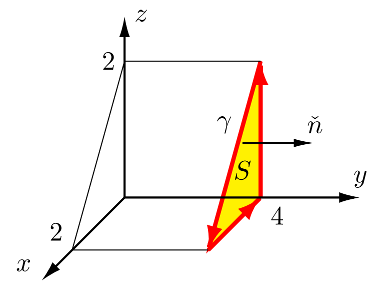
1. Sea $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x,y,z)=(yz,xz,\varphi(y,z))$ un campo $C^1(\mathbb{R}^3)$. Calcular la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva borde de la superficie de ecuación $y=4$ con $x+z\le 2, x\ge 0, z\ge 0$, indicando en un gráfico la orientación adoptada.

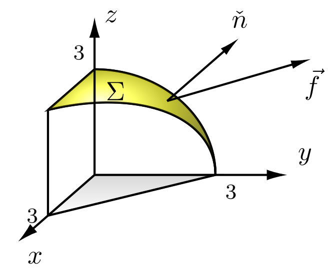
♣ Llamando S a la superficie del enunciado y γ a su curva borde, con las orientaciones indicadas en la figura y siendo $\vec{f}\in C^1(\mathbb{R}^3)$, es aplicable el teorema de Stokes (enunciarlo y detallar aquí el cumplimiento de sus hipótesis), $\oint_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{l}=\iint_S \nabla\times\vec{f}\cdot\check{n}\,dS$. Ahora el cálculo: $\nabla\times\vec{f}(x,y,z)=(\varphi_y(y,z)-x,y,0)$ y como $\check{n}=(0,1,0)$ queda que para cualquier $(x,y,z)\in S$ (observar que allí $y=4$) es $\nabla\times\vec{f}(x,y,z)\cdot\check{n}=4$. Finalmente, la siguiente expresión da la circulación pedida.



$$\oint_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{l}=\iint_S \nabla\times\vec{f}\cdot\check{n}\,dS=\iint_S 4\,dS=4\,\text{área}(S)=8$$

2. Sea $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x,y,z)=(xz,yz,z^2)$; calcular el flujo del campo $\vec{f}$ a través de la superficie Σ de ecuación $y^2+z^2=9$ con $x+y\le 3$ en el primer octante, indicando en un gráfico la orientación adoptada para Σ.

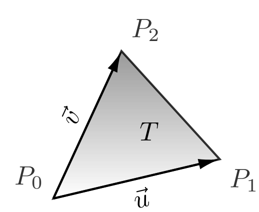
♣ Una parametrización regular e inyectiva de Σ es $\vec{\sigma}:R\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(x,\theta)=(x,3\sin(\theta),3\cos(\theta))$, siendo $R=\{(x,\theta)\in\mathbb{R}^2: 0\le\theta\le\pi/2, 0\le x\le 3-3\sin(\theta)\}$, con producto vectorial fundamental $\vec{n}(x,\theta)=\vec{\sigma}_x(x,\theta)\times\vec{\sigma}_\theta(x,\theta)=(0,3\sin(\theta),3\cos(\theta))$, que orienta la superficie como en la figura. Luego $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,d\Sigma=\iint_R \vec{f}\cdot\vec{n}\,dx\,d\theta$, esto es $\int_0^{\pi/2}\int_0^{3-3\sin(\theta)}(3x\cos(\theta),9\sin(\theta)\cos(\theta),9\cos^2(\theta))\cdot(0,3\sin(\theta),3\cos(\theta))\,dx\,d\theta=81\int_0^{\pi/2}(\cos(\theta)(1-\sin(\theta))\,d\theta=81(\sin(\theta)-\sin^2(\theta)/2)\mid_0^{\pi/2}=81/2$. Observar que el recinto de integración en el cálculo es R , y no $\Sigma=\vec{\sigma}(R)$, situación corriente en integrales de superficie.



Observación. Otra parametrización es $\vec{\sigma}:R\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,\sqrt{9-y^2})$, siendo $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 3, 0\le y\le 3-x\}$, con producto vectorial fundamental $\vec{n}(x,y)=\vec{\sigma}_x(x,y)\times\vec{\sigma}_y(x,y)=(0,y/\sqrt{9-y^2},1)$ (¡cuidado, no existe en el punto $P_0=(0,3)$!); sin embargo, para todos los puntos de $R-\{P_0\}$ queda $(\vec{f}\cdot\vec{n})(x,y)=y^2+9-y^2=9$, que es integrable en R y entonces $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,d\Sigma=\iint_R \vec{f}\cdot\vec{n}\,dx\,dy=9\iint_R dx\,dy=9\,\text{área}(R)=9(9/2)=81/2$. En esta parametrización el recinto R (un triángulo) es de más sencilla visualización que el correspondiente a la anterior, es inyectiva en R y aunque no es regular en todo R, el integrando $\vec{f}\cdot\vec{n}$ solo tiene una discontinuidad evitable en P_0 (pues $\exists\lim_{P\to P_0}(\vec{f}\cdot\vec{n})(P)=9$), lo que permite el cálculo anterior.

3. La superficie de ecuación $z=x^2+6xy^2-6x+10$ tiene tres puntos donde el plano tangente es paralelo al plano xy. Calcular el área del triángulo que los tiene por vértices.

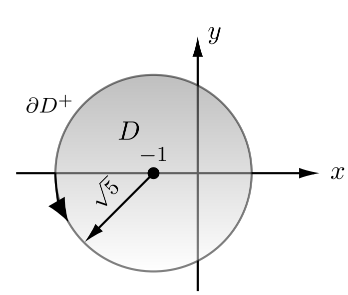
♣ Definiendo el campo escalar $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $f(x,y)=x^2+6xy^2-6x+10$, la superficie del enunciado es, por definición, su gráfica, y como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, en cada punto el plano tangente es paralelo al plano xy sii $\nabla f(x,y)=(0,0)$, esto es el sistema de dos ecuaciones ecuaciones: $2x+6y^2-6=0, 12xy=0$, que efectivamente tiene tres soluciones $A_0=(0,1), A_1=(0,-1), A_2=(3,0)$, a los que corresponden en la superfice los puntos $P_0=(0,-1,10), P_1=(0,1,10), P_2=(3,0,1)$ (la tercera componente es $z=f(x,y)$). Si se llama T al triángulo que los tiene por vértices y haciendo $\vec{u}=P_1-P_0=(0,2,0), \vec{v}=P_2-P_0=(3,1,-9)$, queda que área$(T)=\frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\frac{1}{2}\|(-18,0,-6)\|=3\|(-3,0,-1)\|=3\sqrt{10}$.



4. Dado $\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un campo vectorial $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $\vec{f}(x,y)=(2yg(x),xg(x))$, hallar una función escalar g tal que $g(1)=3$ y que $\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{l}=0$, siendo $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+2x+y^2\le 4\}$.

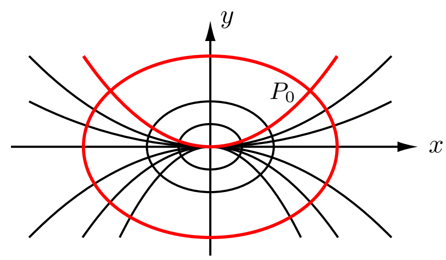
♣ Como $x^2+2x+y^2=4$ equivale a $(x+1)^2+y^2=5$, la curva ∂D^+ es la circunferencia centrada en $(-1,0)$ de radio $\sqrt{5}$, orientada como lo indica la figura. Siendo $\vec{f}=(P,Q)$ un campo C^1 en el abierto simplemente conexo $\mathbb{R}^2$, una condición suficiente para la anulación de la integral curvilínea $\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{l}$ es que $P_y(x,y)=2g(x)=g(x)+xg'(x)=Q_x(x,y)$, esto es que la función escalar g (que es $C^1(\mathbb{R})$ por ser $\vec{f}\in C^1(\mathbb{R}^2)$) satisfaga la ecuación diferencial de variables separables $xg'(x)-g(x)=0$ cuya solución general es $g(x)=cx$, debiendo ser $c=3$ para satisfacer la condición inicial $g(1)=3$. De esta manera, la función escalar $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3x$ asegura que $\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot d\vec{l}=0$.

Observación. Para la función g hallada resulta el campo de gradientes $\vec{f}=\nabla\varphi$ siendo una función potencial $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \varphi(x,y)=3x^2y$. El campo conservativo $\vec{f}$ anula la circulación sobre *cualquier* lazo (no solo sobre ∂D^+). Dicho de otro modo, la resolución se mantendría aun variando D, con la sola condición de que su frontera fuera un lazo, por ejemplo $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|+|y|\le 1\}$.



5. Dada la familia de curvas planas de ecuación $x^2 + cy = 0$, hallar una ecuación para la curva de la familia ortogonal que pasa por el punto $P_0 = (2, 2)$.

♣ Eliminando c entre las dos ecuaciones $x^2 + cy = 0, 2x + cy' = 0$ se obtiene la ecuación diferencial de la familia de parábolas dada: $2y - xy' = 0$; ahora, la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales (considerando la condición de ortogonalidad $yy' = -1$) es $x + 2yy' = 0$, o escrita de otro modo $x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0$, esto es que $\mathrm{d}\,(x^2/2 + y^2) = 0$, de donde resulta que la familia de las trayectorias ortogonales debe satisfacer $x^2/2 + y^2 = k$, que para cada $k > 0$ es una elipse centrada en el origen de coordenas con semiejes $a = \sqrt{2k}, b = \sqrt{k}$. En particular, para la que pasa por P_0 es $k = 2^2/2 + 2^2 = 6$, siendo la elipse de ecuación $x^2/12 + y^2/6 = 1$, que interseca ortogonalmente a la parábola de ecuación $x^2 - 2y = 0$ en el punto $P_0 = (2, 2)$.



♠ **Bonus** (para aprender más).

(a) El teorema de Stokes del ejercicio 1: 'Stokes' Theorem (dates from about 1870) and was not proved by Stokes. In fact the original statement is in a letter from Sir William Thomson, later known as Lord Kelvin, to Stokes dated 1850. Stokes set the problem of proving it in an examination set for the top mathematics students at Cambridge in 1854, but we don't know if anyone proved it. Probably not. Kelvin himself proved it. Maxwell proved it in Electricity and Magnetism. Stokes was rather lucky to have his name perpetuated by a theorem he may never have proved' (Alder 2003, *Multivariate Calculus*, Melbourne, 95).

(b) La circulación del ejercicio (1) resultó positiva (de valor 8); dar, de ser posible, una función φ, tal que la circulación sobre el tramo vertical de γ sea negativa (y de valor -8).

(c) Si en el ejercicio (2) el campo fuera $\vec{f}(x, y, z) = (1, 1, 1)$, ¿podría utilizarse la segunda parametrización de la superficie Σ? ¿convendría hacerlo? Esta cuestión evidencia que unas parametrizaciones podrían conducir a integrales múltiples impropias que, de hecho, no están en la naturaleza del problema en sí mismo. Puede leerse del tema en § 87. Integrales múltiples impropias (Rey Pastor, Calleja y Trejo 1968. *Análisis Matemático II*. Buenos Aires: Kapelusz, 466).

(d) El ejercicio (3) puede también hacerse con un procedimiento mucho más engorroso: definir una parametrización regular inyectiva $\vec{\sigma} : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T = \vec{\sigma}(R)$ para calcular luego área$(T) = \iint_T \mathrm{d}T = \iint_R \parallel \vec{\sigma}_x(x, y) \times \vec{\sigma}_y(x, y) \parallel \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Vale la pena hacerlo, para mejor apreciar la sencillez de la geometría vectorial utilizada para resolver el problema en el texto principal (puede leerse una introducción inmediata en el capítulo I del texto: Santaló 1993. *Vectores y tensores con sus aplicaciones*. Buenos Aires: Eudeba).

(e) El ejercicio (4) puede verse como un caso de una clase más amplia de ejercicios en los que debe ajustarse una función para satisfacer un valor de la circulación en la frontera de un compacto, esto es dado $k \in \mathbb{R}$, hallar g tal que $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = k$ (en el ejercicio resuelto era $k = 0$). Mostrar que en tal caso bastaría (Teorema de Green mediante) hallar una g tal que $Q_x(x, y) - P_(x, y) = k/($área$(D)$.

(f) El ejercicio (5) puede verse como un caso particular de uno más general, que consiste en hallar la familia de las trayectorias ortogonales a la familia de curvas planas de ecuación $x^n + cy = 0$, con $n \in \mathbb{N}$ (en el ejercicio planteado es $n = 2$). Reproduciendo los argumentos de la resolución, obtener la familia de elipses de ecuación $x^2/n + y^2 = k$, siendo en particular, para la que pasa por un punto $P_0 = (x_0, y_0)$, $k_0 = x_0^2/n + y_0^2$.