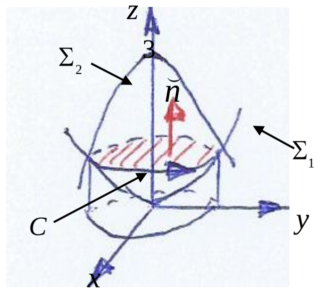
TEMA 1

1. Sea C la curva dada como intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 de ecuaciones $z = x^2 + 2y^2$ y $z = 3 - 2x^2 - 4y^2$ respectivamente. **Calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de C, sabiendo que $\vec{f}(x,y,z) = (z^2 + \varphi(x),\, 2xz\,,\, \varphi(z))$ con $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$. **Indique** gráficamente cómo orientó a C.

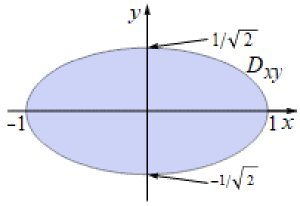


Analizamos la definición de la curva:

$$C : \begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 3 - 2x^2 - 4y^2 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$\downarrow\!\to$ reemplazo 1º en 2º $\to\!\uparrow$

Con lo cual C está incluida en el plano $z = 1$ (rayado en rojo), y queda definida por la intersección de este plano con la superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + 2y^2 = 1$.



Además,

$$\operatorname{rot}\vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2 + \varphi(x) & 2xz & \varphi(z) \end{vmatrix} = (-2x\,,\, 2z\,,\, 2z).$$

Con la orientación de C indicada en el gráfico y usando como superficie Σ el trozo de plano $z = 1$ con $x^2 + 2y^2 \le 1$, como $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ se puede aplicar el teorema del rotor como sigue.

$$\boxed{\oint_{C^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\breve{n}\; d\sigma = \iint_{D_{xy}} [(-2x, 2z, 2z)\cdot(0,0,1)]_{z=1}\, dx\,dy = 2\iint_{D_{xy}} dx\,dy = \pi\sqrt{2}}$$

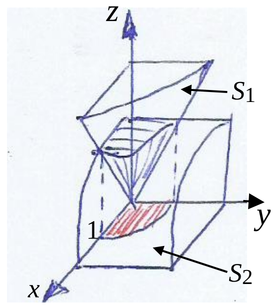
La integral doble es el área encerrada por la elipse $(ab\pi)$. Se puede calcular, por ejemplo, mediante el cambio de variables: $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = 2^{-1/2}\, r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$ que le corresponde $|J(r,\theta)| = 2^{-1/2}\, r$. Entonces,

$$\iint_{D_{xy}} dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta\; \underbrace{\int_0^1 2^{-1/2}\, r\, dr}_{2^{-1/2}[r^2/2]_0^1 = 2^{-1/2}/2} = (2^{-1/2}/2)\; \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi} = \pi/\sqrt{2}\,.$$

---

2. **Calcule** la masa del cuerpo D definido por: $x^2 + z^2 \le 2$, $z^2 \ge x^2 + 2y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy.

$\mathrm{Masa}(D) = \iiint_D \delta(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$, donde $\delta(x,y,z) = k|z| = k\,z$ pues $z \ge 0$ en D.



El cuerpo tiene caras en el plano xz, en el plano yz, la superficie S_1 de ecuación $z^2 = x^2 + 2y^2$ y la S_2 de ecuación $x^2 + z^2 = 2$.

La curva intersección de S_1 y S_2 puede expresarse como:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + 2y^2 \\ x^2 + z^2 = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 2 \end{cases} \text{ con } x \ge 0\,,\; y \ge 0\,,\; z \ge 0$$

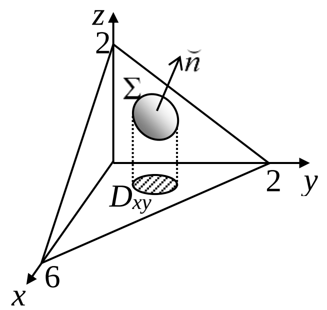
$\downarrow\!\to$ z^2 de la 2º en la 1º $\to\!\uparrow$

Así, la proyección de D contra el plano xy es la región rayada en rojo (1/4 círculo de radio 1).

$$\mathrm{Masa}(D) = \iiint_D k\; z\; dx\,dy\,dz = k\iint_{D_{xy}} dx\,dy \int_{\sqrt{x^2+2y^2}}^{\sqrt{2-x^2}} z\,dz = \frac{k}{2}\iint_{D_{xy}} 2(1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy =$$

$$= k\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (1 - r^2)\, r\, dr = \frac{k}{4}\int_0^{\pi/2} d\theta = k\,\pi/8\,.$$ Respuesta: $\boxed{\mathrm{Masa}(D) = k\,\pi/8}$.

3. Sea $\vec{f}:\Re^3 \to \Re^3$ / $\vec{f}(x,y,z)=(6y\ ,\ 3z\ ,\ x+y)$. **Calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través del trozo de plano Σ de ecuación $x+3y+3z=6$ cuya proyección sobre el plano xy tiene área igual a 8. **Indique** gráficamente cómo decidió orientar a Σ.



Se pide calcular $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\ \mathrm{d}\sigma$. En el esquema de la derecha se representa sombreado el trozo Σ de plano y el versor normal $\breve{n}$ con el que se establece la orientación elegida.
Se ha denotado D_{xy}, rayada en el esquema, a la proyección de Σ sobre el plano xy. Uno de los datos es que "área(D_{xy}) = 8".
Por su parte, Σ admite la ecuación vectorial:

$$\vec{X}=\underbrace{(x\ ,\ y\ ,\frac{6-x-3y}{3})}_{\vec{F}(x,y)}\ \text{ con }\ (x,y)\in D_{xy}$$

Un vector normal a Σ es $\vec{n}=\vec{F}'_x\times\vec{F}'_y=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(1/3,1,1)$, constante y con la orientación del $\breve{n}$ representado en el gráfico. Entonces:

$$\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\ \mathrm{d}\sigma=\iint_{D_{xy}}\vec{f}(\vec{F}(x,y))\cdot\frac{(1/3,1,1)}{\|(1/3,1,1)\|}\,\|(1/3,1,1)\|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}6\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\ \underbrace{\text{área}(D_{xy})}_{8}$$

Respuesta: $\boxed{\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\ \mathrm{d}\sigma=48}$.

---

4. Si $\vec{f}(x,y)=(2y(1+2x^2)e^{x^2}+2x\ ,\ 2xe^{x^2})$, **verifique** que $\vec{f}$ admite función potencial en $\Re^2$ y **calcule** la circulación del campo desde $A=(0,0)$ hasta $B=(1,1)$.

Una forma de verificar lo pedido es hallar la correspondiente función potencial. Para ello, si denotamos con ϕ a la función potencial, deberá cumplirse que $\vec{f}=\nabla\phi$ en todo punto de $\Re^2$.

Así, $\begin{cases}\phi'_x(x,y)=2y(1+2x^2)e^{x^2}+2x & (1)\\ \phi'_y(x,y)=2xe^{x^2} & (2)\end{cases}\ \Rightarrow\ \phi(x,y)=\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}y=2xye^{x^2}+g(x)\quad(3)$

Luego de (3) se obtiene que $\phi'_x(x,y)=2y(1+2x^2)e^{x^2}+g'(x)\overset{\text{por (1)}}{=}2y(1+2x^2)e^{x^2}+2x$, de donde resulta $g'(x)=2x\Rightarrow g(x)=x^2+K$. Reemplazando en (3) se obtiene:

$$\phi(x,y)=2xye^{x^2}+x^2+K$$

Esta última expresa la ecuación de la familia de posibles funciones potenciales, una para cada valor de la constante arbitraria K. Por simple derivación se observa que $\nabla\phi=\vec{f}$ en $\Re^2$, <u>con lo cual se verifica lo pedido</u>.

Por último imponiendo por ejemplo $K=0$ tendremos la función $\phi(x,y)=2xye^{x^2}+x^2$, y para toda curva C orientada de A a B resultará $\int_{C_{AB}}\vec{f}\cdot d\vec{s}=\phi(B)-\phi(A)=\boxed{2e+1}$ que es el resultado de la circulación pedida.

<u>Nota</u>: Si sólo se hubiera querido demostrar la existencia de ϕ, sin hallar una expresión para la misma, en este caso particular hubiera alcanzado con verificar que $\vec{f}$ tiene matriz jacobiana continua y simétrica en $\Re^2$.

5. Dada la familia F de curvas planas de ecuación $x^2+2y^2=C$, **calcule** el área de la región del plano limitada por la recta de ecuación $y=6-x$ y la curva de la familia ortogonal a F que pasa por el punto $(1,1)$.

Comenzamos hallando la familia de curvas ortogonales a F: $\begin{cases} x^2+2y^2=C \\ 2x+4yy'=0 \end{cases}$, como al derivar ya se eliminó la constante C, la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de F es: $x+2yy'=0$.

En la última reemplazamos y' por $-1/y'$: $x+2y(-1/y')=0$, o bien $\boxed{xy'=2y}$ que es la EDO de la familia ortogonal a F.

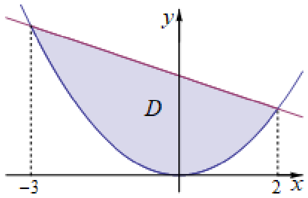
Es decir, $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=2\dfrac{\mathrm{d}x}{x} \quad\Rightarrow\quad \int y^{-1}\,\mathrm{d}y=2\int x^{-1}\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \ln|y|=2\ln|x|+A \quad\Rightarrow\quad \boxed{y=Kx^2}$ es la ecuación de la familia de curvas ortogonal a F.

En particular, la curva de esta familia que pasa por $(1,1)$ es $\boxed{y=x^2}$.

Ahora el problema se reduce a calcular el área de la región D del plano limitada por: $y=x^2$ e $y=6-x$.

Estas curvas se intersecan en los puntos $(-3,9)$ y $(2,4)$.

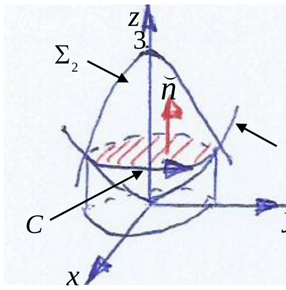
El esquema representa la región D sombreada, de la cual se pide calcular el área.



$$\boxed{\text{Área}(D)} = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-3}^{2}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{6-x}\mathrm{d}y = \int_{-3}^{2}(6-x-x^2)\,\mathrm{d}x = [6x-\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3]_{-3}^{2} = \boxed{\frac{125}{6}}.$$

TEMA 2

1. Sea C la curva dada como intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 de ecuaciones $z = 2x^2 + y^2$ y $z = 3 - 4x^2 - 2y^2$ respectivamente. **Calcule** la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de C, sabiendo que $\vec{f}(x,y,z) = (x^2 + \varphi(x),\, 2xz\,,\, \varphi(z))$ con $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$. **Indique** gráficamente cómo orientó a C.

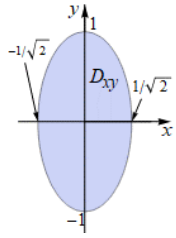


Analizamos la definición de la curva:

$$C : \begin{cases} z = 2x^2 + y^2 \\ z = 3 - 4x^2 - 2y^2 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = 2x^2 + y^2 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} z = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$\downarrow\!\rightarrow$ reemplazo 1º en 2º $\rightarrow\!\uparrow$

Con lo cual C está incluida en el plano $z = 1$ (rayado en rojo), y queda definida por la intersección de este plano con la superficie cilíndrica de ecuación $2x^2 + y^2 = 1$.



Además,

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + \varphi(x) & 2xz & \varphi(z) \end{vmatrix} = (-2x\,,\,0\,,\,2z)$$

Con la orientación de C indicada en el gráfico y usando como superficie Σ el trozo de plano $z = 1$ con $2x^2 + y^2 \le 1$, como $\vec{f} \in C^1(\Re^3)$ se puede aplicar el teorema del rotor como sigue.

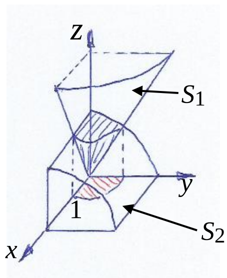
$$\boxed{\oint_{C^+} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \operatorname{rot} \vec{f}\cdot \breve{n}\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} [(-2x,0,2z)\cdot(0,0,1)]_{z=1}\, dx\,dy = 2\iint_{D_{xy}} dx\,dy = \pi\sqrt{2}}$$

La integral doble es el área encerrada por la elipse $(ab\pi)$. Se puede calcular, por ejemplo, mediante el cambio de variables: $\begin{cases} x = 2^{-1/2}\, r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$ que le corresponde $|J(r,\theta)| = 2^{-1/2}\, r$ .Entonces,

$$\iint_{D_{xy}} dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_0^1 2^{-1/2}\, r\, dr}_{2^{-1/2}[r^2/2]_0^1 = 2^{-1/2}/2} = (2^{-1/2}/2) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi} = \pi/\sqrt{2}\,.$$

2. **Calcule** la masa del cuerpo D definido por: $y^2 + z^2 \le 2$, $z^2 \ge 2x^2 + y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy.

$\mathrm{Masa}(D) = \iiint_D \delta(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$, donde $\delta(x,y,z) = k|z| = kz$ pues $z \ge 0$ en D.



El cuerpo tiene caras en el plano xz, en el plano yz, la superficie S_1 de ecuación $z^2 = 2x^2 + y^2$ y la S_2 de ecuación $y^2 + z^2 = 2$.

La curva intersección de S_1 y S_2 puede expresarse como:

$$\begin{cases} z^2 = 2x^2 + y^2 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \text{ con } x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$$

$\downarrow\!\rightarrow$ z^2 de la 2º en la 1º $\rightarrow\!\uparrow$

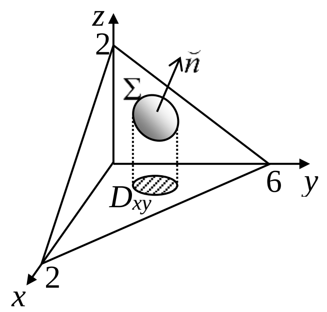
Así, la proyección de D contra el plano xy es la región rayada en rojo (1/4 círculo de radio 1).

$$\mathrm{Masa}(D) = \iiint_D k\, z\, dx\,dy\,dz = k\iint_{D_{xy}} dxdy \int_{\sqrt{2x^2+y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} z\,dz = \frac{k}{2}\iint_{D_{xy}} 2(1 - x^2 - y^2)\,dxdy =$$

$= k\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (1-r^2)\, r\, dr = \frac{k}{4}\int_0^{\pi/2} d\theta = k\pi/8$. Respuesta: $\boxed{\mathrm{Masa}(D) = k\pi/8}$.

3. Sea $\vec{f}:\Re^3 \to \Re^3$ / $\vec{f}(x,y,z) = (2x\,,\,9z\,,\,x+y)$. **Calcule** el flujo de $\vec{f}$ a través del trozo de plano Σ de ecuación $3x+y+3z=6$ cuya proyección sobre el plano xy tiene área igual a 8. **Indique** gráficamente cómo decidió orientar a Σ.

Se pide calcular $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\,\mathrm{d}\sigma$. En el esquema de la derecha se representa sombreado el trozo Σ de plano y el versor normal $\breve{n}$ con el que se establece la orientación elegida.
Se ha denotado D_{xy}, rayada en el esquema, a la proyección de Σ sobre el plano xy. Uno de los datos es que "área(D_{xy}) = 8".
Por su parte, Σ admite la ecuación vectorial:



$$\vec{X} = \underbrace{\left(x\,,\,y\,,\frac{6-3x-y}{3}\right)}_{\vec{F}(x,y)} \quad \text{con} \quad (x,y)\in D_{xy}$$

Un vector normal a Σ es $\vec{n} = \vec{F}'_x \times \vec{F}'_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{vmatrix} = (1, 1/3\,, 1)$, constante y con la orientación del $\breve{n}$ representado en el gráfico. Entonces:

$$\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_{xy}} \vec{f}(\vec{F}(x,y))\cdot\frac{(1,1/3,1)}{\|(1,1/3,1)\|}\,\|(1,1/3,1)\|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} 6\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 6\,\underbrace{\text{área}(D_{xy})}_{8}$$

Respuesta: $\boxed{\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\breve{n}\,\mathrm{d}\sigma = 48}$.

4. Si $\vec{f}(x,y) = (2ye^{y^2}\,,\,2x(1+2y^2)e^{y^2}+2y)$, **verifique** que $\vec{f}$ admite función potencial en $\Re^2$ y **calcule** la circulación del campo desde $A=(0,0)$ hasta $B=(1,1)$.

Una forma de verificar lo pedido es hallar la correspondiente función potencial. Para ello, si denotamos con ϕ a la función potencial, deberá cumplirse que $\vec{f} = \nabla\phi$ en todo punto de $\Re^2$.

$$\text{Así,}\quad \begin{cases} \phi'_x(x,y) = 2ye^{y^2} & (1) \quad \Rightarrow \phi(x,y) = \int 2ye^{y^2}\,\mathrm{d}x = 2xye^{y^2} + g(y) \quad (3) \\ \phi'_y(x,y) = 2x(1+2y^2)e^{y^2} + 2y \quad (2) & \end{cases}$$

Luego de (3) se obtiene que $\phi'_y(x,y) = 2x(1+2y^2)e^{y^2} + g'(y) \overset{\text{por (2)}}{=} 2x(1+2y^2)e^{y^2} + 2y$, de donde resulta $g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + K$. Reemplazando en (3) se obtiene:

$$\phi(x,y) = 2xye^{y^2} + y^2 + K$$

Esta última expresa la ecuación de la familia de posibles funciones potenciales, una para cada valor de la constante arbitraria K. Por simple derivación se observa que $\nabla\phi = \vec{f}$ en $\Re^2$, <u>con lo cual se verifica lo pedido</u>.

Por último imponiendo por ejemplo $K=0$ tendremos la función $\phi(x,y) = 2xye^{y^2} + y^2$, y para toda curva C orientada de A a B resultará $\int_{C_{AB}} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \phi(B) - \phi(A) = \boxed{2e+1}$ que es el resultado de la circulación pedida.

<u>Nota</u>: Si sólo se hubiera querido demostrar la existencia de ϕ, sin hallar una expresión para la misma, en este caso particular hubiera alcanzado con verificar que $\vec{f}$ tiene matriz jacobiana continua y simétrica en $\Re^2$.

5. Dada la familia F de curvas planas de ecuación $2x^2 + y^2 = C$, **calcule** el área de la región del plano limitada por la recta de ecuación $y = 6 - x$ y la curva de la familia ortogonal a F que pasa por el punto $(1,1)$.

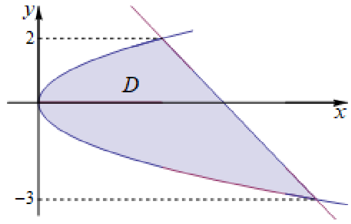
Comenzamos hallando la familia de curvas ortogonales a F: $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = C \\ 4x + 2y\,y' = 0 \end{cases}$, como al derivar ya se eliminó la constante C, la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de F es: $2x + y\,y' = 0$.

En la última reemplazamos y' por $-1/y'$: $2x + y\,(-1/y') = 0$, o bien $\boxed{2x\,y' = y}$ que es la EDO de la familia ortogonal a F.

Es decir, $2\,\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \;\Rightarrow\; 2\int y^{-1}\mathrm{d}y = \int x^{-1}\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; 2\ln|y| = \ln|x| + A \;\Rightarrow\; \boxed{y^2 = K\,x}$ es la ecuación de la familia de curvas ortogonal a F.

En particular, la curva de esta familia que pasa por $(1,1)$ es $\boxed{y^2 = x}$.

Ahora el problema se reduce a calcular el área de la región D del plano limitada por: $y^2 = x$ e $y = 6 - x$.
Estas curvas se intersecan en los puntos $(9,-3)$ y $(4,2)$.
El esquema representa la región D sombreada, de la cual se pide calcular el área.



$$\boxed{\text{Área}(D)} = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-3}^{2}\mathrm{d}y \int_{y^2}^{6-y}\mathrm{d}x = \int_{-3}^{2}(6 - y - y^2)\,\mathrm{d}y = [6y - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{3}y^3]_{-3}^{2} = \boxed{\frac{125}{6}}.$$