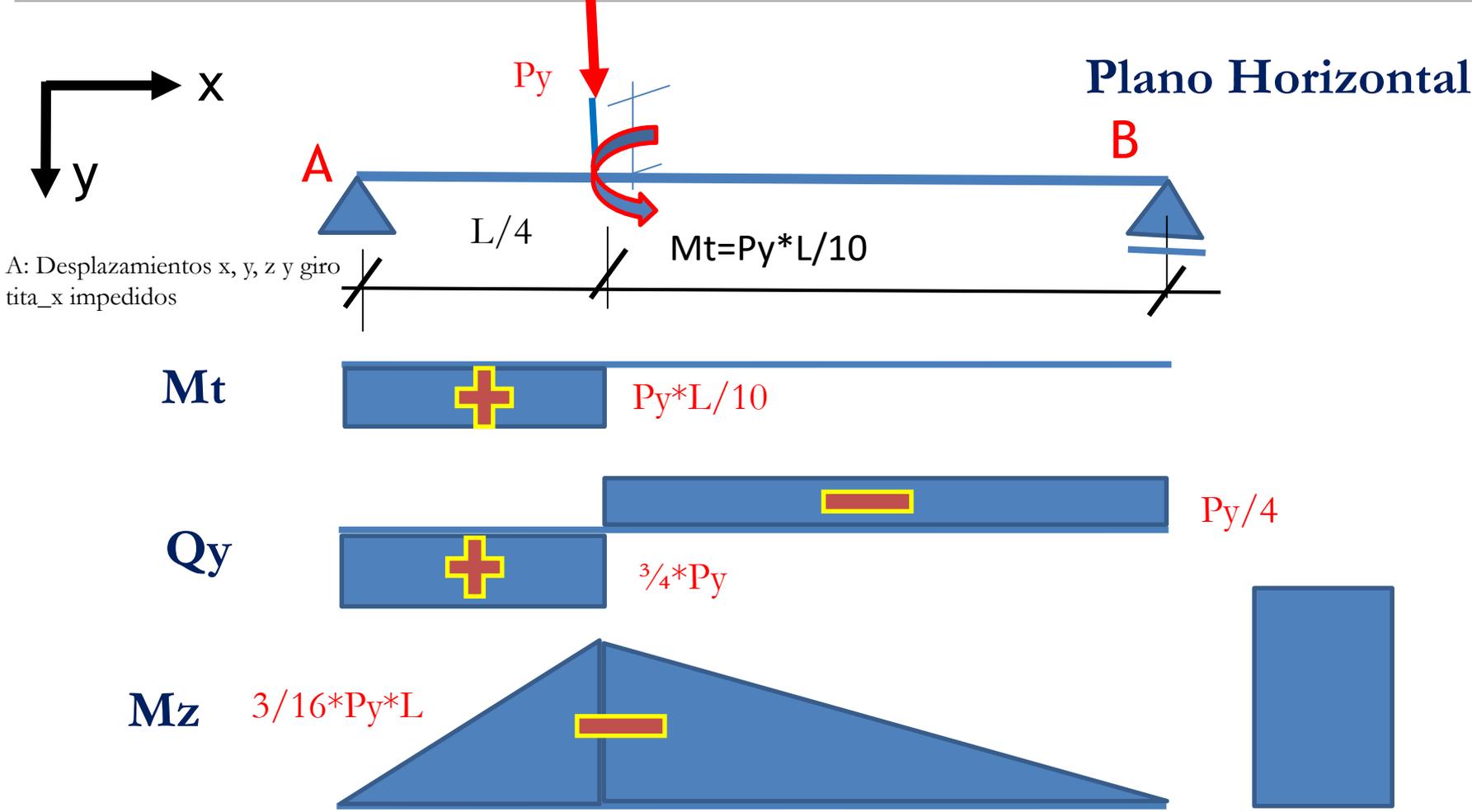


Carga de frenado $P_x = 5 \text{ kN}$
Peso del carro $P_z = 50 \text{ kN}$
Fuerza de bamboleo $P_y = 10 \text{ kN}$
 $L = 6 \text{ m}$
*Peso de la viga AB $q = 1 \text{ kN/m}$

Esfuerzos internos



Esfuerzos internos

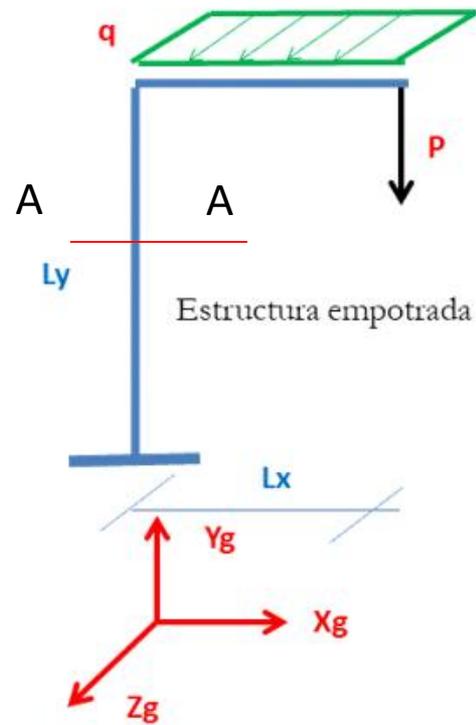


Esfuerzos internos

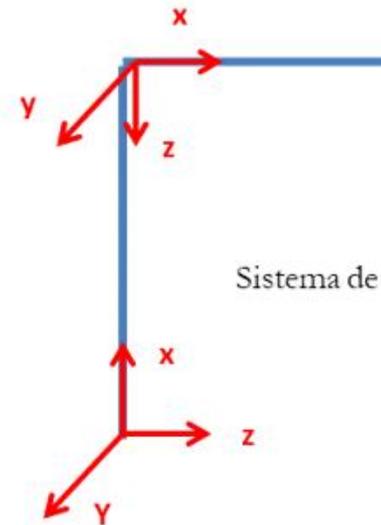


Ejemplo 3D

Esfuerzos característicos Ejercicio 3D



Sistema de Coordenadas globales



Sistema de Coordenadas Locales

Esfuerzos internos



Ejemplo 3D

En este ejemplo resolvemos reduciendo la resultante de los esfuerzos que actúan a la derecha de la sección de análisis, al baricentro de la cara izquierda (cara positiva).

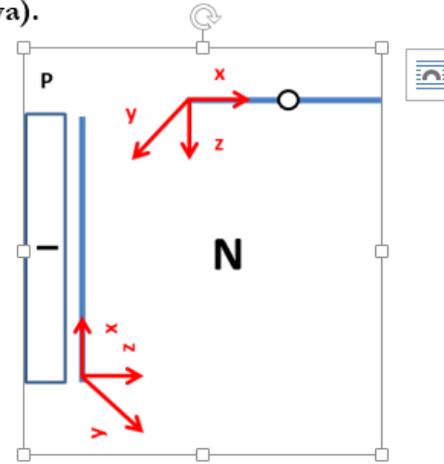
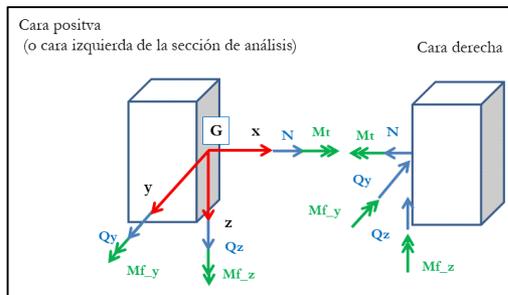
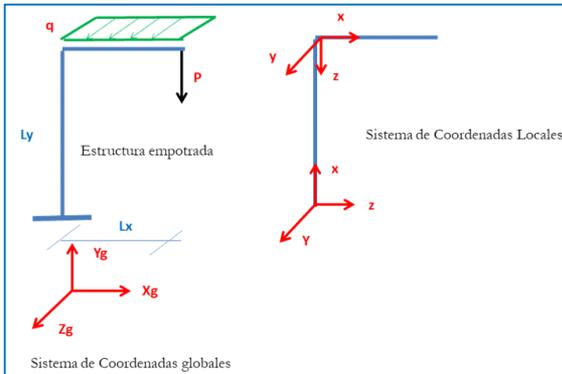
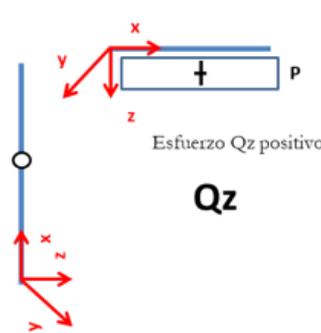


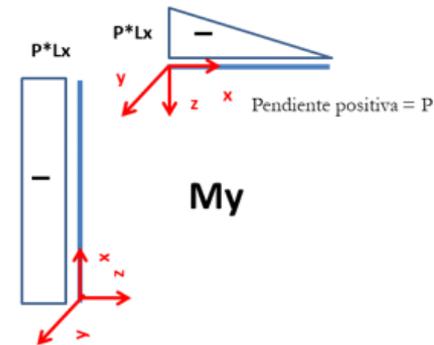
Fig. 4: Esfuerzo normal de compresión



Esfuerzos Positivos



Esfuerzo de corte Q_z , plano vertical

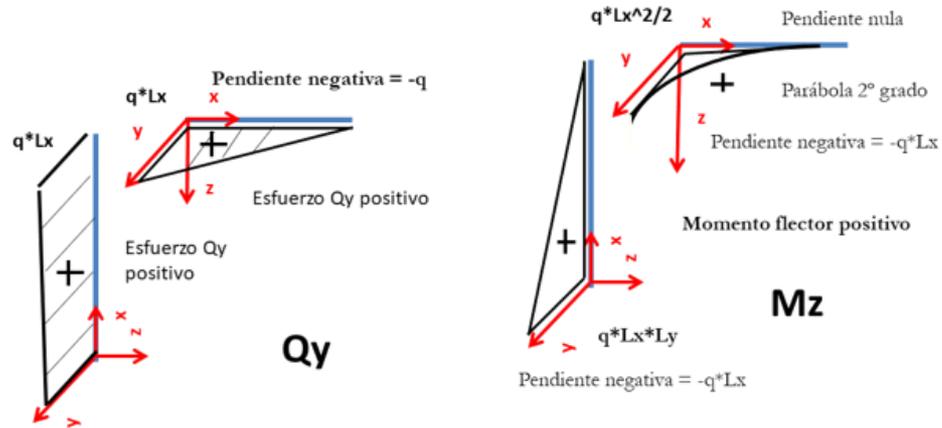
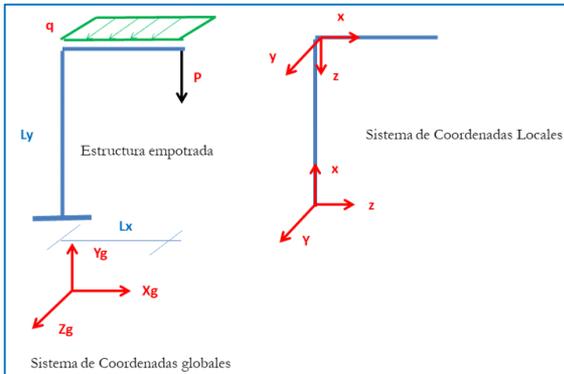


Momento flector M_y , plano vertical

Esfuerzos internos



Ejemplo 3D



Esfuerzo de corte Q_y , plano horizontal

Momento flector M_z , plano horizontal
Fig. 6

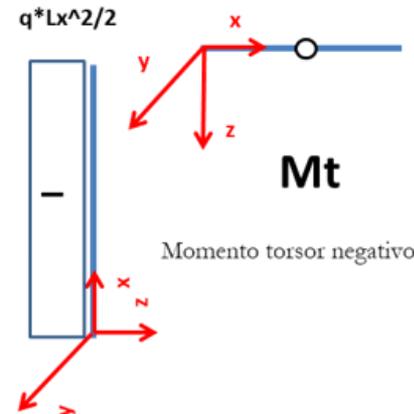
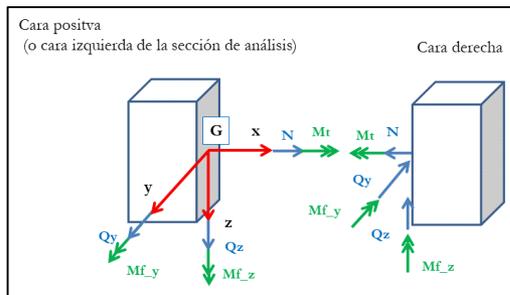


Fig. 7: Momento torsor

Esfuerzos Positivos