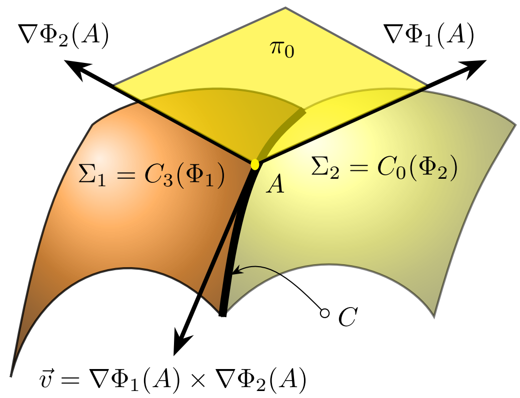
1. Sea π_0 el plano normal a la curva C definida por la intersección de las superficies $\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + ze^{yz-1} = 3\}, \Sigma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + \ln(xy - z) - 2yz = 0\}$ en el punto $A = (2,1,1)$. Calcular el área del trozo de π cuya proyección sobre el plano xz es el rectángulo $D = [1,2] \times [2,4]$.

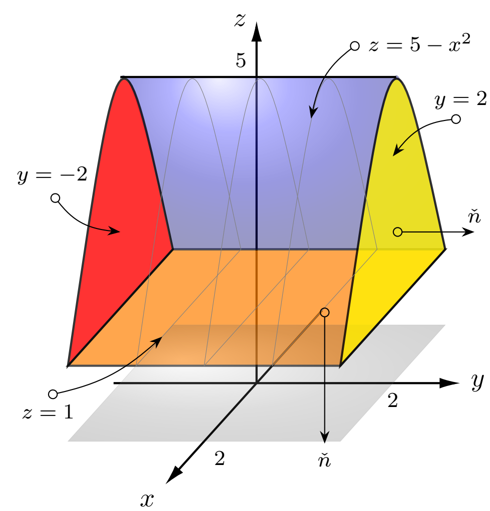
♣ Definiendo $\Phi_1(x,y,z) = x + ze^{yz-1}, \Phi_2(x,y,z) = xy + \ln(xy - z) - 2yz$ (diferenciables en un entorno de A) es $\Sigma_1 = C_3(\Phi_1), \Sigma_2 = C_0(\Phi_2)$, con $\nabla\Phi_1(x,y,z) = (1, z^2e^{yz-1}, (1+yz)e^{yz-1}), \nabla\Phi_2(x,y,z) = (y + y/(xy - z), x + x/(xy - z) - 2z, -1/(xy - z) - 2y)$, que evaluados en A resultan $\nabla\Phi_1(A) = (1,1,2), \nabla\Phi_2(A) = (2,2,-3)$, vectores normales a las respectivas superficies de nivel en ese punto. Como la curva C está contenida en ambas superficies, un vector $\vec{n}$ tangente en A debe ser normal tanto a $\nabla\Phi_1(A)$ como a $\nabla\Phi_2(A)$, de modo que $\vec{v} = \nabla\Phi_1(A) \times \nabla\Phi_2(A) = (-7,7,0)$ es un vector normal al plano π_0, y entonces también es normal al plano el múltiplo $\vec{n} = (1,-1,0)$. El plano tiene ecuación $\vec{n} \cdot (X - A) = 0$, esto es $x - y = 2$, por lo que es inmediata una parametrización regular e inyectiva $\vec{\sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ al que $\vec{\sigma}(x,z) = (x, x-2, z)$, para la que $\vec{\sigma}_x(x,z) \times \vec{\sigma}_z(x,z) = (1,1,0) \times (0,0,1) = \vec{n}$. Llamando S a la región del plano π_0 que proyecta sobre D, se tiene que $\text{área}(S) = \iint_S \mathrm{d}S = \iint_D \parallel \vec{\sigma}_x(x,z) \times \vec{\sigma}_z(x,z) \parallel \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \iint_D \parallel \vec{n} \parallel \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ de modo que solo resta este cálculo:



$$\text{área}(S) = \iint_D \parallel \vec{n} \parallel \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \sqrt{2}\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \sqrt{2}\,\text{área}(D) = 2\sqrt{2}$$

2. Dado $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x,y,z) = (x + \text{sen}(y^2z), y + \cos(x^2 + z), 2z)$, calcular el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera Σ del cuerpo definido por $1 \le z \le 5 - x^2, |\, y \,| \le 2$, indicando gráficamente la orientación adoptada para Σ.

♣ El compacto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 5 - x^2, |\, y \,| \le 2\}$, una bóveda de planta cuadrada de tres caras planas (amarilla, roja y naranja), con cubierta cilíndrica (azul cuyo frente se ha dejado transparente) y su frontera suave $\Sigma = \partial M^+$ (orientada con normal saliente, como se señala en la figura) en casi todas partes (solo deja de serlo en las parábolas de los tímpanos y las aristas del cuadrado base, todas curvas de área nula) se hallan incluidos en el dominio ($\mathbb{R}^3$) donde el campo vectorial $\vec{f}$ es C^1 (de hecho es C^∞), de modo que se aplica el teorema de la divergencia $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\,\mathrm{d}\Sigma = \iiint_M \text{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}V$. Como además es $\text{div}(\vec{f})(x,y,z) = 1 + 1 + 2 = 4$, solo resta el cálculo:

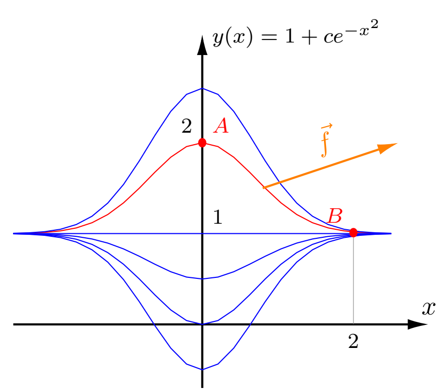


$$\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\,\mathrm{d}\Sigma = 4\iiint_M \mathrm{d}V = 4\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{1}^{5-x^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 16\int_{-2}^{2}(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{512}{3}$$

3. Dado $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x,y) = (2x, y - 1)$. Calcular la circulación de $\vec{f}$ desde $A = (0,2)$ hasta $B = (2, y_1)$ a lo largo de la curva integral de $y' + 2xy = 2x$.

♣ Es inmediato que $\vec{f} = \nabla\Phi$ con $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi(x,y) = x^2 + (y-1)^2/2$ (pues cualquier campo continuo en un simplemente conexo $\vec{f}(x,y) = (f_1(x), f_2(y))$ admite trivialmente una función potencial $\Phi(x,y) = F_1(x) + F_2(y)$ siendo F_1, F_2 sendas primitivas de f_1, f_2). De esta manera, la circulación será sencillamente $\int_\Gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \Phi(B) - \Phi(A)$, cualquiera sea la trayectoria Γ que conecte A con B. Se recuerda que la expresión anterior resulta de que, siendo $\vec{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de Γ con $A = \vec{\sigma}(a), B = \vec{\sigma}(b)$, considerando la diferenciabilidad de Φ, la definición de integral curvilínea, la regla de la cadena para la composición $\Phi \circ \vec{\sigma}$ y la regla de Barrow: $\int_\Gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_\Gamma \nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \nabla\Phi(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b [\Phi(\vec{\sigma}(t))]'\,\mathrm{d}t = \Phi(\vec{\sigma}(b)) - \Phi(\vec{\sigma}(a)) = \Phi(B) - \Phi(A)$. La ecuación diferencial es de variables separables y también lineal de primer orden. Considerada como lineal, admite un factor integrante $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mu(x) = e^{\int(2x)\,\mathrm{d}x} = e^{x^2}$, de modo que equivale ($\mu$ es nunca nula) a $e^{x^2}y'(x) + 2xe^{x^2}y(x) = 2xe^{x^2}$, esto es $[e^{x^2}y(x)]' = 2xe^{x^2}$ de donde $e^{x^2}y(x) = e^{x^2} + c$. La solución general es $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y(x) = 1 + ce^{-x^2}$, quedando con la condición inicial que $y(x) = 1 + e^{-x^2}$, así que $B = (2, 1 + e^{-4})$. Finalmente, el cálculo:

curvas integrales de $y' + 2xy = 2x$

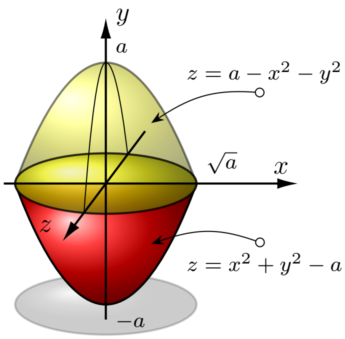


$\int_\Gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{1}{2}(7 + e^{-8})$

$$\int_\Gamma \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \Phi(B) - \Phi(A) = 4 + \frac{1}{2}e^{-8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(7 + e^{-8})$$

4. Sea el cuerpo $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2-a \leq y \leq a-x^2-z^2\}$ con $a>0$ constante. Calcular el valor de a para el cual el volumen de H es igual a 9π.

♣ El cuerpo H est´a comprendido entre dos paraboloides elípticos (amarillo y rojo) enfrentados que se intersecan en la circunferencia centrada en el origen de radio $\sqrt{a}$ ubicada en el plano de ecuación $y=0$. Utilizando coordenadas cilíndricas (r,θ,y) tales que $x=r\cos(\theta), z=r\operatorname{sen}(\theta)$ se quiere hallar $a\in\mathbb{R}^+$ tal que $\mathrm{Vol}(H)=\iiint_H \mathrm{d}V = 9\pi$.

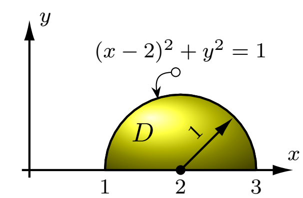


$$\iiint_H \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a}}\int_{r^2-a}^{a-r^2} r\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi\int_0^{\sqrt{a}}(4ar-4r^3)\,\mathrm{d}r = \pi(2ar^2-r^4)\,\Big|_0^{\sqrt{a}} = \pi a^2$$

Finalmente, de $\pi a^2 = 9\pi, a\in\mathbb{R}^+$ resulta que $a=3$ es el único que satisface la condición.

5. Dada la región $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4x-3, y\geq 0\}$ y la función $f(x,y)=xy+h(y/x)$ con $h\in C^1(\mathbb{R})$, calcular $\iint_D \parallel \vec{X}\parallel f'(\vec{X},\check{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, donde $f'(\vec{X},\check{X})$ con $\vec{X}=(x,y)$ es la derivada direccional de f en $\vec{X}$ según $\check{X}$

♣ El campo escalar es $C^1(D)$, puesto que $\forall (x,y)\in D : y/x\in\mathbb{R}$, y se sabe que $h\in C^1(\mathbb{R})$, de modo que f es diferenciable (todo campo de clase C^1 es diferenciable) y entonces la derivada direccional puede obtenerse mediante el producto escalar $f'(\vec{X},\check{X}) = \nabla f\cdot\check{X}$, y entonces el integrando es $\parallel\vec{X}\parallel f'(\vec{X},\check{X}) = \parallel\vec{X}\parallel \nabla f\cdot\vec{X}/\parallel\vec{X}\parallel = \nabla f\cdot\vec{X}$. Ahora, aplicando la regla de la cadena queda la siguiente expresión:



$$\nabla f(x,y)\cdot(x,y) = (y-\frac{y}{x^2}h'(y/x), x+\frac{1}{x}h'(y/x))\cdot(x,y) = 2xy$$

Siendo el recinto de integración el semicírculo centrado en $(2,0)$ de radio 1 ubicado en el primer cuadrante, conviene el sistema de coordenadas (r,θ) con el polo en $(2,0)$, esto es con $x=2+r\cos(\theta), y=r\operatorname{sen}(\theta)$. Así queda $\iint_D \parallel\vec{X}\parallel f'(\vec{X},\check{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi\int_0^1 2(2+r\cos(\theta))r\operatorname{sen}(\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi\int_0^1(4r^2\operatorname{sen}(\theta)+2r^3\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi(4\operatorname{sen}(\theta)/3+\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)/2)\,\mathrm{d}\theta$. La última integral es: $\int_0^\pi(4\operatorname{sen}(\theta)/3+\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)/2)\,\mathrm{d}\theta = (-4\cos(\theta)/3+\operatorname{sen}^2(\theta)/4)\,|_0^\pi = 8/3$. Queda entonces que la integral pedida es $\iint_D\parallel\vec{X}\parallel f'(\vec{X},\check{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 8/3$.

♠ **Bonus** (para aprender más).

(a) El ejercicio (1) se simplifica mucho recordando de la geometría elemental que si S es una región del plano normal a $\check{n}=(n_x,n_y,n_z)$ entonces el área de sus proyecciones sobre los planos coordenados es $\text{área}(D_{yz}) = |n_x|\,\text{área}(S)$, $\text{área}(D_{xz}) = |n_y|\,\text{área}(S)$, $\text{área}(D_{xy}) = |n_z|\,\text{área}(S)$. Con $\check{n}=(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)$ ya resulta $\text{área}(S) = \text{área}(D_{xz})/|n_y| = \sqrt{2}\,\text{área}(D_{xz}) = 2\sqrt{2}$. ¿Cuál es el área de la proyección de S sobre los otros planos coordenados? ¿Cuál es la región D_{xy} y cuál la región D_{yz}?

(b) La locución *en casi todas partes* que se lee en la resolución del ejercicio (2) se abrevia como *c.t.p.*; en inglés como *a.e.*, en francés como *p.p.* (presque partout). If a certain proposition concerning the points of a measure space is true for every point, with the exception at most of a set of points which form a measurable set of measure zero, it is customary to say that the proposition is true for almost every point, or that it is true almost everywhere. The phrase "almost everywhere" is used so frequently that it is convenient to introduce the abbreviation a.e.(Halmos, Paul. 1974. Measure Theory, p. 86. New York: Springer).

(c) El ejercicio (3) contiene una ecuación diferencial lineal de primer orden. En Apostol, Tom. 2001. Calculus, Volumen I, p.379. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Barcelona: Reverté, se encuentra el teorema 8.3: Supongamos que P y Q son continuas en un intervalo abierto I. Elijamos un punto a cualquiera en I y sea b cualquier número real. Existe entonces una función y una sola $y=f(x)$ que satisface el problema de valores iniciales $y'+P(x)y=Q(x)$, con $f(a)=b$ en el intervalo I. Esta función viene dada por $f(x)=be^{-A(x)}+e^{-A(x)}\int_a^x Q(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t$, en donde $A(x)=\int_a^x P(t)\,\mathrm{d}t$. En la resolución se ha seguido la estrategia de prueba de este teorema.

(d) Considerar en el ejercicio (3) la ecuación como de variables separables ($y'=2x(y-1)$) y detallar cuidadosamente todo lo que deba decirse para hallar la misma familia obtenida en esta resolución considerada como lineal de primer orden.

(e) Cambiando en el ejercicio (4) a $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : |x|+|z|-a\leq y\leq a-|x|-|z|\}$ rehacer los cálculos (¡asegurarse de los límites de integración!) para obtener $a=3\sqrt[3]{\pi/4}$.

(f) En el ejercicio (5) se aprovecha la diferenciabilidad del campo para el cálculo de la derivada direccional, resultado que se encuentra en cualquier texto de cálculo, por ejemplo en Canuto y Tabacco, 2010. Mathematical Analysis II, p. 163, Milano: Springer, se presenta así: Proposition 5. 9. If a function f is differentiable at $\vec{x}$, it admits at $\vec{x}$ directional derivatives along any vector $\vec{v}$, and moreover: $\partial f/\partial\vec{v}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x})\cdot\vec{v}$. Algunos autores parten de una condición más fuerte que la diferenciabilidad (y entonces presentan un resultado más débil), tal como la continuidad de las derivadas parciales; así lo muestra el siguiente: Theorem. Suppose $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ is C^1 on an open ball containing the point $\vec{c}$. Then for any unit vector $\vec{u}$, $D_{\vec{u}}f(\vec{c})$ exists and $D_{\vec{u}}f(\vec{c}) = \nabla f(\vec{c})\cdot\vec{u}$ (Sloughter 2018. The Calculus of Functions of Several Variables, p.163. New York: Furman University Press).