

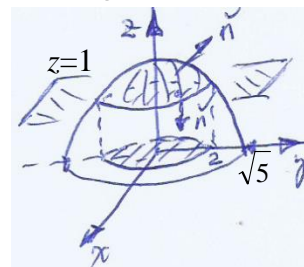
TEMA 1

1. Sea $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (x + g(x-z), g(x-z) - y, z^2 + g(x-z))$, **calcule** el flujo de \vec{f} a través de la superficie frontera del cuerpo D definido por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 5, z \geq 1$. **Indique** gráficamente la orientación elegida para la superficie.

Dado que la superficie es cerrada y $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, podemos aplicar el teorema de la divergencia, con la ventaja que $\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = 1 + g'(x-z) - 1 + 2z + g'(x-z)(-1) = 2z$ no depende de g .

En el esquema se observa que ∂D (la frontera de D) está orientada hacia afuera de D , la curva común a las dos superficies que forman ∂D es:

$$C = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ z = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$



Con lo cual la proyección D_{xy} de D sobre el plano xy es el círculo con centro en el origen y radio 2.

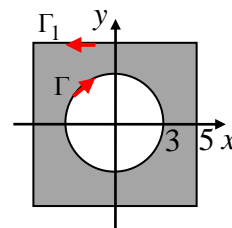
$$\text{Entonces } \iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D 2z \, dx \, dy \, dz = \iint_{D_{xy}} dx \, dy \int_1^{\sqrt{5-x^2-y^2}} 2z \, dz = \iint_{D_{xy}} (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy$$

Pasando a coordenadas polares queda:

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr = 4 \int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi. \text{ Respuesta: } \boxed{\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 8\pi}$$

2. Sea $\vec{f} = (P, Q) : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\vec{f} \in C^1$ en su dominio, sabiendo que $Q'_x - P'_y = 10$ constante y que $\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 7\pi$ cuando Γ es una circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 3, **calcule** $\oint_{\Gamma_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ para el caso en que Γ_1 es la curva frontera del cuadrado $[-5,5] \times [-5,5]$.

En la figura se representa la región sombreada D cuya frontera $\partial D = \Gamma \cup \Gamma_1$, esta frontera queda orientada en forma positiva cuando las curvas Γ y Γ_1 se recorren como indican las flechas de color rojo.



Dado que $\vec{f} \in C^1$ en D , incluyendo su frontera, se puede aplicar el teorema de Green como sigue.

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D \underbrace{Q'_x - P'_y}_{10} \, dx \, dy = 10 \text{ área}(D) = 10(10^2 - \pi 3^2) (*)$$

Por su parte $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \underbrace{\oint_{\Gamma^-} \vec{f} \cdot d\vec{s}}_{-7\pi}$ pues la orientación de Γ indicada en el gráfico como

curva individual es la de Γ^- , mientras que la de Γ_1 es la positiva.

Reemplazando en (*) resulta:

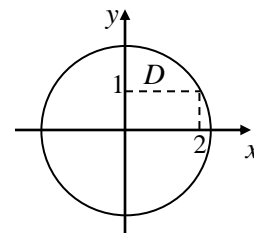
$$\oint_{\Gamma_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} - 7\pi = 10(100 - 9\pi) \Rightarrow \oint_{\Gamma_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 1000 - 83\pi. \text{ Respuesta: } \boxed{\oint_{\Gamma_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 1000 - 83\pi}$$

3. Dado $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \vec{f}(x, y) = (\sqrt{xy-x}, \sqrt{5-x^2-y^2}, \ln(y-1))$ donde D es el dominio natural de \vec{f} , **calcule** el área de D .

Los puntos $(x, y) \in D$ cumplen con las siguientes tres condiciones:

- $xy-x \geq 0 \Leftrightarrow x(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge y \geq 1) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 1)$
- $x^2 + y^2 \leq 5$
- $y > 1$

Con lo cual resulta $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 5 \wedge x \geq 0 \wedge y > 1\}$, que se representa en el esquema.



$$\text{área}(D) = \iint_D dx dy = \int_0^2 dx \int_1^{\sqrt{5-x^2}} dy = \int_0^2 (\sqrt{5-x^2} - 1) dx = \left[\frac{1}{2} x \sqrt{5-x^2} + \frac{5}{2} \sin^{-1}(x/\sqrt{5}) - x \right]_0^2$$

Respuesta: $\boxed{\text{área}(D) = \frac{5}{2} \sin^{-1}(2/\sqrt{5}) - 1}$.

4. Sea F la familia de curvas planas tales que la ordenada al origen de su recta tangente en cada punto es igual al doble de la ordenada del punto. Siendo $\vec{f}(x, y) = (4xy, x^2)$, **calcule** la circulación de \vec{f} desde $(1,2)$ hasta $(2,1)$ a lo largo de la curva de F que pasa por dichos puntos.

Considerando una curva de ecuación $y = g(x)$, la ecuación de su recta tangente en (x_0, y_0) es:

$$y - y_0 = y'_0 (x - x_0), \text{ donde } y_0 = g(x_0) \text{ e } y'_0 = g'(x_0)$$

Dado que la ordenada al origen de la recta es “el valor que adopta y para $x=0$ ”, acorde al enunciado debe cumplirse que $\underset{2y_0}{\underset{\uparrow}{y}} - y_0 = \underset{0}{\underset{\uparrow}{x}} - x_0 \Rightarrow y_0 = -y'_0 x_0$.

De donde, para todo punto de las curvas de F debe cumplirse que $y = -y'x$, con lo cual:

$$y = -\frac{dy}{dx} x \rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{integrando}} \ln |y| = -\ln |x| + A \rightarrow |y| = e^{\ln |x|^{-1} + A} \rightarrow |y| = e^A |x|^{-1}$$

Entonces $y = \underbrace{\pm e^A}_C x^{-1}$, es decir $y = C/x$ es la solución general (ecuación de la familia F , sosteniendo incluso $C=0$ pues $y=0$ es solución de la ecuación diferencial).

Como surge de esta SG, para $C=2$ se obtiene la ecuación de la curva Γ de la familia que pasa por los puntos dados, esta es: $y = 2/x$. Ahora calculamos la circulación pedida comenzando por parametrizar la curva.

$$\vec{X} = \underbrace{(x, 2/x)}_{\vec{h}(x)} \text{ con } 1 \leq x \leq 2, \text{ que orienta correctamente a la curva pues } \vec{h}(1) = (1,2) \text{ y } \vec{h}(2) = (2,1)$$

$$\text{Luego, } \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \vec{f}(\vec{h}(x)) \cdot \vec{h}'(x) dx = \int_1^2 \underbrace{(8, x^2) \cdot (1, -2/x^2)}_{8-2=6} dx = 6 \underbrace{\int_1^2 dx}_1 = 6$$

Respuesta: $\boxed{\int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 6}$.

5. El campo escalar $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$ en cada punto (x, y, z) del espacio tiene una derivada direccional máxima que denotaremos $g(x, y, z)$. **Calcule** la masa del cuerpo H cuya superficie frontera es el conjunto de nivel 4 de g , si la densidad de masa en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z .

Dado que f es diferenciable, por ser polinómica, la derivada direccional máxima de f en cada punto del espacio es la norma de su gradiente. Es decir:

$$g(x, y, z) = \|\nabla f(x, y, z)\| = \|(4x, 4y, 4z)\| = 4\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

El conjunto de nivel 4 de g es: $4\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Con lo cual el cuerpo H es la esfera con centro en el origen y radio 1. Por su parte la densidad, acorde al enunciado es $\delta(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad.

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{masa}(H) &= \iiint_H k\sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = k \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = \\ &= 2k \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \end{aligned}$$

Es claro que D_{xy} es un círculo con centro en el origen y radio 1. Con ello, pasando a polares:

$$\text{masa}(H) = 2k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} \, r \, dr$$

Dado que $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2} \, r \, dr = [\sqrt{1-r^2}(r^3/4 - r/8) + \frac{1}{8}\text{sen}^{-1}(r)]_0^1 = \frac{\pi}{16}$, resulta:

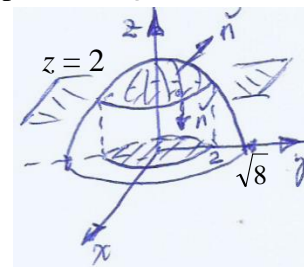
$$\text{masa}(H) = 2k \frac{\pi}{16} \int_0^{2\pi} d\theta = k\pi^2/4. \text{ Respuesta: } \boxed{\text{masa}(H) = k\pi^2/4}.$$

TEMA 2

1. Sea $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\vec{f}(x, y, z) = (g(y-z) - x, y + g(y-z), z^2 + g(y-z))$, **calcule** el flujo de \vec{f} a través de la superficie frontera del cuerpo D definido por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, z \geq 2$. **Indique** gráficamente la orientación elegida para la superficie.

Dado que la superficie es cerrada y $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$, podemos aplicar el teorema de la divergencia, con la ventaja que $\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = -1 + 1 + g'(y-z) + 2z + g'(y-z)(-1) = 2z$ no depende de g .

En el esquema se observa que ∂D (la frontera de D) está orientada hacia afuera de D , la curva común a las dos superficies que forman ∂D es:



$$C = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ z = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

Con lo cual la proyección D_{xy} de D sobre el plano xy es el círculo con centro en el origen y radio 2.

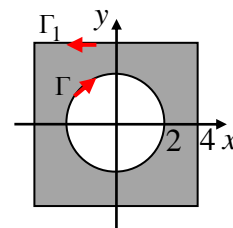
$$\text{Entonces } \iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D 2z \, dx \, dy \, dz = \iint_{D_{xy}} dx \, dy \int_2^{\sqrt{8-x^2-y^2}} 2z \, dz = \iint_{D_{xy}} (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy$$

Pasando a coordenadas polares queda:

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr = 4 \int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi. \text{ Respuesta: } \boxed{\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 8\pi}$$

2. Sea $\vec{f} = (P, Q) : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\vec{f} \in C^1$ en su dominio, sabiendo que $Q'_x - P'_y = 8$ constante y que $\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 5\pi$ cuando Γ es una circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 2, **calcule** $\oint_{\Gamma_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ para el caso en que Γ_1 es la curva frontera del cuadrado $[-4,4] \times [-4,4]$.

En la figura se representa la región sombreada D cuya frontera $\partial D = \Gamma \cup \Gamma_1$, esta frontera queda orientada en forma positiva cuando las curvas Γ y Γ_1 se recorren como indican las flechas de color rojo.



Dado que $\vec{f} \in C^1$ en D , incluyendo su frontera, se puede aplicar el teorema de Green como sigue.

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D \underbrace{Q'_x - P'_y}_8 \, dx \, dy = 8 \text{ área}(D) = 8(8^2 - \pi 2^2) (*)$$

Por su parte $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \underbrace{\oint_{\Gamma^-} \vec{f} \cdot d\vec{s}}_{-5\pi}$ pues la orientación de Γ indicada en el gráfico como

curva individual es la de Γ^- , mientras que la de Γ_1 es la positiva.

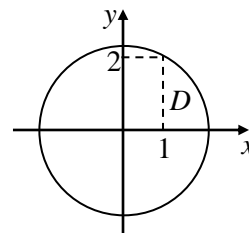
Reemplazando en (*) resulta:

$$\oint_{\Gamma_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} - 5\pi = 8(64 - 4\pi) \Rightarrow \oint_{\Gamma_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 512 - 27\pi. \text{ Respuesta: } \boxed{\oint_{\Gamma_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 512 - 27\pi}$$

3. Dado $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \vec{f}(x, y) = (\sqrt{xy-y}, \sqrt{5-x^2-y^2}, \ln(x-1))$ donde D es el dominio natural de \vec{f} , **calcule** el área de D .

Los puntos $(x, y) \in D$ cumplen con las siguientes tres condiciones:

- $xy - y \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)y \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 1 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 1 \wedge y \leq 0)$
- $x^2 + y^2 \leq 5$
- $x > 1$



Con lo cual resulta $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 5 \wedge x > 1 \wedge y \geq 0\}$, que se representa en el esquema.

$$\text{área}(D) = \iint_D dx dy = \int_0^2 dy \int_1^{\sqrt{5-y^2}} dx = \int_0^2 (\sqrt{5-y^2} - 1) dy = \left[\frac{1}{2} y \sqrt{5-y^2} + \frac{5}{2} \sin^{-1}(y/\sqrt{5}) - y \right]_0^2$$

Respuesta: $\boxed{\text{área}(D) = \frac{5}{2} \sin^{-1}(2/\sqrt{5}) - 1}$.

4. Sea F la familia de curvas planas tales que la ordenada al origen de su recta tangente en cada punto es igual al triple de la ordenada del punto. Siendo $\vec{f}(x, y) = (4x^2 y, x^3)$, **calcule** la circulación de \vec{f} desde $(1,2)$ hasta $(2,1/2)$ a lo largo de la curva de F que pasa por dichos puntos.

Considerando una curva de ecuación $y = g(x)$, la ecuación de su recta tangente en (x_0, y_0) es:

$$y - y_0 = y'_0 (x - x_0), \text{ donde } y_0 = g(x_0) \text{ e } y'_0 = g'(x_0)$$

Dado que la ordenada al origen de la recta es “el valor que adopta y para $x=0$ ”, acorde al enunciado debe cumplirse que $\underset{\substack{\uparrow \\ 3y_0}}{y} - y_0 = y'_0 \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{(x - x_0)} \Rightarrow 2y_0 = -y'_0 x_0$.

De donde, para todo punto de las curvas de F debe cumplirse que $2y = -y'x$, con lo cual:

$$2y = -\frac{dy}{dx}x \rightarrow \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{integrando}} \ln|y| = -2\ln|x| + A \rightarrow |y| = e^{\ln|x|^{-2} + A} \rightarrow |y| = e^A |x|^{-2}$$

Entonces $y = \underbrace{\pm e^A}_C x^{-2}$, es decir $y = C/x^2$ es la solución general (ecuación de la familia F , sosteniendo incluso $C=0$ pues $y=0$ es solución de la ecuación diferencial).

Como surge de esta SG, para $C=2$ se obtiene la ecuación de la curva Γ de la familia que pasa por los puntos dados, esta es: $y = 2/x^2$. Ahora calculamos la circulación pedida comenzando por parametrizar la curva.

$$\vec{X} = \underbrace{(x, 2/x^2)}_{\vec{h}(x)} \text{ con } 1 \leq x \leq 2, \text{ que orienta correctamente a la curva pues } \vec{h}(1) = (1,2), \vec{h}(2) = (2,1/2)$$

$$\text{Luego, } \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \vec{f}(\vec{h}(x)) \cdot \vec{h}'(x) dx = \int_1^2 \underbrace{(8, x^3) \cdot (1, -4/x^3)}_{8-4=4} dx = 4 \underbrace{\int_1^2 dx}_1 = 4$$

Respuesta: $\boxed{\int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 4}$.

5. El campo escalar $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$ en cada punto (x, y, z) del espacio tiene una derivada direccional máxima que denotaremos $g(x, y, z)$. **Calcule** la masa del cuerpo H cuya superficie frontera es el conjunto de nivel 6 de g , si la densidad de masa en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z .

Dado que f es diferenciable, por ser polinómica, la derivada direccional máxima de f en cada punto del espacio es la norma de su gradiente. Es decir:

$$g(x, y, z) = \|\nabla f(x, y, z)\| = \|(6x, 6y, 6z)\| = 6\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

El conjunto de nivel 6 de g es: $6\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Con lo cual el cuerpo H es la esfera con centro en el origen y radio 1. Por su parte la densidad, acorde al enunciado es $\delta(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad.

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{masa}(H) &= \iiint_H k\sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = k \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = \\ &= 2k \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \end{aligned}$$

Es claro que D_{xy} es un círculo con centro en el origen y radio 1. Con ello, pasando a polares:

$$\text{masa}(H) = 2k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} \, r \, dr$$

Dado que $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2} \, r \, dr = [\sqrt{1-r^2}(r^3/4 - r/8) + \frac{1}{8}\text{sen}^{-1}(r)]_0^1 = \frac{\pi}{16}$, resulta:

$$\text{masa}(H) = 2k \frac{\pi}{16} \int_0^{2\pi} d\theta = k\pi^2/4. \text{ Respuesta: } \boxed{\text{masa}(H) = k\pi^2/4}.$$
