

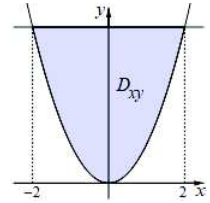
**TEMA 1**

1. Dada la superficie  $\Sigma$  de ecuación  $x^2 y = 2z$  con  $x^2 \leq y \leq 4$ , **calcule** el flujo de  $\vec{f}$  a través de  $\Sigma$  orientada hacia  $z^+$  sabiendo que  $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ .

La superficie  $\Sigma$  admite ecuación vectorial:

$$\vec{X} = \underbrace{(x, y, x^2 y / 2)}_{\vec{G}(x,y)} \text{ con } (x, y) \in D_{xy}$$

donde  $D_{xy}$  se especifica en el enunciado y se representa en el esquema.



Una normal a  $\Sigma$  en cada punto es  $\vec{n}(x, y) = (\vec{G}'_x \times \vec{G}'_y)(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & xy \\ 0 & 1 & x^2/2 \end{vmatrix} = (-xy, -x^2/2, 1)$ ,

que está bien orientada (hacia  $z^+$ ) pues su tercera componente es positiva. Entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \iint_{D_{xy}} \vec{f}(\vec{G}(x, y)) \cdot \frac{\vec{G}'_x \times \vec{G}'_y}{\|\vec{G}'_x \times \vec{G}'_y\|} \|\vec{G}'_x \times \vec{G}'_y\| \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} (-x^2 y) \, dx \, dy = \\ &= -\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 x^2 y \, dy = -\frac{1}{2} \int_{-2}^2 x^2 (16 - x^4) \, dx = -\frac{1}{2} \left[ \frac{16}{3} x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right]_{-2}^2 = -\frac{512}{21} \end{aligned}$$

Respuesta:  $\boxed{\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = -\frac{512}{21}}$ .

2. Siendo  $\vec{f}(x, y) = (2y, -1)$ , **calcule** el área de la región  $D$  del plano  $xy$  limitada por  $x = 0$  y las líneas de campo  $L_1$  y  $L_2$  de  $\vec{f}$  que pasan por los puntos  $(4, 0)$  y  $(1, 0)$  respectivamente.

Ecuación diferencial de las líneas de campo:  $\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-1} \rightarrow 2y \, dy = -dx$ .

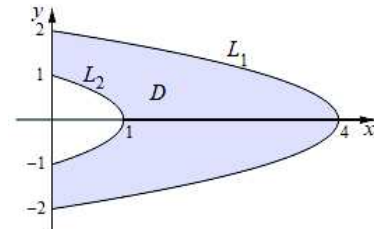
De donde  $\int 2y \, dy = -\int dx \rightarrow y^2 = -x + C$  es la ecuación cartesiana de las líneas de campo.

En particular:

$$L_1 : y^2 = 4 - x$$

$$L_2 : y^2 = 1 - x$$

La región  $D$  del plano  $xy$  es la del esquema.



$$\begin{aligned} \text{área}(D) &= \iint_D dx \, dy = \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{4-y^2} dx + \int_{-1}^1 dy \int_{1-y^2}^{4-y^2} dx + \int_1^2 dy \int_0^{4-y^2} dx = \\ &= \int_{-2}^{-1} (4 - y^2) \, dy + \int_{-1}^1 3 \, dy + \int_1^2 (4 - y^2) \, dy = \left[ 4y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{-2}^{-1} + 6 + \left[ 4y - \frac{1}{3} y^3 \right]_1^2 \end{aligned}$$

Respuesta:  $\boxed{\text{área}(D) = 28/3}$ .

3. Sea  $\vec{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), z + 2)$  con  $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$  y solenoidal, tal que el flujo de  $\vec{f}$  a través de la superficie  $\Sigma$  de ecuación  $y = \sqrt{5 - x^2 - z^2}$  con  $y \geq 1$  resulta igual a  $7\pi$  cuando  $\Sigma$  se la orienta hacia  $y^+$ . **Calcule** el flujo del campo  $\vec{f}$  a través de la superficie  $S$  de ecuación  $y = 1$  con  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 5$ , orientada también hacia  $y^+$ .

Como se observa en el gráfico, entre  $S$  (verde) y  $\Sigma$  queda definido un cuerpo  $D$  cuya frontera es  $\partial D = \Sigma \cup S$ .

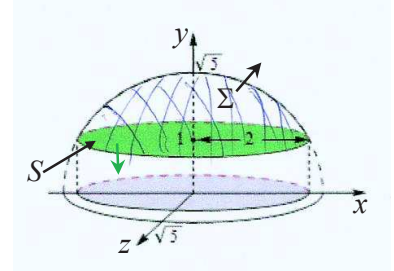
La curva común a  $\Sigma$  y  $S$  es

$$C : \begin{cases} y = \sqrt{5 - x^2 - z^2} \\ y = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Dado que  $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ , podemos aplicar el teorema de la divergencia, resultando:

$$\iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \underbrace{\text{div}(\vec{f})}_{=0} \, dx \, dy \, dz = 0$$

$\vec{f}$  solenoidal



Indicando con “ $\uparrow$ ” la orientación de una superficie hacia  $y^+$  y con “ $\downarrow$ ” a la opuesta, corresponde:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \iint_{\Sigma \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma + \iint_{S \downarrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0 \\ -\iint_{S \downarrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \iint_{\Sigma \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 7\pi \quad \text{dato} \Rightarrow \text{Respuesta: } \boxed{\iint_{S \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 7\pi} \\ -\iint_{S \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma & \end{aligned}$$

4. Sean  $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$  y  $\vec{f} = U\nabla U + \vec{g}$  con  $\vec{g}(x, y) = (\sin(x^2 + x), 2xy)$ . Sabiendo que la circulación de  $\vec{f}$  desde  $A = (-2, 0)$  hasta  $B = (2, 0)$  a lo largo de la curva de ecuación  $y = 4 - x^2$  es igual a  $-24$ , **calcule** la circulación de  $\vec{f}$  desde  $A$  hasta  $B$  a lo largo de  $y = -\sqrt{4 - x^2}$ .

Dado que  $U$  no se conoce, veamos qué ocurre si planteamos la aplicación del teorema de Green. En la figura se representa la región sombreada  $D$  limitada por las curvas

$\Gamma : y = 4 - x^2$  y  $C : y = -\sqrt{4 - x^2}$ , ambas con  $-2 \leq x \leq 2$ .

La orientación indicada en ambas es la que permite aplicar el teorema de Green, que es aplicable pues  $\vec{f} \in C^1$  ya que  $U \in C^2$  y  $\vec{g} = (g_1, g_2) \in C^\infty$ .

La frontera de  $D$  es  $\partial D = C \cup \Gamma$  y  $U\nabla U = (UU'_x, UU'_y)$ , luego:

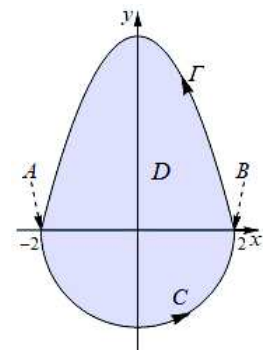
$$\vec{f} = \underbrace{(UU'_x + g_1)}_P, \underbrace{UU'_y + g_2}_Q$$

cumpléndose que  $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy$ ,

$$\text{donde } \begin{cases} Q'_x = U'_x U'_y + UU''_{yx} + g'_{2x} \\ P'_y = U'_y U'_x + UU''_{xy} + g'_{1y} \end{cases}$$

Como  $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$  resultan  $U''_{xy} = U''_{yx}$ , con lo cual  $(Q'_x - P'_y)(x, y) = 2y$ . Así:

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D 2y \, dx \, dy = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} 2y \, dy = \int_{-2}^2 [(4-x^2)^2 - (4-x^2)] dx = \frac{352}{15}$$



Pero  $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \underbrace{\oint_{\Gamma_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s}}_{24} = \frac{352}{15} \Rightarrow \boxed{\oint_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\frac{8}{15}}$ .

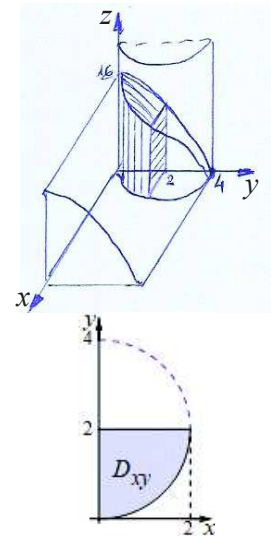
Nota: Usamos 24 pues el dato es la circ. a lo largo de  $\Gamma$  desde  $A$  hasta  $B$ :  $\oint_{\Gamma_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -24$ .

5. **Calcule** el volumen del cuerpo  $D$  definido por:  $z \leq 16 - y^2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4y$ ,  $y \leq 2$ , en el 1º octante.

Completando cuadrados,  $x^2 + y^2 \leq 4y \equiv x^2 + (y-2)^2 \leq 4$

Como se observa en el esquema, el cuerpo está “apoyado” sobre el plano  $xy$  donde tiene como base la región  $D_{xy}$ .

Tiene tres caras laterales, perpendiculares al plano  $xy$ , de ecuaciones:  $y = 2$ ,  $x = 0$ ,  $x^2 + (y-2)^2 = 4$ , mientras que el “techo” es una porción de la superficie cilíndrica  $z = 16 - y^2$ .



$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{16-y^2} dz = \\ &= \iint_{D_{xy}} (16 - y^2) dx dy \end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variables  $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = 2 + r \sin(\theta) \end{cases}$ , polares centradas en  $(x_0, y_0) = (0, 2)$ , resulta:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \int_{-\pi/2}^0 d\theta \int_0^2 \underbrace{[16 - (2 + r \sin(\theta))^2]}_{[6r^2 - \frac{4}{3}r^3 \sin(\theta) - \frac{1}{4}r^4 \sin^2(\theta)]_0^2} r dr = \int_{-\pi/2}^0 [24 - \frac{32}{3} \sin(\theta) - 4 \sin^2(\theta)] d\theta = \\ &= [24\theta + \frac{32}{3} \cos(\theta) - 4(\theta/2 + \sin(2\theta)/4)]_{-\pi/2}^0 = 11\pi + 32/3 \end{aligned}$$

Respuesta:  $\boxed{\text{Vol}(D) = 11\pi + \frac{32}{3}}$ .

Corresponde signo "-"

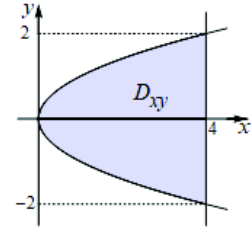
**TEMA 2**

1. Dada la superficie  $\Sigma$  de ecuación  $xy^2 = 2z$  con  $y^2 \leq x \leq 4$ , **calcule** el flujo de  $\vec{f}$  a través de  $\Sigma$  orientada hacia  $z^+$  sabiendo que  $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ .

La superficie  $\Sigma$  admite ecuación vectorial:

$$\vec{X} = \underbrace{(x, y, xy^2/2)}_{\vec{G}(x,y)} \text{ con } (x,y) \in D_{xy}$$

donde  $D_{xy}$  se especifica en el enunciado y se representa en el esquema.



Una normal a  $\Sigma$  en cada punto es  $\vec{n}(x, y) = (\vec{G}'_x \times \vec{G}'_y)(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & y^2/2 \\ 0 & 1 & xy \end{vmatrix} = (-y^2/2, -xy, 1)$ ,

que está bien orientada (hacia  $z^+$ ) pues su tercera componente es positiva. Entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \iint_{D_{xy}} \vec{f}(\vec{G}(x, y)) \cdot \frac{\vec{G}'_x \times \vec{G}'_y}{\|\vec{G}'_x \times \vec{G}'_y\|} \|\vec{G}'_x \times \vec{G}'_y\| \, dx \, dy = \iint_{D_{xy}} (-xy^2) \, dx \, dy = \\ &= -\int_{-2}^2 dy \int_{y^2}^4 xy^2 \, dx = -\frac{1}{2} \int_{-2}^2 y^2 (16 - y^4) \, dy = -\frac{1}{2} \left[ \frac{16}{3} y^3 - \frac{1}{7} y^7 \right]_{-2}^2 = -\frac{512}{21} \end{aligned}$$

Respuesta:  $\boxed{\iint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = -\frac{512}{21}}$ .

2. Siendo  $\vec{f}(x, y) = (2y, 1)$ , **calcule** el área de la región  $D$  del plano  $xy$  limitada por  $x = 0$  y las líneas de campo  $L_1$  y  $L_2$  de  $\vec{f}$  que pasan por los puntos  $(-4, 0)$  y  $(-1, 0)$  respectivamente.

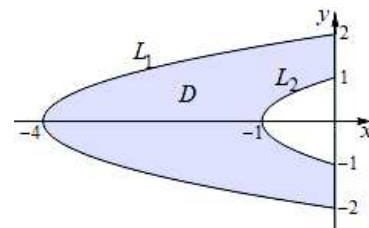
Ecuación diferencial de las líneas de campo:  $\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{1} \rightarrow 2y \, dy = dx$ .

De donde  $\int 2y \, dy = \int dx \rightarrow y^2 = x + C$  es la ecuación cartesiana de las líneas de campo.

En particular:

$$L_1 : y^2 = 4 + x$$

$$L_2 : y^2 = 1 + x$$



La región  $D$  del plano  $xy$  es la del esquema.

$$\begin{aligned} \text{área}(D) &= \iint_D dx \, dy = \int_{-2}^{-1} dy \int_{y^2-4}^{y^2-1} dx + \int_{-1}^0 dy \int_{y^2-4}^{y^2-1} dx + \int_0^2 dy \int_{y^2-4}^0 dx = \\ &= \int_{-2}^{-1} (4 - y^2) \, dy + \int_{-1}^0 3 \, dy + \int_0^2 (4 - y^2) \, dy = \left[ 4y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-2}^{-1} + 6 + \left[ 4y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^2 \end{aligned}$$

Respuesta:  $\boxed{\text{área}(D) = 28/3}$ .

3. Sea  $\vec{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), y + 2, R(x, y, z))$  con  $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$  y solenoidal, tal que el flujo de  $\vec{f}$  a través de la superficie  $\Sigma$  de ecuación  $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$  con  $z \geq 1$  resulta igual a  $7\pi$  cuando  $\Sigma$  se la orienta hacia  $z^+$ . **Calcule** el flujo del campo  $\vec{f}$  a través de la superficie  $S$  de ecuación  $z = 1$  con  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 5$ , orientada también hacia  $z^+$ .

Como se observa en el gráfico, entre  $S$  (verde) y  $\Sigma$  queda definido un cuerpo  $D$  cuya frontera es  $\partial D = \Sigma \cup S$ .

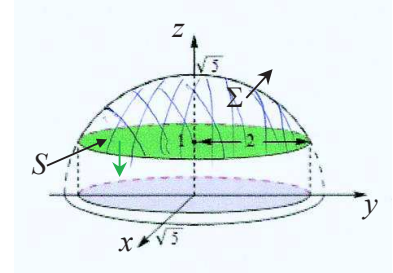
La curva común a  $\Sigma$  y  $S$  es

$$C: \begin{cases} z = \sqrt{5 - x^2 - y^2} \\ z = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$

Dado que  $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ , podemos aplicar el teorema de la divergencia, resultando:

$$\oiint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_D \underbrace{\operatorname{div}(\vec{f})}_{=0} \, dx \, dy \, dz = 0$$

$\vec{f}$  solenoidal



Indicando con “ $\uparrow$ ” la orientación del  $\vec{n}$  hacia  $z^+$  y con “ $\downarrow$ ” a la opuesta, corresponde:

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial D} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \iint_{\Sigma \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma + \iint_{S \downarrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0 \\ -\iint_{S \downarrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \iint_{\Sigma \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \underbrace{7\pi}_{\text{dato}} \Rightarrow \text{Respuesta: } \boxed{\iint_{S \uparrow} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 7\pi}. \end{aligned}$$

4. Sean  $U: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$  y  $\vec{f} = U\nabla U + \vec{g}$  con  $\vec{g}(x, y) = (\cos(x^2 - x), 2xy)$ . Sabiendo que la circulación de  $\vec{f}$  desde  $A = (-2, 0)$  hasta  $B = (2, 0)$  a lo largo de la curva de ecuación  $y = \sqrt{4 - x^2}$  es igual a 24, **calcule** la circulación de  $\vec{f}$  desde  $A$  hasta  $B$  a lo largo de  $y = x^2 - 4$ .

Dado que  $U$  no se conoce, veamos qué ocurre si planteamos la aplicación del teorema de Green. En la figura se representa la región sombreada  $D$  limitada por las curvas

$\Gamma: y = x^2 - 4$  y  $C: y = \sqrt{4 - x^2}$ , ambas con  $-2 \leq x \leq 2$ .

La orientación indicada en ambas es la que permite aplicar el teorema de Green, que es aplicable pues  $\vec{f} \in C^1$  ya que  $U \in C^2$  y  $\vec{g} = (g_1, g_2) \in C^\infty$ .

La frontera de  $D$  es  $\partial D = C \cup \Gamma$  y  $U\nabla U = (UU'_x, UU'_y)$ , luego:

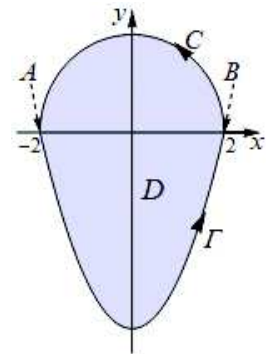
$$\vec{f} = \underbrace{(UU'_x + g_1)}_{\vec{P}} \vec{i} + \underbrace{(UU'_y + g_2)}_{\vec{Q}} \vec{j}$$

cumpléndose que  $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy$ ,

$$\text{donde } \begin{cases} Q'_x = U'_x U'_y + UU''_{yx} + g'_{2x} \\ P'_y = U'_y U'_x + UU''_{xy} + g'_{1y} \end{cases}$$

Como  $U \in C^2(\mathbb{R}^2)$  resultan  $U''_{xy} = U''_{yx}$ , con lo cual  $(Q'_x - P'_y)(x, y) = 2y$ . Así:

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D 2y \, dx \, dy = \int_{-2}^2 dx \int_{x^2-4}^{\sqrt{4-x^2}} 2y \, dy = \int_{-2}^2 [(4-x^2) - (x^2-4)^2] dx = -\frac{352}{15}$$



Pero  $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\oint_{C_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s}}_{-24} + \oint_{\Gamma_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\frac{352}{15} \Rightarrow \boxed{\oint_{\Gamma_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{8}{15}}$ .

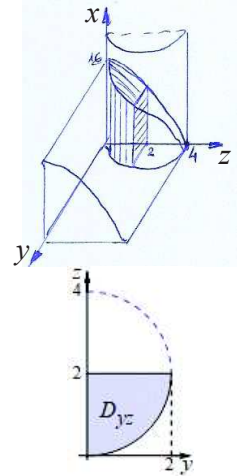
Nota: Usamos  $-24$  pues el dato es la circ. a lo largo de  $C$  desde  $A$  hasta  $B$ :  $\oint_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 24$ .

5. **Calcule** el volumen del cuerpo  $D$  definido por:  $x \leq 16 - z^2$ ,  $y^2 + z^2 \leq 4z$ ,  $z \leq 2$ , en el 1º octante.

Completando cuadrados,  $y^2 + z^2 \leq 4z \equiv y^2 + (z-2)^2 \leq 4$

Como se observa en el esquema, el cuerpo está “apoyado” sobre el plano  $yz$  donde tiene como base la región  $D_{yz}$ .

Tiene tres caras laterales, perpendiculares al plano  $yz$ , de ecuaciones:  $z = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 + (z-2)^2 = 4$ , mientras que el “techo” es una porción de la superficie cilíndrica  $x = 16 - z^2$ .



$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \iint_{D_{yz}} dy dz \int_0^{16-z^2} dx = \\ &= \iint_{D_{yz}} (16 - z^2) dy dz \end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variables  $\begin{cases} y = r \cos(\theta) \\ z = 2 + r \sin(\theta) \end{cases}$ , polares centradas en  $(y_0, z_0) = (0, 2)$ , resulta:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \int_{-\pi/2}^0 d\theta \int_0^2 \underbrace{[16 - (2 + r \sin(\theta))^2]}_{[6r^2 - \frac{4}{3}r^3 \sin(\theta) - \frac{1}{4}r^4 \sin^2(\theta)]_0^2} r dr = \int_{-\pi/2}^0 [24 - \frac{32}{3} \sin(\theta) - 4 \sin^2(\theta)] d\theta = \\ &= [24\theta + \frac{32}{3} \cos(\theta) - 4(\theta/2 + \frac{1}{4} \sin(2\theta)/4)]_{-\pi/2}^0 = 11\pi + 32/3 \end{aligned}$$

Respuesta:  $\boxed{\text{Vol}(D) = 11\pi + \frac{32}{3}}$ .

Corresponde signo "-"