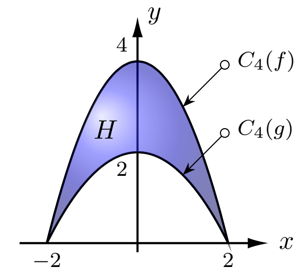
1. Sea H la chapa plana limitada por las curvas de nivel 4 de los campos escalares $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 + y$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x, y) = x^2 + 2y$. Calcular la masa de H si su densidad superficial es en cada punto proporcional a la distancia desde el punto al eje y.

♣ Por definición, es $C_4(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 4\}, C_4(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y = 4\}$, parábolas que delimitan la región acotada de la figura. La región H es simétrica respecto al eje y y su densidad $\delta(x, y) = k \mid x \mid, k > 0$ cumple que $\delta(x, y) = \delta(-x, y)$, de modo que la masa total es el doble de la masa de la región $D = \{(x, y) \in H : x \geq 0\}$ esto es que $\text{masa}(H) = \iint_H \delta(x, y)\, dy\, dx = 2 \iint_D \delta(x, y)\, dy\, dx$. Solo resta el cálculo:

$$2 \iint_D \delta(x, y)\, dy\, dx = 2k \int_0^2 \int_{2-x^2/2}^{4-x^2} x\, dy\, dx = 2k \int_0^2 (3x^3/2 - 2x)\, dx = 2k(3x^4/8.x^2) \mid_0^2 = 4k$$

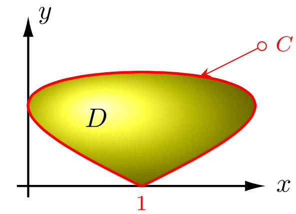
Observación. La masa de$H$ no es el doble de la de D porque el área de H sea el doble de la de D; si en este mismo ejercicio la densidad fuese proporcional a la distancia a la recta de ecuación $x + 2 = 0$, ya no sería $\text{masa}(H) = 2\,\text{masa}(D)$.



$\iint_H \delta(x, y)\, dy\, dx = 4k$

2. Sea D la región plana representada en la figura. Calcular su área, sabiendo que una parametrización de su curva frontera C es $\vec{\sigma} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\sigma}(t) = (1 - \text{sen}(2t), \text{sen}(t))$.

♣ Se quiere calcular $\text{área}(D) = \iint_D dx\, dy$. Para aprovechar la información de C, puede elegirse un campo vectorial $\vec{f} = (P, Q)$ que sea C^1 en un abierto que contenga al compacto D y su frontera suave en casi todas partes ∂D^+ recorrida una vez dejando D en su interior, con la condición de que $Q_x(x, y) - P_y(x, y) = 1$, pues en tal caso, al aplicarse el teorema de Green queda que $\text{área}(D) = \iint_D dx\, dy = \iint_D (Q_x(x, y) - P_y(x, y)) dx\, dy = \oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{l}$. Una elección posible (no única, desde luego) que cumple lo anteriror es $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x, y) = (0, x)$; por otra parte, la parametrización dada en el enunciado solo pierde inyectividad y regularidad en un punto ($\vec{\sigma}(0) = \vec{\sigma}(\pi) = (1, 0)$) y orienta C de modo que $C = \partial D^-$ (opuesto al anterior), así que poniendo todo junto es $\text{área}(D) = -\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l} = -\int_0^\pi (0, 1 - \text{sen}(2t)) \cdot (-2\cos(2t), \cos(t))\, dt = -\int_0^\pi (\cos(t) - 2\,\text{sen}(t)\cos^2(t))\, dt = -(\text{sen}(t) + 2\cos^3(t)/3) \mid_0^\pi = 4/3$.

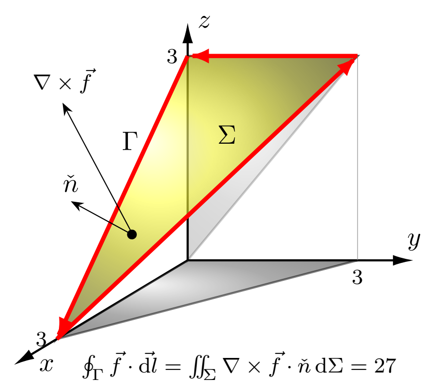


$\iint_D dx\, dy = \frac{4}{3}$

3. Dada la superficie Σ de ecuación $x + z = 3$ con $0 \leq y \leq z, x \geq 0$ y el campo vectorial $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (g(x, z), x^2, 2yz)$, calcular la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva borde de Σ, e indicar gráficamente la orientación adoptada.

♣ Llamando Γ a la curva borde de Σ, con las orientaciones indicadas en la figura y siendo $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, es aplicable el teorema de Stokes (enunciarlo y detallar aquí el cumplimiento de sus hipótesis en este ejercicio), $\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{l} = \iint_\Sigma \nabla \times \vec{f} \cdot \check{n}\, d\Sigma$. Una parametrización regular e inyectiva de Σ es $\vec{\sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(y, z) = (3 - z, y, z)$, siendo $D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq z \leq 3, 0 \leq y \leq z\}$, con producto vectorial fundamental $\vec{n}(y, z) = \vec{\sigma}_y(y, z) \times \vec{\sigma}_z(y, z) = (1, 0, 1)$, que orienta la superficie como en la figura. Restan los cálculos: $\iint_\Sigma \nabla \times \vec{f} \cdot \check{n}\, d\Sigma = \iint_D \nabla \times \vec{f}(3 - z, y, z)) \cdot \vec{n}(y, z)\, dy\, dz = \iint_D (2z, g_z(3 - z, z), 6 - 2z) \cdot (1, 0, 1)\, dy\, dz = \iint_D 6\, dy\, dz$. Finalmente, la siguiente expresión da la circulación pedida.

$$\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{l} = \iint_\Sigma \nabla \times \vec{f} \cdot \check{n}\, d\Sigma = \iint_D 6\, dy\, dz = \int_0^3 \int_0^z 6\, dy\, dz = \int_0^3 6z\, dz = (3z^2) \mid_0^3 = 27$$



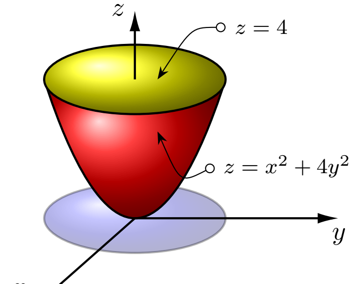
$\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{l} = \iint_\Sigma \nabla \times \vec{f} \cdot \check{n}\, d\Sigma = 27$

4. El campo vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (2x, 8y, -1)$ admite una función potencial $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que cumple $\Phi(0, 0, 1) = 2$. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie cuyos puntos tienen potencial igual a 3 y el plano de ecuación $z = 4$.

♣ Es inmediato que $\vec{f} = \nabla\Phi$ para $\Phi(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z + c$, cualquiera sea $c \in \mathbb{R}$ (para un campo $\vec{f}(x, y, z) = (f_1(x), f_2(y), f_3(z))$ una cualquier función potencial es $\Phi(x, y, z) = F_1(x) + F_2(y) + F_3(z) + c$ siendo $F_k' = f_k, k = 1, 2, 3$). Imponiendo la condición $\Phi(0, 0, 1) = 2$ resulta $c = 3$, es decir que $\Phi(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z + 3$ y entonces $C_3(\Phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 - z + 3 = 3\}$, esto es $C_3(\Phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + 4y^2\}$. Se pide el volumen de $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 \leq z \leq 4\}$; escogiendo las coordenadas $x = 2r\cos(\theta), y = r\,\text{sen}(\theta), z$ con jacobiano $J(r, \theta, z) = 2r$, solo resta el cálculo:

$$\iiint_M dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{4r^2}^4 2r\, dz\, dr\, d\theta = 4\pi \int_0^1 (4r - 4r^3)\, dr = 4\pi(2r^2 - r^4) \mid_0^1 = 4\pi$$

.

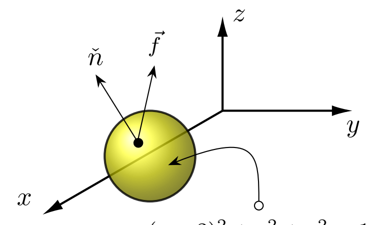


$\text{Vol}(M) = \iiint_M dV = 4\pi$

5. El campo vectorial $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x,y,z)=(xg(x),z^2-2xy,xy)$ es C^1 en todo punto $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $x>0$. Hallar g tal que $g(1)=3$ y el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $(x-2)^2+y^2+z^2\le 1$ resulte numéricamente igual al volumen del cuerpo, indicando gráficamente la orientación adoptada para la superficie.

♣ El compacto $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x-2)^2+y^2+z^2\le 1\}$ (bola unitaria centrada en $(2,0,0)$) y su frontera suave $\Sigma=\partial(M)^+$ (esfera orientada con normal saliente) se hallan incluidos en el abierto donde el campo vectorial $\vec{f}$ es C^1, de modo que se aplica el teorema de la divergencia $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma=\iiint_M \operatorname{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}V$. Si se escoge $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^+)$ tal que la divergencia de $\vec{f}$ tome el valor 1, se cumplirá que $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma=\iiint_M\,\mathrm{d}V=\operatorname{Vol}(M)$. De $\operatorname{div}(\vec{f})(x,y,z)=(xg(x))'-2x=1$ resulta $(xg(x))'=1+2x$ de donde $xg(x)=x+x^2+c$, e imponiendo la condición $g(1)=3$ resulta $c=3$, de manera que queda la función $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)=1+x+1/x$, que efectivamente es $C^1(\mathbb{R}^+)$, y satisface lo pedido (el valor del flujo resultará entonces $4\pi/3$).

$\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma=\iiint_M\,\mathrm{d}V=4\pi/3$



♠ **Bonus** (para aprender más).

(a) El teorema de la divergencia en su forma cartesiana aparece históricamente asociado a tres nombres: Green (1828, elasticidad), Gauss (1813 atracción) y Ostrogradskii (1826). The first person to state and prove the divergence theorem...was Ostrogradskii. His method of proof was, quite similar to an approach used used by Gauss in his work of 1813... and then in its vector form (1880-1901) by Heaviside and Gibbs. (Stolze, Charles. 1978, A history of the divergence theorem. Historia Mathematica, 437-442). Nota: algunas otras trasliteraciones del nombre de autor son Ostrogradsky, Ostrogradski.

(b) En (3), puede ser un buen ejercicio efectuar una parametrización distinta a la empleada en la resolución, por ejemplo una que transforme el triángulo $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le 3, 0\le y\le 3-x\}$ en la superficie Σ y resolverlo con ella.

(c) En el ejercicio (5), la función g obtenida podría servir para cumplir el enunciado cualquiera sea el compacto incluido en el recinto establecido, no solamente para la bola. Ahora, para *esa* bola, se pueden hallar otras infinitas funciones g que satisfacen el enunciado; es un buen ejercicio hallar una (distinta a la obtenida).