

TEMA 1

1. Dado $\vec{f}(x, y, z) = (y + h(xy), x + h(xy), z + 3h(xy))$ con $h: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ y \vec{f} continuo en \mathfrak{R}^3 , **calcule** la circulación de \vec{f} a lo largo del segmento \overline{AB} desde $A = (0, 0, 6)$ hasta $B = (x_0, y_0, z_0)$ con $x_0 > 0$, sabiendo que el segmento tiene longitud igual a $\sqrt{24}$ y está incluido en la recta de ecuación $\vec{X} = (t, 2t, 6-t)$ con $t \in \mathfrak{R}$.

Denotando $\vec{g}(t) = (t, 2t, 6-t)$, es claro que $A = \vec{g}(0)$ mientras que $B = \vec{g}(b)$ de manera que $\|B - A\| = \|(b-0, 2b-0, 6-b-6)\| = \sqrt{6b^2} = \sqrt{24} \Rightarrow b^2 = 4$. Dado que $x_0 = b > 0$, debe ser $b = 2$.

La circulación pedida es $\int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 \vec{f}(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t) dt$, donde:

$$\vec{f}(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t) = (2t + h(2t^2), t + h(2t^2), (6-t) + 3h(2t^2)) \cdot (1, 2, -1) = 5t - 6.$$

Entonces: $\int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 (5t - 6) dt = \left[\frac{5}{2}t^2 - 6t \right]_0^2 = 10 - 12 = -2$. **Respuesta:** $\int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -2$.

2. **Calcule** el volumen del cuerpo definido por: $z \leq 4 - x^2$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \leq x$, 1º octante.

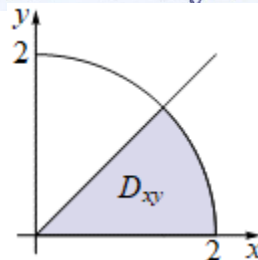
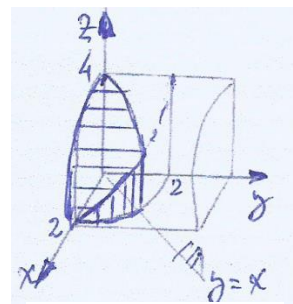
Como se observa en el esquema, el cuerpo está apoyado en el plano xy , tiene paredes laterales de ecuaciones $y = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ e $y = x$, con techo $z = 4 - x^2$.

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{4-x^2} dz = \\ &= \iint_{D_{xy}} (4 - x^2) dx dy \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^2 [4 - r^2 \cos^2(\theta)] r dr = \\ &= \int_0^{\pi/4} [8 - 4 \cos^2(\theta)] d\theta = \\ &= [8\theta - 4(\theta/2 + \sin(2\theta)/4)]_0^{\pi/4} = \frac{3}{2}\pi - 1 \end{aligned}$$

Respuesta: $\text{Vol}(D) = \frac{3}{2}\pi - 1$.



3. Si $\vec{f} \in C^1(\mathfrak{R}^3)$ / $\vec{f}(x, y, z) = (2y g(x) + y^2, z g(x) + 2xy, z^2 + x g(x))$ con $\vec{f}(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$, **halle** una $g(x)$ tal que la circulación de \vec{f} a lo largo de la circunferencia Γ incluida en el plano $z = 2$ con centro en $(0, 0, 2)$ y radio $R > 0$ resulte numéricamente igual al doble del área del círculo que tiene a Γ como borde. **Indique** gráficamente la orientación que adopta para Γ .

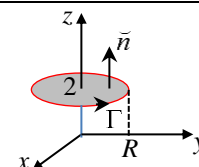
Siendo Γ una curva simple y cerrada, como $\vec{f} \in C^1(\mathfrak{R}^3)$ veamos qué resulta al calcular el rotor.

$$\nabla \times \vec{f}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2y g(x) + y^2 & z g(x) + 2xy & z^2 + x g(x) \end{vmatrix} = (-g(x), -g(x) - x g'(x), z g'(x) - 2g(x))$$

Ahora, con las orientaciones que se indican en la figura (ver página siguiente), aplicamos el teorema del rotor tomando como superficie Σ el círculo en el plano $z = 2$.

$\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma$, donde el integrando en puntos de Σ
 es $\nabla \times \vec{f}(x, y, 2) \cdot (0, 0, 1) = 2g'(x) - 2g(x)$, con lo cual resulta:

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} [2g'(x) - 2g(x)] d\sigma$$



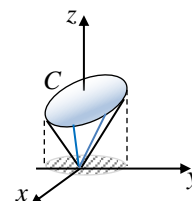
Imponiendo –por ejemplo– que $2g'(x) - 2g(x) = 2$ constante, se obtiene lo pedido pues al reemplazar queda: $\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2 \iint_{\Sigma} d\sigma = 2 \text{área}(\Sigma)$. Entonces una $g(x)$ es aquella que satisfaga la ecuación diferencial $2g'(x) - 2g(x) = 2$ con $g(0) = 1$ para que resulte $\vec{f}(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$.

$$2g'(x) = 2 + 2g(x) \rightarrow \frac{dg(x)}{g(x)+1} = dx \rightarrow \ln |g(x)+1| = x + A \rightarrow g(x) = K e^x - 1$$

Para $g(0) = 1$ debe ser $K = 2$. Por lo tanto, una respuesta es: $g(x) = 2e^x - 1$.

4. Sean $\vec{f}(x, y, z) = (y^2 - xz, z^2 - 3yz, x^2 - z^2)$ y el cuerpo D definido por $z \geq \sqrt{x^2 + 2y^2}$, $z \leq y + 2$. **Calcule** el flujo de \vec{f} a través de la superficie frontera de D y, en función del resultado obtenido y de cómo ha elegido orientar a la superficie, **analice** si dicho flujo es entrante o saliente de D .

Dado que $\vec{f} \in C^1$ (componentes polinómicas) aplicando el teorema de la divergencia resulta $\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \vec{f} dx dy dz$, donde $\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = -z - 3z - 2z = -6z$.



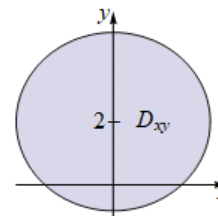
Con lo cual:

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = -6 \iiint_D z dx dy dz$$

Observando el esquema superior la línea C intersección de las dos superficies frontera del cuerpo, resulta:

$$C = \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + 2y^2} \\ z = y + 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} (y+2)^2 = x^2 + 2y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 8 \\ z = y + 2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$\downarrow \rightarrow 2^\circ \text{ en } 1^\circ \rightarrow \uparrow$



Con lo cual, la proyección del cuerpo sobre el plano xy es la región D_{xy} cuya frontera es la circunferencia de ecuación $x^2 + (y-2)^2 = 8$. Entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma &= -6 \iiint_D z dx dy dz = -6 \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2 + 2y^2}}^{y+2} z dz = \\ &= -3 \iint_{D_{xy}} [(y+2)^2 - (x^2 + 2y^2)] dx dy \end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variables: $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = 2 + r \sin(\theta) \end{cases}$, polares centradas en $(0, 2)$, al reemplazar y operar resulta:

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma = -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} \underbrace{[8 - r^2]}_{[4r^2 - r^4 / 4]_0^{\sqrt{8}} = 16} r dr = -48 \int_0^{2\pi} d\theta = -96\pi$$

Respuesta: El flujo pedido es -96π y es entrante al cuerpo pues, al haberlo calculado mediante el teorema de la divergencia, se está considerando que la superficie frontera ∂D está orientada hacia afuera de D (así, con resultado negativo el flujo es entrante).

5. Sea C la curva de ecuación $\vec{X} = (t, t^2, h(t))$ con $z = h(t)$ tal que $t z + e^{t+z-3} - 3 = 0$, para t en un entorno de $t_0 = 1$. **Calcule** la distancia entre los puntos en que la recta tangente a C en $(1, 1, h(1))$ interseca a la superficie de ecuación $z = x^2 + 4$.

Dada la ecuación $t z + e^{t+z-3} - 3 = 0$, para $t = 1$ debe cumplirse que $z_0 + e^{z_0-2} - 3 = 0$ que sólo se cumple si $z_0 = h(1) = 2$. Por lo tanto, resulta $A = (1, 1, 2)$.

Siendo la ecuación de $C : \vec{X} = \underbrace{(t, t^2, h(t))}_{\vec{g}(t)}$ con $t \in E(1)$ $\vec{g}'(1) = (1, 2, h'(1))$ es tangente a C en A .

Es decir, una ecuación vectorial para la recta tangente a C en $A = (1, 1, 2)$ es:

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda (1, 2, h'(1)) \quad (\#)$$

Por su parte, denotando $F(t, z) = t z + e^{t+z-3} - 3$ se cumple que:

- $F(1, 2) = 2 + e^0 - 3 = 0$.
- $\nabla F(t, z) = (z + e^{t+z-3}, t + e^{t+z-3})$ es continuo en \mathcal{R}^2 , pues cada componente es suma de funciones continuas (polinomio + exponencial con exponente polinómica).
- $F'_z(1, 2) = 2 \neq 0$.

entonces la ecuación $t z + e^{t+z-3} - 3 = 0$ define $z = h(t)$ para $t \in E(1)$. Como se cumplen las hipótesis del teorema, podemos calcular $h'(1) = -\frac{F'_t(1, 2)}{F'_z(1, 2)} = -\frac{3}{2}$.

De esta forma, reemplazando en (#) y operando, la ecuación de la recta tangente es:

$$(x, y, z) = \underbrace{(1 + \lambda, 1 + 2\lambda, 2 - \frac{3}{2}\lambda)}_{\vec{w}(\lambda)} \quad \text{con } \lambda \in \mathcal{R}.$$

Los puntos $\vec{w}(\lambda)$ de la recta que también pertenecen a la superficie de ecuación $z = x^2 + 4$ son aquellos para los cuales

$$2 - \frac{3}{2}\lambda = (1 + \lambda)^2 + 4 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{7}{2}\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = -\frac{3}{2}.$$

Entonces los dos puntos son: $\vec{w}(-2) = (-1, -3, 5)$ y $\vec{w}(-3/2) = (-1/2, -2, 17/4)$, mientras que la distancia entre los mismos es $\|\vec{w}(-2) - \vec{w}(-3/2)\| = \sqrt{29/16}$.

Respuesta: $\boxed{\frac{\sqrt{29}}{4}}$.

TEMA 2

1. Dado $\vec{f}(x, y, z) = (y + h(xz), x + 3h(xz), z + h(xz))$ con $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y \vec{f} continuo en \mathbb{R}^3 , **calcule** la circulación de \vec{f} a lo largo del segmento \overline{AB} desde $A = (0, 6, 0)$ hasta $B = (x_0, y_0, z_0)$ con $x_0 > 0$, sabiendo que el segmento tiene longitud igual a $\sqrt{24}$ y está incluido en la recta de ecuación $\vec{X} = (t, 6-t, 2t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

Denotando $\vec{g}(t) = (t, 6-t, 2t)$, es claro que $A = \vec{g}(0)$ mientras que $B = \vec{g}(b)$ de manera que $\|B - A\| = \|(b-0, 6-b-6, 2b-0)\| = \sqrt{6b^2} = \sqrt{24} \Rightarrow b^2 = 4$. Dado que $x_0 = b > 0$, debe ser $b = 2$.

La circulación pedida es $\int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 \vec{f}(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t) dt$, donde:

$$\vec{f}(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t) = ((6-t) + h(2t^2), t + 3h(2t^2), 2t + h(2t^2)) \cdot (1, -1, 2) = 2t + 6.$$

Entonces: $\int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 (2t + 6) dt = [t^2 + 6t]_0^2 = 4 + 12 = 16$. **Respuesta:** $\int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 16$.

2. **Calcule** el volumen del cuerpo definido por: $z \leq 4 - x^2$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq x$, 1º octante.

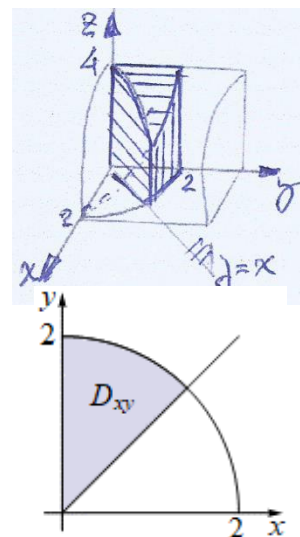
Como se observa en el esquema, el cuerpo está apoyado en el plano xy , tiene paredes laterales de ecuaciones $x = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ e $y = x$, con techo $z = 4 - x^2$.

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{4-x^2} dz = \\ &= \iint_{D_{xy}} (4 - x^2) dx dy \end{aligned}$$

Pasando a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^2 [4 - r^2 \cos^2(\theta)] r dr = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} [2r^2 - \frac{r^4}{4} \cos^2(\theta)]_0^2 d\theta = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} [8 - 4 \cos^2(\theta)] d\theta = \\ &= [8\theta - 4(\theta/2 + \sin(2\theta)/4)]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{3}{2}\pi + 1 \end{aligned}$$

Respuesta: $\text{Vol}(D) = \frac{3}{2}\pi + 1$.



3. Si $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ / $\vec{f}(x, y, z) = (2z g(x) + z^2, y^2 + x g(x), y g(x) + 2xz)$ con $\vec{f}(0,1,0) = (0,1,2)$, **halle** una $g(x)$ tal que la circulación de \vec{f} a lo largo de la circunferencia Γ incluida en el plano $y = 2$ con centro en $(0,2,0)$ y radio $R > 0$ resulte numéricamente igual al doble del área del círculo que tiene a Γ como borde. **Indique** gráficamente la orientación que adopta para Γ .

Siendo Γ una curva simple y cerrada, como $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ veamos qué resulta al calcular el rotor.

$$\nabla \times \vec{f}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2z g(x) + z^2 & y^2 + x g(x) & y g(x) + 2xz \end{vmatrix} = (g(x), 2g(x) - y g'(x), g(x) + x g'(x))$$

Ahora, con las orientaciones que se indican en la figura (ver página siguiente), aplicamos el teorema del rotor tomando como superficie Σ el círculo en el plano $y = 2$.

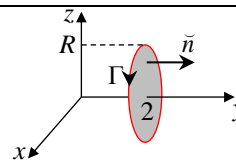
$\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma$, donde el integrando en puntos de Σ es $\nabla \times \vec{f}(x, 2, z) \cdot (0, 1, 0) = 2g(x) - 2g'(x)$, con lo cual resulta:

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} [2g(x) - 2g'(x)] d\sigma$$

Imponiendo –por ejemplo– que $2g(x) - 2g'(x) = 2$ constante, se obtiene lo pedido pues al reemplazar queda: $\oint_{\Gamma^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 2 \iint_{\Sigma} d\sigma = 2 \text{área}(\Sigma)$. Entonces una $g(x)$ es aquella que satisfaga la ecuación diferencial $2g(x) - 2g'(x) = 2$ con $g(0) = 2$ para que resulte $\vec{f}(0, 1, 0) = (0, 1, 2)$.

$$2g'(x) = 2g(x) - 2 \rightarrow \frac{dg(x)}{g(x)-1} = dx \rightarrow \ln |g(x)-1| = x+A \rightarrow g(x) = Ke^x + 1$$

Para $g(0) = 2$ debe ser $K = 1$. Por lo tanto, una respuesta es: $g(x) = 1 + e^x$.



4. Sean $\vec{f}(x, y, z) = (z^2 - xz, x^2 - 3yz, y^2 - z^2)$ y el cuerpo D definido por $z \geq \sqrt{2x^2 + y^2}$, $z \leq x + 2$. **Calcule** el flujo de \vec{f} a través de la superficie frontera de D y, en función del resultado obtenido y de cómo ha elegido orientar a la superficie, **analice** si dicho flujo es entrante o saliente de D .

Dado que $\vec{f} \in C^1$ (componentes polinómicas) aplicando el teorema de la divergencia resulta $\oiint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \vec{f} \, dx \, dy \, dz$, donde $\nabla \cdot \vec{f}(x, y, z) = -z - 3z - 2z = -6z$.

Con lo cual:

$$\oiint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = -6 \iiint_D z \, dx \, dy \, dz$$

Observando el esquema superior la línea C intersección de las dos superficies frontera del cuerpo, resulta:

$$C = \begin{cases} z = \sqrt{2x^2 + y^2} \\ z = x + 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} (x+2)^2 = 2x^2 + y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 8 \\ z = x + 2 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$\downarrow \text{2}^\circ \text{ en } 1^\circ \rightarrow \uparrow$$

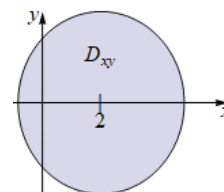
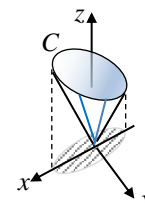
Con lo cual, la proyección del cuerpo sobre el plano xy es la región D_{xy} cuya frontera es la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + y^2 = 8$. Entonces:

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= -6 \iiint_D z \, dx \, dy \, dz = -6 \iint_{D_{xy}} dx \, dy \int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{x+2} z \, dz = \\ &= -3 \iint_{D_{xy}} [(x+2)^2 - (2x^2 + y^2)] dx \, dy \end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variables: $\begin{cases} x = 2 + r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$, polares centradas en $(2, 0)$, al reemplazar y operar resulta:

$$\oiint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = -3 \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^{\sqrt{8}} [8 - r^2] r \, dr}_{[4r^2 - r^4/4]_0^{\sqrt{8}} = 16} = -48 \int_0^{2\pi} d\theta = -96\pi$$

Respuesta: El flujo pedido es -96π y es entrante al cuerpo pues, al haberlo calculado mediante el teorema de la divergencia, se está considerando que la superficie frontera ∂D está orientada hacia afuera de D (así, con resultado negativo el flujo es entrante).



5. Sea C la curva de ecuación $\vec{X} = (t, h(t), t^2)$ con $y = h(t)$ tal que $ty + e^{t+y-3} - 3 = 0$, para t en un entorno de $t_0 = 1$. **Calcule** la distancia entre los puntos en que la recta tangente a C en $(1, h(1), 1)$ interseca a la superficie de ecuación $y = x^2 + 4$.

Dada la ecuación $ty + e^{t+y-3} - 3 = 0$, para $t = 1$ debe cumplirse que $y_0 + e^{y_0-2} - 3 = 0$ que sólo se cumple si $y_0 = h(1) = 2$. Por lo tanto, resulta $A = (1, 2, 1)$.

Siendo la ecuación de $C : \vec{X} = \underbrace{(t, h(t), t^2)}_{\vec{g}(t)}$ con $t \in E(1)$ $\vec{g}'(1) = (1, h'(1), 2)$ es tangente a C en A .

Es decir, una ecuación vectorial para la recta tangente a C en $A = (1, 2, 1)$ es:

$$(x, y, z) = (1, 2, 1) + \lambda (1, h'(1), 2) \quad (\#)$$

Por su parte, denotando $F(t, y) = ty + e^{t+y-3} - 3$ se cumple que:

- $F(1, 2) = 2 + e^0 - 3 = 0$.
- $\nabla F(t, y) = (y + e^{t+y-3}, t + e^{t+y-3})$ es continuo en \mathfrak{R}^2 , pues cada componente es suma de funciones continuas (polinomio + exponencial con exponente polinómica).
- $F'_y(1, 2) = 2 \neq 0$.

entonces la ecuación $ty + e^{t+y-3} - 3 = 0$ define $y = h(t)$ para $t \in E(1)$. Como se cumplen las

hipótesis del teorema, podemos calcular $h'(1) = -\frac{F'_t(1, 2)}{F'_y(1, 2)} = -\frac{3}{2}$.

De esta forma, reemplazando en (#) y operando, la ecuación de la recta tangente es:

$$(x, y, z) = \underbrace{(1 + \lambda, 2 - \frac{3}{2}\lambda, 1 + 2\lambda)}_{\vec{w}(\lambda)} \quad \text{con } \lambda \in \mathfrak{R}.$$

Los puntos $\vec{w}(\lambda)$ de la recta que también pertenecen a la superficie de ecuación $y = x^2 + 4$ son aquellos para los cuales

$$2 - \frac{3}{2}\lambda = (1 + \lambda)^2 + 4 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{7}{2}\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = -\frac{3}{2}.$$

Entonces los dos puntos son: $\vec{w}(-2) = (-1, -3, 5)$ y $\vec{w}(-3/2) = (-1/2, -2, 17/4)$, mientras que la distancia entre los mismos es $\|\vec{w}(-2) - \vec{w}(-3/2)\| = \sqrt{29/16}$.

Respuesta: $\boxed{\frac{\sqrt{29}}{4}}$.