

TEMA 1

1. Dada la superficie Σ de ecuación $x^2 y + xz = 0$, siendo r_A y r_B sus rectas normales en los puntos $A = (1, -1, 1)$ y $B = (-1, 1, 1)$ respectivamente, **verifique** que dichas rectas se intersecan en un punto y **halle** una ecuación para el plano que las contiene.

Denotando $F(x, y, z) = x^2 y + xz$, se cumple que:

- $F(A) = -1 + 1 = 0$ y $F(B) = 1 - 1 = 0$,
- $\nabla F(x, y, z) = (2xy + z, x^2, x)$ es continuo en $\mathbb{R}^3$, por tener componentes polinómicas,
- $\nabla F(A) = (-1, 1, 1) \neq \vec{0}$ y $\nabla F(B) = (-1, 1, -1) \neq \vec{0}$.

Entonces el gradiente en cada punto permite orientar la recta normal a Σ en ese punto. De donde, las ecuaciones de las rectas son:

$$r_A : \vec{X} = A + u \nabla F(A) = (1 - u, -1 + u, 1 + u) \quad \text{con } u \in \mathbb{R}$$

$$r_B : \vec{X} = B + v \nabla F(B) = (-1 - v, 1 + v, 1 - v) \quad \text{con } v \in \mathbb{R}$$

Para verificar que existe el punto en común a ellas debemos encontrar el par (u, v) para el cual ambas ecuaciones generen el mismo punto. Es decir:

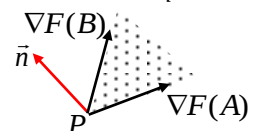
$$\begin{cases} 1 - u = -1 - v & (a) \\ -1 + u = 1 + v & (b) \\ 1 + u = 1 - v & (c) \end{cases} \quad \text{Sumando m.a.m. (a) y (c)} \rightarrow 2 = -2v \Rightarrow v = -1 \xrightarrow{(c)} u = 1.$$

Se comprueba que con $u = 1$, $P = (0, 0, 2) \in r_A$ y con $v = -1$, $P = (0, 0, 2) \in r_B$, luego:

$$\boxed{\text{El punto común a ambas rectas es } P = (0, 0, 2)}.$$

Por otra parte, $\vec{n} = \nabla F(A) \times \nabla F(B) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2, -2, 0)$ es normal

representación esquemática



al plano, entonces una ecuación para el plano pedido es:

$$((x, y, z) - (0, 0, 2)) \cdot (-2, -2, 0) = 0, \text{ es decir, } \boxed{x + y = 0}.$$

2. Dada $f(x, y) = \frac{\sqrt{xy - x^3}}{x^2 + y - 2}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D e **indique** un ejemplo de punto interior a D y dos de puntos frontera de D (uno perteneciente y otro que no pertenezca a D).

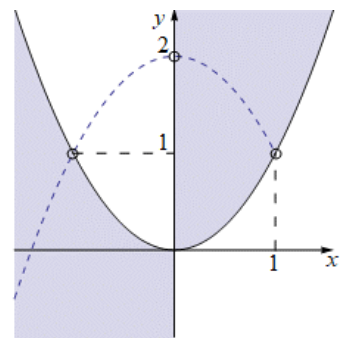
Los puntos (x, y) pertenecientes a D deben cumplir con:

- $xy - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x(y - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge y \geq x^2) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq x^2)$
- $x^2 + y - 2 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 2 - x^2$

Entonces

$$\boxed{D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 2 - x^2 \wedge ((x \geq 0 \wedge y \geq x^2) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq x^2))\}}$$

que se representa sombreado en la figura de la derecha.



$$\boxed{\text{Un punto interior es el } (1, 2), \text{ dos puntos frontera son: } (0, 1) \in D \text{ y } (0, 2) \notin D}.$$

3. La curva de ecuación $v = f(u)$, en el plano uv , tiene recta tangente de ecuación $2u + v = 8$ en el punto $(2, v_0)$. Siendo $h(x, y) = x^2 y + f(xy)$, **calcule** aproximadamente $h(0.98, 2.03)$ mediante una aproximación lineal.

Considerando el punto $(x_0, y_0) = (1, 2)$, la aproximación lineal en un entorno de $(1, 2)$ se obtiene con:

$$h(x, y) \cong h(1, 2) + h'_x(1, 2)(x - 1) + h'_y(1, 2)(y - 2)$$

donde:

- $h(1, 2) = 2 + f(2)$,
- $h'_x(1, 2) = [2xy + f'(xy)y]_{(1,2)} = 4 + 2f'(2)$,
- $h'_y(1, 2) = [x^2 + f'(xy)x]_{(1,2)} = 1 + f'(2)$.

Por otra parte, considerando la curva de ecuación $v = f(u)$ mencionada en el enunciado: Siendo la ecuación de la recta tangente $v = -2u + 8$, dado que la curva y su recta tangente deben compartir el punto de tangencia, $v_0 = -2 \cdot 2 + 8$, entonces $v_0 = f(2) = 4$ y la pendiente de la recta es $f'(2) = -2$. Con lo cual, reemplazando, resultan:

$$h(1, 2) = 2 + 4 = 6, \quad h'_x(1, 2) = 4 + 2(-2) = 0, \quad h'_y(1, 2) = 1 - 2 = -1.$$

Así, la expresión para la aproximación pedida queda $h(x, y) \cong 6 + 0(x - 1) - (y - 2)$, de donde:

$$\boxed{h(0.98, 2.03) \cong 6 + 0(0.98 - 1) - (2.03 - 2) = 5.97}.$$

Nota: la aproximación lineal realizada es posible pues h es diferenciable por ser suma de un polinomio + la composición de un polinomio con f . La función f , por ser función de una variable, al ser derivable es diferenciable.

4. **Halle** el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x, y) = x^2 y + y^3 - 3y$ en puntos del círculo definido por $x^2 + y^2 \leq 9/4$, **indique** en qué puntos se producen dichos extremos.

Analizamos primero en el interior del círculo ($x^2 + y^2 < 9/4$), con $f \in C^2$ por ser polinómica.

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2xy \\ f'_y(x, y) = x^2 + 3y^2 - 3 \end{cases} \cdot \text{Puntos críticos: } \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0 \vee y = 0 \quad (*)$$

$x = 0 \xrightarrow{(*)} y^2 = 1 \rightarrow y = -1 \vee y = 1 \rightarrow (0, -1) \text{ y } (0, 1)$ ambos interiores al círculo.

$y = 0 \xrightarrow{(*)} x^2 = 3 \rightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3} \rightarrow (-\sqrt{3}, 0) \text{ y } (\sqrt{3}, 0)$, que se descartan del análisis porque son exteriores al círculo.

	(0, -1)	(0, 1)
$f''_{xx}(x, y) = 2y$	-2	2
$f''_{xy}(x, y) = 2x$	0	0
$f''_{yy}(x, y) = 6y$	-6	6

$$H(0, -1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12 > 0, \quad f''_{xx}(0, -1) = -2 < 0.$$

$$H(0, 1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 > 0, \quad f''_{xx}(0, 1) = 2 > 0.$$

$f(0, -1) = 2$ es máximo local y $f(0, 1) = -2$ es mínimo local.

Ahora analizamos en la frontera ($x^2 + y^2 = 9/4$)

Dado que $f(x, y) = (x^2 + y^2)y - 3y$, en puntos de la frontera vale $\frac{9}{4}y - 3y = -\frac{3}{4}y$.

Es decir, analizar $g(y) = -\frac{3}{4}y$ con $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$. Como esta función es estrictamente decreciente, en la frontera resulta $g(3/2) = f(0, 3/2) = -9/8$ mínimo y $g(-3/2) = f(0, -3/2) = 9/8$ máximo.

Comparando los extremos en el interior y la frontera se concluye que, en puntos del círculo dado:

$$\boxed{f(0, 1) = -2 \text{ es el mínimo absoluto y } f(0, -1) = 2 \text{ es el máximo absoluto.}}$$

5. Siendo $z = f(u, v)$ con $(u, v) = (x + y^2, xy)$, resulta $z = h(x, y)$. Sabiendo que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y que las derivadas direccionales $f'((5, 2), (1, 0)) = 8$ y $f'((5, 2), (0.8, 0.6)) = 4$, **calcule** el valor que debe tener z_0 para que la recta normal a la superficie de ecuación $z = h(x, y)$ en el punto $(1, 2, z_0)$ tenga un punto en común con el eje x .

Denotando $\bar{g}(x, y) = (x + y^2, xy)$ es claro que $h(x, y) = f(\bar{g}(x, y))$, donde h es diferenciable pues $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $\bar{g}$ tiene componentes polinómicas.

Siendo $z = h(x, y)$, $h(x, y) - z = 0$. Denotando $F(x, y, z) = h(x, y) - z$, se cumple que:

- $F(1, 2, z_0) = h(1, 2) - z_0 = 0$ dado que, por enunciado, el punto $(1, 2, z_0)$ pertenece a la superficie.
- F es diferenciable pues h lo es,
- $\nabla F(1, 2, z_0) = (h'_x(1, 2), h'_y(1, 2), -1) \neq \vec{0}$.

Con lo cual $\nabla F(1, 2, z_0)$ permite orientar la recta normal a la superficie en $(1, 2, z_0)$.

Aplicando ahora la regla de la cadena y suponiendo que f es función de las variables u y v :

$$Dh(1, 2) = \begin{pmatrix} h'_x(1, 2) & h'_y(1, 2) \end{pmatrix} = Df(\bar{g}(1, 2)) D(\bar{g}(1, 2))$$

$$\begin{pmatrix} h'_x(1, 2) & h'_y(1, 2) \end{pmatrix} = Df(5, 2) \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ y & x \end{pmatrix}_{(1, 2)} = \begin{pmatrix} f'_u(5, 2) & f'_v(5, 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde $h'_x(1, 2) = f'_u(5, 2) + 2 f'_v(5, 2)$ y $h'_y(1, 2) = 4 f'_u(5, 2) + f'_v(5, 2)$

Por otra parte, considerando las derivadas direccionales dadas:

Dado que $f'_u(5, 2) = f'((5, 2), (1, 0))$, $f'_u(5, 2) = 8$.

Como $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, f es diferenciable, entonces $f'((5, 2), (0.8, 0.6)) = 4 = \nabla f(5, 2) \cdot (0.8, 0.6)$.

Así, $\underbrace{f'_u(5, 2)}_{=8} 0.8 + f'_v(5, 2) 0.6 = 4 \Rightarrow f'_v(5, 2) = -4$.

Reemplazando estos valores obtenemos que:

$$h'_x(1, 2) = 8 + 2(-4) = 0 \text{ y } h'_y(1, 2) = 4 \cdot 8 - 4 = 28$$

Entonces $\nabla F(1, 2, z_0) = (0, 28, -1)$ y la recta normal a la superficie tiene ecuación:

$$\vec{X} = (1, 2, z_0) + \lambda(0, 28, -1) = (1, 2 + 28\lambda, z_0 - \lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Para que esta recta interseque al eje x debe existir un λ para el cual $2 + 28\lambda = 0$ y $z_0 - \lambda = 0$, lo cual se obtiene para $\lambda = -1/14$, debiendo ser $z_0 = -1/14$.

TEMA 2

1. Dada la superficie Σ de ecuación $xy^2 + yz = 0$, siendo r_A y r_B sus rectas normales en los puntos $A = (1, -1, 1)$ y $B = (-1, 1, 1)$ respectivamente, **verifique** que dichas rectas se intersectan en un punto y **halle** una ecuación para el plano que las contiene.

Denotando $F(x, y, z) = xy^2 + yz$, se cumple que:

- $F(A) = 1 - 1 = 0$ y $F(B) = -1 + 1 = 0$,
- $\nabla F(x, y, z) = (y^2, 2xy + z, y)$ es continuo en $\mathbb{R}^2$, por tener componentes polinómicas,
- $\nabla F(A) = (1, -1, -1) \neq \vec{0}$ y $\nabla F(B) = (1, -1, 1) \neq \vec{0}$.

Entonces el gradiente en cada punto permite orientar la recta normal a Σ en ese punto. De donde, las ecuaciones de las rectas son:

$$r_A: \vec{X} = A + u\nabla F(A) = (1+u, -1-u, 1-u) \text{ con } u \in \mathbb{R}$$

$$r_B: \vec{X} = B + v\nabla F(B) = (-1+v, 1-v, 1+v) \text{ con } v \in \mathbb{R}$$

Para verificar que existe el punto en común a ellas debemos encontrar el par (u, v) para el cual ambas ecuaciones generen el mismo punto. Es decir:

$$\begin{cases} 1+u = -1+v & (a) \\ -1-u = 1-v & (b) \\ 1-u = 1+v & (c) \end{cases} \quad \text{Sumando m.a.m. (a) y (c)} \rightarrow 2 = 2v \Rightarrow v = 1 \xrightarrow{(c)} u = -1.$$

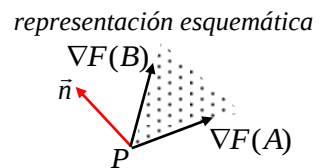
Se comprueba que con $u = -1$, $P = (0, 0, 2) \in r_A$ y con $v = 1$, $P = (0, 0, 2) \in r_B$, luego:

El punto común a ambas rectas es $P = (0, 0, 2)$.

Por otra parte, $\vec{n} = \nabla F(A) \times \nabla F(B) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -2, 0)$ es normal

al plano, entonces una ecuación para el plano pedido es:

$$((x, y, z) - (0, 0, 2)) \cdot (-2, -2, 0) = 0, \text{ es decir, } \boxed{x + y = 0}.$$



2. Dada $f(x, y) = \frac{\sqrt{xy - y^3}}{x + y^2 - 2}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D e **indique** un ejemplo de punto interior a D y dos de puntos frontera de D (uno perteneciente y otro que no pertenezca a D).

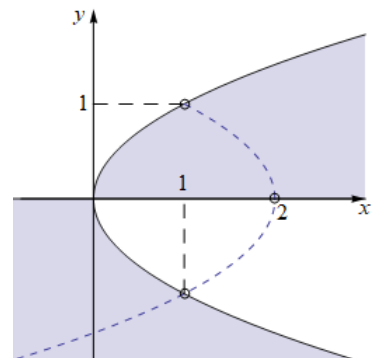
Los puntos (x, y) pertenecientes a D deben cumplir con:

- $xy - y^3 \geq 0 \Leftrightarrow y(x - y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (y \geq 0 \wedge x \geq y^2) \vee (y \leq 0 \wedge x \leq y^2)$
- $x + y^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 - y^2$

Entonces

$$\boxed{D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 2 - y^2 \wedge ((y \geq 0 \wedge x \geq y^2) \vee (y \leq 0 \wedge x \leq y^2))\}}$$

que se representa sombreado en la figura de la derecha.



Un punto interior es el $(2, 1)$, dos puntos frontera son: $(1, 0) \in D$ y $(2, 0) \notin D$.

3. La curva de ecuación $v = f(u)$, en el plano uv , tiene recta tangente de ecuación $3u + v = 8$ en el punto $(2, v_0)$. Siendo $h(x, y) = xy^2 + f(xy)$, **calcule** aproximadamente $h(2.03, 0.98)$ mediante una aproximación lineal.

Considerando el punto $(x_0, y_0) = (2, 1)$, la aproximación lineal en un entorno de $(2, 1)$ se obtiene con:

$$h(x, y) \cong h(2, 1) + h'_x(2, 1)(x - 2) + h'_y(2, 1)(y - 1)$$

donde:

- $h(2, 1) = 2 + f(2)$,
- $h'_x(2, 1) = [y^2 + f'(xy)y]_{(2, 1)} = 1 + f'(2)$,
- $h'_y(2, 1) = [2xy + f'(xy)x]_{(2, 1)} = 4 + 2f'(2)$.

Por otra parte, considerando la curva de ecuación $v = f(u)$ mencionada en el enunciado:

Siendo la ecuación de la recta tangente $v = -3u + 8$, dado que la curva y su recta tangente deben compartir el punto de tangencia, $v_0 = -3 \cdot 2 + 8$, entonces $v_0 = f(2) = 2$ y la pendiente de la recta es $f'(2) = -3$. Con lo cual, reemplazando, resultan:

$$h(2, 1) = 2 + 2 = 4, \quad h'_x(2, 1) = 1 - 3 = -2, \quad h'_y(2, 1) = 4 - 6 = -2.$$

Así, la expresión para la aproximación pedida queda $h(x, y) \cong 4 - 2(x - 2) - 2(y - 1)$, de donde:

$$\boxed{h(2.03, 0.98) \cong 4 - 2(2.03 - 2) - 2(0.98 - 1) = 3.98}.$$

Nota: la aproximación lineal realizada es posible pues h es diferenciable por ser suma de un polinomio + la composición de un polinomio con f . La función f , por ser función de una variable, al ser derivable es diferenciable.

4. **Halle** el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x, y) = xy^2 + x^3 - 3x$ en puntos del círculo definido por $x^2 + y^2 \leq 9/4$, **indique** en qué puntos se producen dichos extremos.

Analizamos primero en el interior del círculo ($x^2 + y^2 < 9/4$), con $f \in C^2$ por ser polinómica.

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = y^2 + 3x^2 - 3 \\ f'_y(x, y) = 2xy \end{cases} \text{ Puntos críticos: } \begin{cases} y^2 + 3x^2 - 3 = 0 \quad (*) \\ 2xy = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

$y = 0 \xrightarrow{(*)} x^2 = 1 \rightarrow x = -1 \vee x = 1 \rightarrow (-1, 0) \text{ y } (1, 0)$ ambos interiores al círculo.

$x = 0 \xrightarrow{(*)} y^2 = 3 \rightarrow y = -\sqrt{3} \vee y = \sqrt{3} \rightarrow (0, -\sqrt{3}) \text{ y } (0, \sqrt{3})$, que se descartan del análisis porque son exteriores al círculo.

	$(-1, 0)$	$(1, 0)$
$f''_{xx}(x, y) = 6x$	-6	6
$f''_{xy}(x, y) = 2y$	0	0
$f''_{yy}(x, y) = 2x$	-2	2

$$H(-1, 0) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 12 > 0, \quad f''_{xx}(-1, 0) = -6 < 0.$$

$$H(1, 0) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0, \quad f''_{xx}(1, 0) = 6 > 0.$$

$f(-1, 0) = 2$ es máximo local y $f(1, 0) = -2$ es mínimo local.

Ahora analizamos en la frontera ($x^2 + y^2 = 9/4$)

Dado que $f(x, y) = (x^2 + y^2)x - 3x$, en puntos de la frontera vale $\frac{9}{4}x - 3x = -\frac{3}{4}x$.

Es decir, analizar $g(x) = -\frac{3}{4}x$ con $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$. Como esta función es estrictamente decreciente, en la frontera resulta $g(3/2) = f(3/2, 0) = -9/8$ mínimo y $g(-3/2) = f(-3/2, 0) = 9/8$ máximo.

Comparando los extremos en el interior y la frontera se concluye que, en puntos del círculo dado:

$$\boxed{f(1, 0) = -2 \text{ es el mínimo absoluto y } f(-1, 0) = 2 \text{ es el máximo absoluto.}}$$

5. Siendo $z = f(u, v)$ con $(u, v) = (x^2 + y, xy)$, resulta $z = h(x, y)$. Sabiendo que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y que las derivadas direccionales $f'((5, 2), (1, 0)) = 6$ y $f'((5, 2), (0.8, 0.6)) = 9$, **calcule** el valor que debe tener z_0 para que la recta normal a la superficie de ecuación $z = h(x, y)$ en el punto $(2, 1, z_0)$ tenga un punto en común con el eje x .

Denotando $\vec{g}(x, y) = (x^2 + y, xy)$ es claro que $h(x, y) = f(\vec{g}(x, y))$, donde h es diferenciable pues $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $\vec{g}$ tiene componentes polinómicas.

Siendo $z = h(x, y)$, $h(x, y) - z = 0$. Denotando $F(x, y, z) = h(x, y) - z$, se cumple que:

- $F(2, 1, z_0) = h(2, 1) - z_0 = 0$ dado que, por enunciado, el punto $(2, 1, z_0)$ pertenece a la superficie.
- F es diferenciable pues h lo es,
- $\nabla F(2, 1, z_0) = (h'_x(2, 1), h'_y(2, 1), -1) \neq \vec{0}$.

Con lo cual $\nabla F(2, 1, z_0)$ permite orientar la recta normal a la superficie en $(2, 1, z_0)$.

Aplicando ahora la regla de la cadena y suponiendo que f es función de las variables u y v :

$$Dh(2, 1) = \begin{pmatrix} h'_x(2, 1) & h'_y(2, 1) \end{pmatrix} = Df(\vec{g}(2, 1)) D(\vec{g}(2, 1))$$

$$\begin{pmatrix} h'_x(2, 1) & h'_y(2, 1) \end{pmatrix} = Df(5, 2) \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y & x \end{pmatrix}_{(2, 1)} = \begin{pmatrix} f'_u(5, 2) & f'_v(5, 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de donde $h'_x(2, 1) = 4 f'_u(5, 2) + f'_v(5, 2)$ y $h'_y(2, 1) = f'_u(5, 2) + 2 f'_v(5, 2)$

Por otra parte, considerando las derivadas direccionales dadas:

Dado que $f'_u(5, 2) = f'((5, 2), (1, 0))$, $f'_u(5, 2) = 6$.

Como $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, f es diferenciable, entonces $f'((5, 2), (0.8, 0.6)) = 9 = \nabla f(5, 2) \cdot (0.8, 0.6)$.

Así, $\underbrace{f'_u(5, 2)}_{=6} 0.8 + f'_v(5, 2) 0.6 = 9 \Rightarrow f'_v(5, 2) = 7$.

Reemplazando estos valores obtenemos que:

$$h'_x(2, 1) = 4 \cdot 6 + 7 = 31 \text{ y } h'_y(2, 1) = 6 + 2 \cdot 7 = 20$$

Entonces $\nabla F(2, 1, z_0) = (31, 20, -1)$ y la recta normal a la superficie tiene ecuación:

$$\vec{X} = (2, 1, z_0) + \lambda(31, 20, -1) = (2 + 31\lambda, 1 + 20\lambda, z_0 - \lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Para que esta recta interseque al eje x debe existir un λ para el cual $1 + 20\lambda = 0$ y $z_0 - \lambda = 0$, lo cual se obtiene para $\lambda = -1/20$, debiendo ser $z_0 = -1/20$.