

Análisis Matemático 2

Resolución del coloquio de fecha 24/07/18
tema I con hipervínculos a videos on-line

Autor: Martín Maulhardt

Revisión: Fernando Acero y Ricardo Sirne

Análisis Matemático II y II "A"

Facultad de Ingeniería - UBA

Ejercicios de Coloquio Resueltos

Primer cuatrimestre de 2018

Ejercicio 1.

Calcule la longitud de la curva definida por la intersección de las superficies de ecuaciones:

$$x^2 + 2y^2 = 8 \quad \text{y} \quad z = y + 2 \quad \text{con} \quad x \geq 0.$$

Solución.

Sea C la curva definida por el sistema de ecuaciones e inecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 8 \\ z = y + 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La curva C se puede parametrizar regularmente a través de la función inyectiva $\vec{\sigma} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow R^3$ definida por

$$\vec{\sigma}(t) = (\sqrt{8} \cos(t), 2 \sin(t), 2 \sin(t) + 2).$$

Luego, la longitud de la curva C viene expresada por la integral

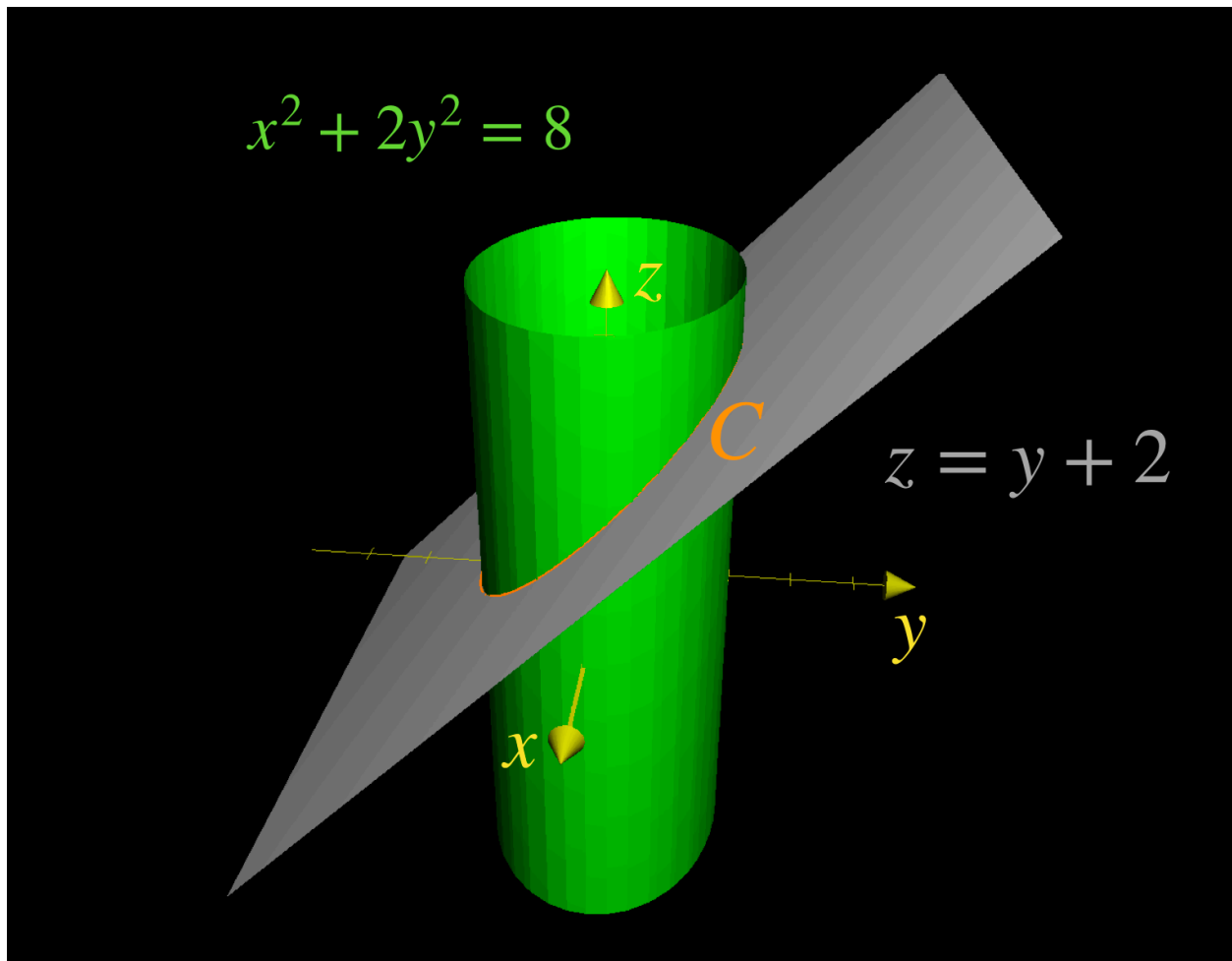
$$Long(C) = \int_C ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|\vec{\sigma}'(t)\| dt$$

y puesto que

$$\|\vec{\sigma}'(t)\| = \|(-\sqrt{8} \sin(t), 2 \cos(t), 2 \cos(t))\| = \sqrt{8}$$

vemos que la parametrización es regular y que

$$Long(C) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \|\vec{\sigma}'(t)\| dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{8} dt = \sqrt{8}\pi.$$



La curva en naranja es la curva definida como intersección del cilindro elíptico en verde y del plano en gris. Sólo se pide calcular la longitud de la parte visible que tiene las abscisas positivas.

Ver video on-line

Ejercicio 2.

Dado $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $f(x, y, z) = \varphi(x - y, y - x) + z^3$ calcule el flujo de ∇f a través de la superficie de ecuación $x + y + z = 1$ con $x^2 + z^2 \leq 4$ orientada hacia z^+ .

Solución.

Puesto que en el cálculo de ∇f debemos calcular f'_x, f'_y, f'_z la presencia del término $\varphi(x - y, y - x)$ en $f(x, y, z)$ nos induce a definir las variables

$$u = x + y \quad \text{y} \quad v = y - x.$$

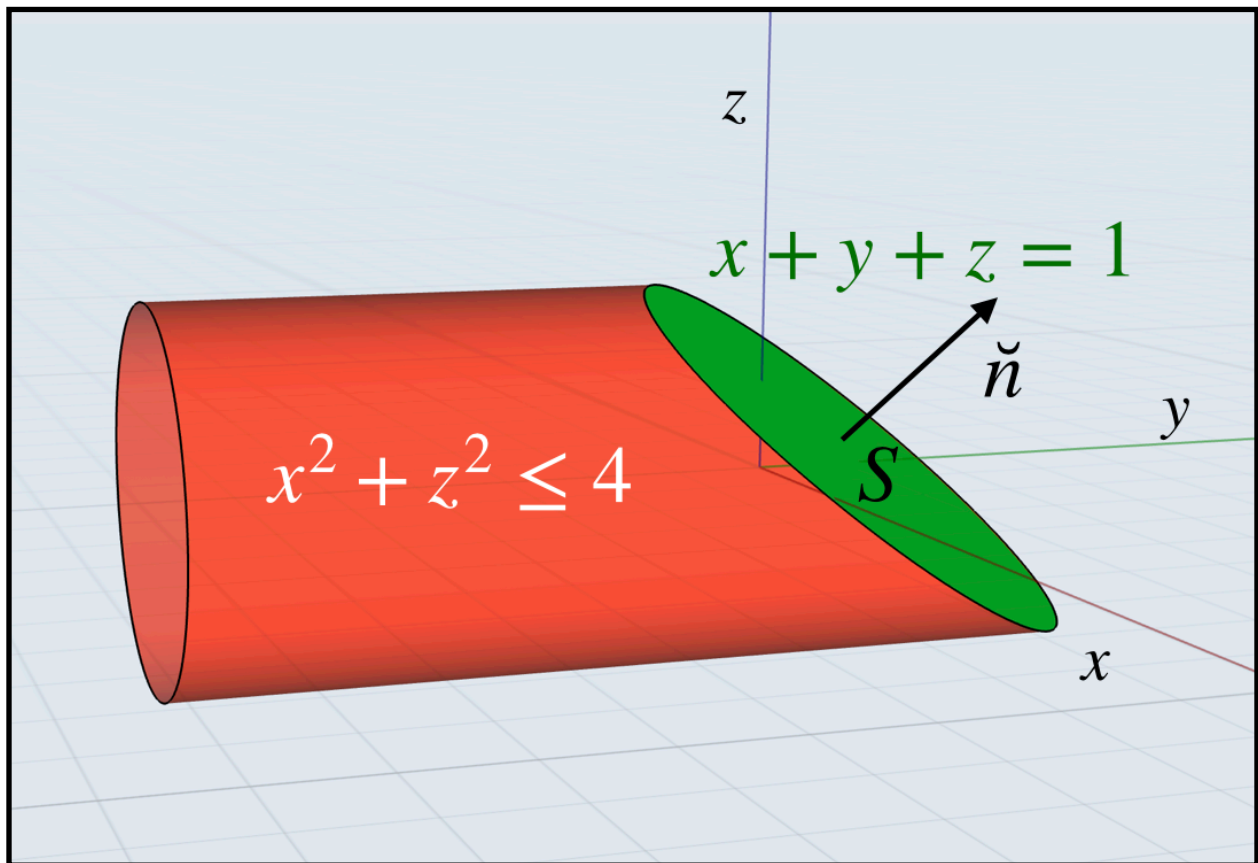
Con este cambio de variables tenemos, recordando la regla de la cadena, que

$$f'_x(x, y, z) = \varphi'_u(x - y, y - x) + \varphi'_v(x - y, y - x)(-1)$$

$$f'_y(x, y, z) = \varphi'_u(x - y, y - x)(-1) + \varphi'_v(x - y, y - x)$$

$$f'_z(x, y, z) = 3z^2.$$

La superficie en cuestión es la porción del plano de ecuación $x + y + z = 1$ con $x^2 + z^2 \leq 4$ y como queremos que esté orientada hacia z^+ un versor normal unitario a esta superficie con esa orientación es el versor $\check{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.



La superficie de nuestro ejercicio es la parte plana verde que está dentro del cilindro circular colorado. Hemos indicado también el versor normal para orientar a dicha superficie como se pide en el enunciado del problema.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} & \iint_S \nabla f \cdot \vec{n} \, d\sigma = \\ &= \iint_S \left(\varphi'_u - \varphi'_v, -\varphi'_u + \varphi'_v, 3z^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) d\sigma \\ &= \iint_S \sqrt{3} z^2 \, d\sigma. \end{aligned}$$

La superficie S se puede parametrizar por la función vectorial inyectiva $\vec{\sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{\sigma}(x, z) = (x, 1 - x - z, z)$$

donde $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 4\}$.

Como

$$\vec{\sigma}'_x(x, z) = (1, -1, 0)$$

$$\vec{\sigma}'_z(x, z) = (0, -1, 1)$$

tenemos que

$$(\vec{\sigma}'_x \times \vec{\sigma}'_z)(x, z) = (-1, -1, -1)$$

y entonces

$$\|(\vec{\sigma}'_x \times \vec{\sigma}'_z)(x, z)\| = \|(-1, -1, -1)\| = \sqrt{3}$$

de lo cual vemos incidentalmente que la parametrización $\vec{\sigma} : D \rightarrow R^3$ es regular.

Luego

$$\iint_S \sqrt{3} z^2 d\sigma = \iint_D \sqrt{3} z^2 \sqrt{3} dx dy.$$

Introduciendo las coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ z = r \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

esta última integral se transforma en

$$3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) r \, dr d\theta =$$

$$3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \operatorname{sen}^2(\theta) \, dr d\theta = (3)(4) \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta) \, d\theta = 12\pi.$$

Por lo tanto

$$\iint_S \nabla f \cdot \vec{n} \, d\sigma = 12\pi.$$

Ver video on-line

Ejercicio 3.

Siendo $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq x + 2, x + y \leq 4, y \geq 0\}$

calcule $\iint_{D_{xy}} 2(y - x) \, dx \, dy$ aplicando el cambio de variables

definido por $(x, y) = (v - u, v)$.

Solución.

Si en las inecuaciones que definen D_{xy} expresamos x e y en función de u y v obtenemos las inecuaciones

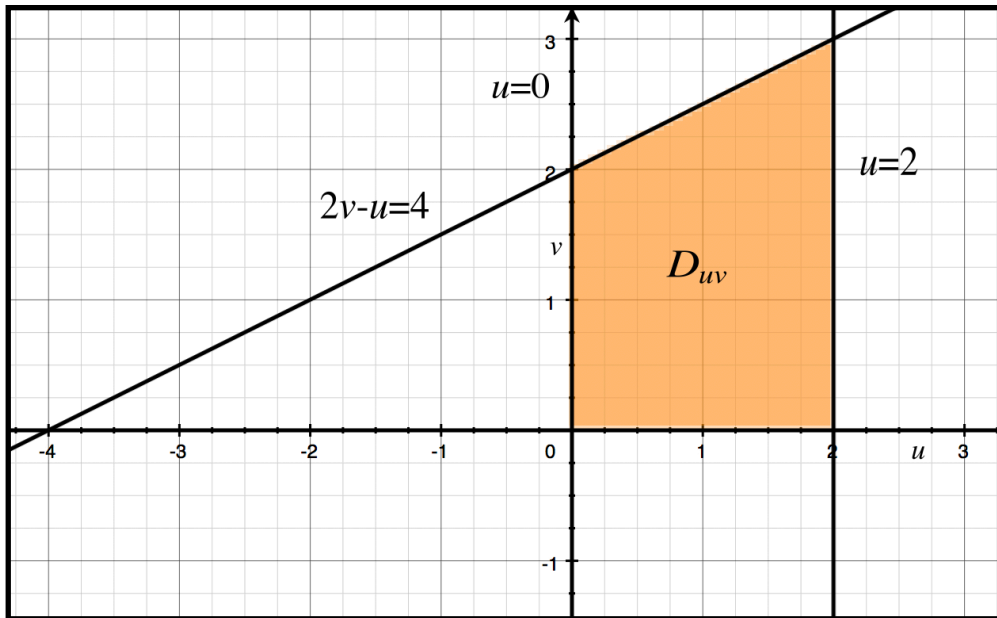
$$v - u \leq v \leq v - u + 2, \quad 2v - u \leq 4, \quad v \geq 0$$

donde fue fundamental que la transformación

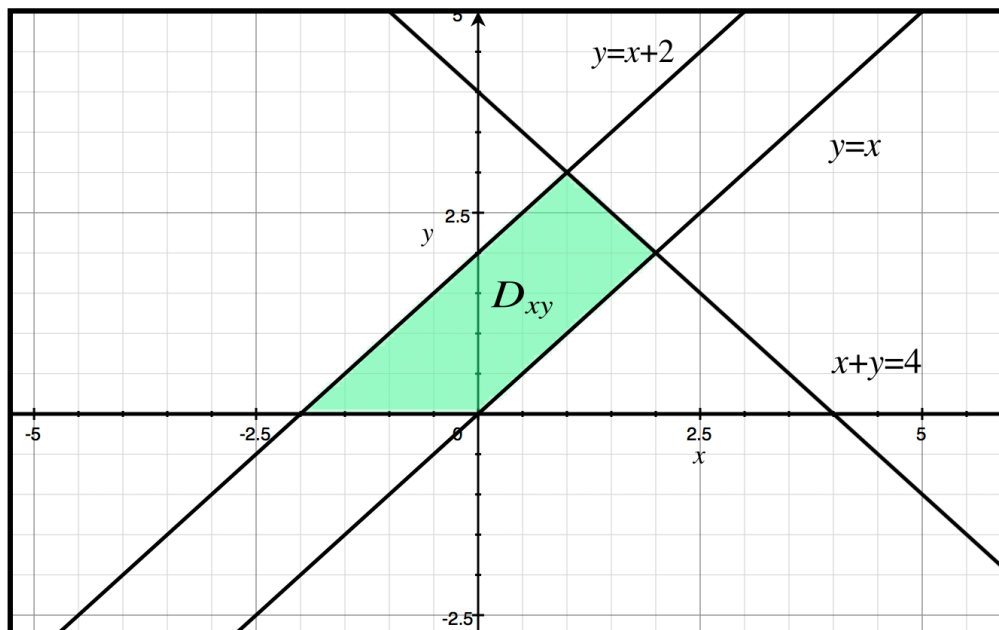
$(x, y) = (v - u, v)$ es biyectiva. Si en la primera inecuación

sumamos a los tres miembros $u - v$ tenemos

$$0 \leq u \leq 2$$



El dominio D_{uv} se aplica a través de la función biyectiva $(x, y) = (v - u, v)$ en el dominio D_{xy} de igual área pues $|J| = |-1| = 1$. (los gráficos tienen distinta escala)



lo que nos permite expresar nuestra integral original como una integral doble en D_{uv} en la forma

$$\iint_{D_{xy}} 2(y-x) \, dx \, dy = \int_0^2 \int_0^{2+u/2} 2u |J| \, dv \, du.$$

La matriz jacobiana

$$D \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} (u, v) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (u, v)$$

tiene determinante jacobiano $J = -1$. Colocando el módulo de J en la integral doble que precisamos calcular tenemos

$$\int_0^2 \int_0^{2+u/2} 2u |J| \, dvdu = \int_0^2 \int_0^{2+u/2} 2u |-1| \, dvdu$$

$$\int_0^2 2u \left(2 + \frac{u}{2}\right) \, du = 2u^2 + \frac{u^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{32}{3}.$$

Ver video on-line

Ejercicio 4.

El campo vectorial $\vec{f} = (P, Q) \in C^1$ en $R^2 - \{(0,0)\}$ tiene matriz jacobiana

$$D\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} P'_x(x, y) & 2 + \varphi(x, y) \\ 4 + \varphi(x, y) & Q'_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

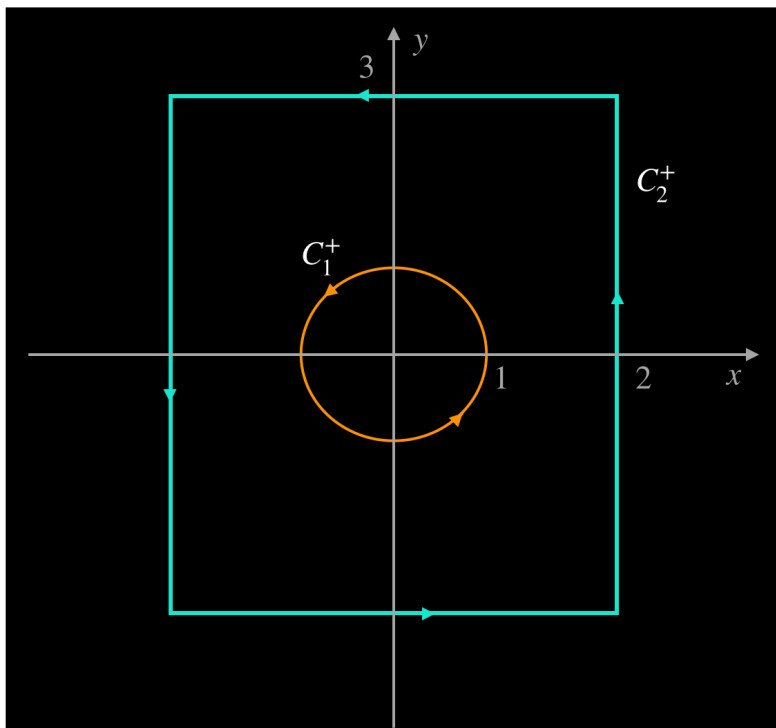
Sabiendo que para C_1 de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ resulta

$$\oint_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 3 \text{ calcule } \oint_{C_2^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} \text{ siendo } C_2 \text{ la frontera del}$$

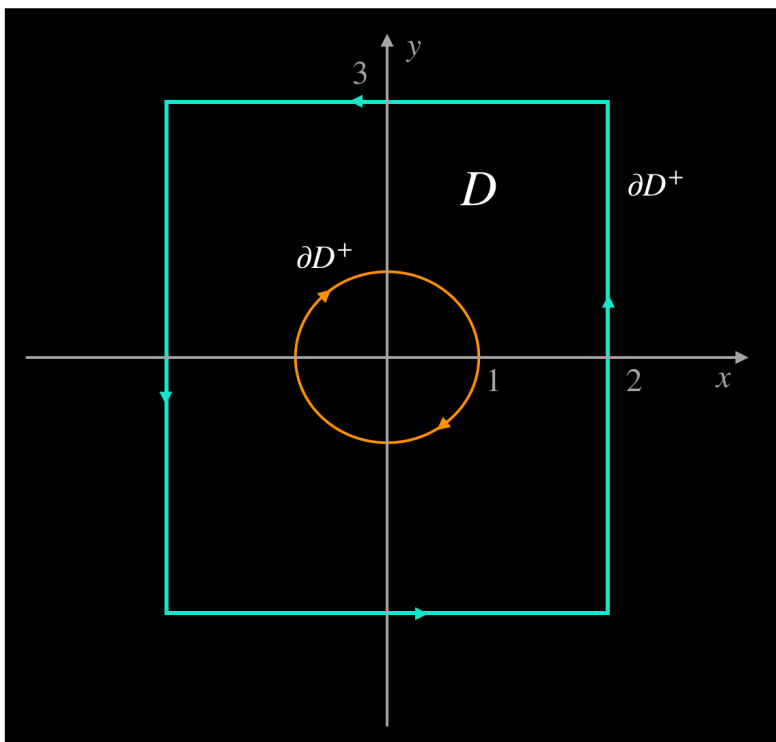
rectángulo $[-2, 2] \times [-3, 3]$.

Solución.

Comencemos por dibujar las curvas en cuestión con sus orientaciones. Si llamamos D al dominio comprendido entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la frontera del rectángulo $[-2, 2] \times [-3, 3]$ y observando que el campo $\vec{f} \in C^1$ en un abierto que contiene a D tenemos, aplicando el teorema de Green para dominios múltiplemente conexos que



Curvas orientadas según los datos del ejercicio



Curvas orientadas en relación al dominio sobre el cual se aplicará el teorema de Green. Préstese atención a la orientación de la curva en naranja.

$$\int_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q'_x - P'_y) \, dx dy.$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_{C_2^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} + (-3) &= \iint_D \left(4 + \varphi(x, y) - (2 + \varphi(x, y)) \right) \, dx dy = \\ &= \iint_D 2 \, dx dy = 2 A(D) = 2(24 - \pi) = 48 - 2\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto llegamos al resultado final

$$\int_{C_2^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 51 - 2\pi.$$

Ver video on-line

Ejercicio 5.

Calcule el volumen del cuerpo definido por

$$2y \leq z \leq 4 + 2y - x^2 - y^2.$$

Solución.

Sea $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y \leq z \leq 4 + 2y - x^2 - y^2\}$.

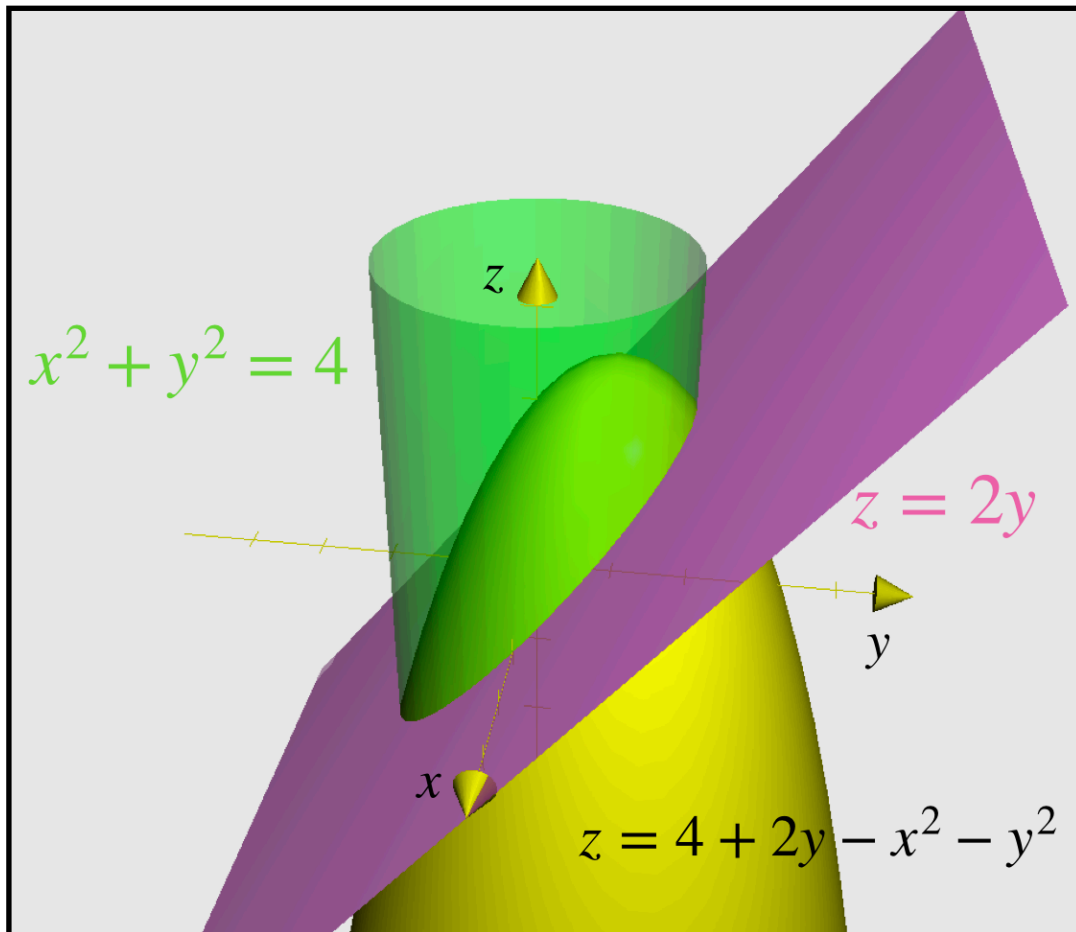
Entonces tenemos que

$$\text{Vol}(K) = \iiint_K dx dy dz.$$

El cuerpo K está acotado inferiormente por la superficie de ecuación $z = 2y$ y superiormente por la superficie de ecuación $z = 4 + 2y - x^2 - y^2$. La curva intersección de estas superficies satisface necesariamente la condición

$$2y = 4 + 2y - x^2 - y^2 \implies x^2 + y^2 = 4.$$

Luego, dicha curva intersección está contenida en el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.



Nuestro cuerpo es el volumen acotado comprendido entre el plano violeta y el paraboloides amarillo. Vemos también que este volumen está comprendido dentro del cilindro verde.

Introduzcamos entonces las coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \operatorname{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Con este cambio de variables el volumen de K es

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}(K) &= \iiint_K dx dy dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{2r \operatorname{sen}(\theta)}^{4+2r \operatorname{sen}(\theta)-r^2} r dz d\theta dr = \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r(4-r^2) d\theta dr = 2\pi \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \right) = 2\pi \cdot 4 = 8\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\operatorname{Vol}(K) = 8\pi.$$

Ver video on-line

Más videos aún!

Para tu mayor comodidad agregamos todavía dos links a los videos, tal vez los más importantes, sobre el teorema de Stokes y el teorema de Gauss. La solución del primer link fue realizada nada más y nada menos que por Fernando Acero y la del segundo link espectacularmente por nuestro director de cátedra Ricardo Sirne. He aquí los links a esos videos para un sencillo acceso.

Video sobre el teorema de Gauss (Fernando Acero)

Video sobre el teorema de Stokes (Ricardo Sirne)

Te deseamos buen estudio para el coloquio!

