

TEMA 1

1. Dada la superficie Σ de ecuación $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 8$, **halle** los puntos de Σ en los que el plano tangente es horizontal (paralelo al plano xy) y **analice** en cuáles de dichos puntos el valor de f es un extremo local **indicando**, en ese caso, si es máximo o mínimo local.

Siendo f polinómica es C^2 , con lo cual comenzamos buscando los puntos estacionarios (puntos en que ∇f es nulo).

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= xy + x \\ f'_y(x, y) &= \frac{1}{2}x^2 + 2y \end{aligned} \quad \text{Ptos. estacionarios: } \begin{cases} xy + x = 0 & \rightarrow x(y+1) = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = -1 \\ \frac{1}{2}x^2 + 2y = 0 & (*) \end{cases}$$

$$x = 0 \xrightarrow{(*)} 2y = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow A = (0, 0).$$

$$y = -1 \xrightarrow{(*)} \frac{1}{2}x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = -2 \vee x = 2 \rightarrow B = (-2, -1) \text{ y } C = (2, -1).$$

A, B y C son los puntos estacionarios. Siendo $f(0, 0) = 8$, $f(-2, -1) = 9$ y $f(2, -1) = 9$.

Los puntos de Σ donde el plano tangente es horizontal son: $(0, 0, 8)$, $(-2, -1, 9)$ y $(2, -1, 9)$.

Análisis de extremos locales:

Derivadas de 2º orden	$A = (0, 0)$	$B = (-2, -1)$	$C = (2, -1)$
$f''_{xx}(x, y) = y + 1$	1	0	0
$f''_{xy}(x, y) = x$	0	-2	2
$f''_{yy}(x, y) = 2$	2	2	2

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0 \Rightarrow f(0, 0) = 8 \text{ es extremo local. Como } f''_{xx}(0, 0) = 1 > 0, \text{ es mínimo local.}$$

$$H(-2, -1) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \boxed{f(-2, -1) \text{ no es extremo local.}}$$

$$H(2, -1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \boxed{f(2, -1) \text{ no es extremo local.}}$$

2. Sea la curva C incluida en la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (u + v, u - v, u + v + 2(u - v)^2)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que la proyección de C sobre el plano xy tiene ecuación $x + y = 1$, **analice** si la recta tangente a C en $(2, -1, 4)$ tiene algún punto en común con el plano xz .

De la ecuación vectorial de Σ surge que su ecuación cartesiana es: $z = x + 2y^2$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces una ecuación vectorial para la curva C es $\vec{X} = \underbrace{(x, 1 - x, x + 2(1 - x)^2)}_{\vec{g}(x)}$ con $x \in \mathbb{R}$.

Siendo $\vec{g}(2) = (2, -1, 4)$ y $\vec{g}'(2) = (1, -1, 1 - 4(1 - x))|_{x=2} = (1, -1, 5)$, una ecuación para la recta tangente a C en $(2, -1, 4)$ es:

$$\vec{X} = (2, -1, 4) + \lambda(1, -1, 5) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{X} = (2 + \lambda, -1 - \lambda, 4 + 5\lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Dado que el plano xz tiene ecuación $y = 0$, la recta tendrá un punto en común con él si existe λ para el que $-1 - \lambda = 0$. Como esto se logra con $\lambda = -1$, reemplazando en la ecuación de la recta resulta el punto $(1, 0, -1)$. Respuesta: La recta tiene en común el punto $(1, 0, -1)$ con el plano xz .

3. Siendo $f(x, y) = 2x^2 e^{3y+x-5}$, **calcule** una aproximación de $f(1.98, 1.01)$ con Taylor de 2º orden. Considerando el punto $A = (2, 1)$, los valores de f se aproximan por Taylor de 2º orden en un entorno de A mediante $f(x, y) \cong f(A) + df(A, X - A) + \frac{1}{2} d^2 f(A, X - A)$,

donde con $X = (x, y)$ y $A = (2, 1)$ resulta $X - A = (x - 2, y - 1)$,

siendo $d^i f(A, X - A) = \left[\frac{\partial}{\partial x} (x - 2) + \frac{\partial}{\partial y} (y - 1) \right]_{f(A)}^{(i)}$ con $i = 1, 2$.

Con lo cual queda:

$$f(x, y) \cong f(A) + f'_x(A)(x - 2) + f'_y(A)(y - 1) + \frac{1}{2} \{ f''_{xx}(A)(x - 2)^2 + 2 f''_{xy}(A)(x - 2)(y - 1) + f''_{yy}(A)(y - 1)^2 \}$$

$$f(A) = 8$$

$$f'_x(A) = \left[4x e^{3y+x-5} + 2x^2 e^{3y+x-5} \right]_A = 16, \quad f'_y(A) = \left[2x^2 e^{3y+x-5} 3 \right]_A = 24$$

$$f''_{xx}(A) = \left[(4 + 4x) e^{3y+x-5} + (4x + 2x^2) e^{3y+x-5} \right]_A = 28$$

$$f''_{xy}(A) = \left[(4x + 2x^2) e^{3y+x-5} 3 \right]_A = 48, \quad f''_{yy}(A) = \left[6x^2 e^{3y+x-5} 3 \right]_A = 72$$

Con lo cual, en un entorno de $A = (2, 1)$, resulta:

$$f(x, y) \cong 8 + 16(x - 2) + 24(y - 1) + 14(x - 2)^2 + 48(x - 2)(y - 1) + 36(y - 1)^2$$

$$f(1.98, 1.01) \cong 8 + 16(-0.02) + 24(0.01) + 14(-0.02)^2 + 48(-0.02)(0.01) + 36(0.01)^2$$

$$\boxed{f(1.98, 1.01) \cong 7.9196}$$

4. Dada $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / f(x, y) = \ln(x + y^2)$ definida en su dominio natural D , **determine y grafique** D y el conjunto de puntos M de la curva de ecuación $x = y^2 - 2$ donde f queda definida.

Los puntos de D son aquellos para los cuales $x + y^2 > 0$.

Es decir,

$$\boxed{D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > -y^2\}},$$

que se representa sombreado en el gráfico de la derecha.

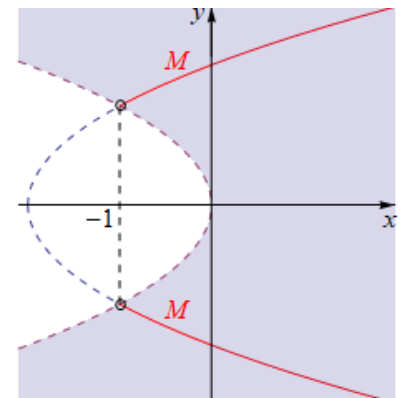
Por su parte, el conjunto M es el de los puntos de la curva de ecuación $x = y^2 - 2$ que pertenecen a D .

Veamos en qué puntos se intersecan la frontera de D y esta curva:

$$\begin{cases} x = -y^2 \\ x = y^2 - 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = -y^2 \\ -y^2 = y^2 - 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = -y^2 \\ y^2 = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y^2 = 1 \end{cases}. \text{ Los puntos son } (-1, -1) \text{ y } (-1, 1).$$

En el gráfico se representa el conjunto M en color rojo, como M debe estar incluido en D , resulta:

$$\boxed{M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y^2 - 2 \wedge x > -1\}}$$



5. Dada $z = u + v^2 u^3$ con $\begin{cases} u = x^2 + y \\ v = f(x, y) \end{cases}$, resulta $z = h(x, y)$. Sabiendo que f queda definida en forma implícita mediante la ecuación $xv + \ln(yv - 1) - 1 = 0$ en un entorno de $(x_0, y_0) = (1, 2)$, **halle** una ecuación para la recta normal a la superficie $z = h(x, y)$ en el punto $(1, 2, z_0)$.

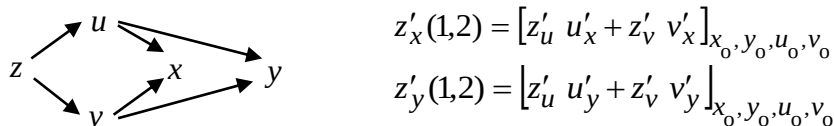
Siendo $(x_0, y_0) = (1, 2) \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = f(1, 2) \end{cases}$ donde $1v_0 + \ln(2v_0 - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow v_0 = 1$, con lo cual resulta $z_0 = 3 + 1^2 3^3 = 30$.

Expresando ahora la ecuación de la superficie en forma implícita tenemos:

$$\underbrace{h(x, y) - z}_{F(x, y, z)} = 0$$

Con lo cual un vector normal a la superficie en $(1, 2, 30)$ es $\vec{n}_0 = \nabla F(1, 2, 30)$. Una vez obtenido este vector, una ecuación para la recta normal pedida es $\vec{X} = (1, 2, 30) + \lambda \vec{n}_0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ (*).

$\vec{n}_0 = \nabla F(1, 2, 30) = (h'_x(1, 2), h'_y(1, 2), -1) = (z'_x(1, 2), z'_y(1, 2), -1)$, que se puede calcular observando la red de dependencia funcional que se representa:



Denotando $G(x, y, v) = xv + \ln(yv - 1) - 1$, se observa que:

- $G(1, 2, 1) = 0$.
- $\nabla G(x, y, v) = (v, \frac{v}{yv-1}, x + \frac{y}{yv-1})$ es continuo en entorno de (x_0, y_0, v_0) por tener componentes continuas (polinomios, cociente de polinomios con denominador no nulo, o suma de ambas).
- $G'_v(1, 2, 1) = 3 \neq 0$.

Con lo cual la ecuación $xv + \ln(yv - 1) - 1 = 0$ define $v = f(x, y)$ en entorno de $(1, 2)$ con f diferenciable en $(1, 2)$, resultando: $v'_x(1, 2) = -\frac{G'_x(1, 2, 1)}{G'_v(1, 2, 1)} = -\frac{1}{3}$, $v'_y(1, 2) = -\frac{G'_y(1, 2, 1)}{G'_v(1, 2, 1)} = -\frac{1}{3}$.

Las otras derivadas son directas:

$$z'_u(u_0, v_0) = [1 + 3v^2 u^2]_{u=3, v=1} = 28, \quad z'_v(u_0, v_0) = [2vu^3]_{u=3, v=1} = 54,$$

$$u'_x(x_0, y_0) = [2x]_{x=1, y=2} = 2, \quad u'_y(x_0, y_0) = [1]_{x=1, y=2} = 1.$$

Entonces
$$\begin{aligned} z'_x(1, 2) &= 28 \cdot 2 + 54 \cdot (-1/3) = 38 \\ z'_y(1, 2) &= 28 \cdot 1 + 54 \cdot (-1/3) = 10 \end{aligned}$$

Reemplazando en (*) resulta $\vec{X} = (1, 2, 30) + \lambda(38, 10, -1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Respuesta: Una ecuación para la recta normal pedida es $\vec{X} = (1 + 38\lambda, 2 + 10\lambda, 30 - \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nota: La obtención de $\vec{n}_0$ es válida pues h es diferenciable por composición de funciones diferenciables (polinomios y la función f que es diferenciable, y por lo tanto también $v^2 = f^2$) en el punto $(1, 2)$.

TEMA 2

1. Dada la superficie Σ de ecuación $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde $f(x, y) = \frac{1}{2}y^2x + \frac{1}{2}y^2 + x^2 + 8$, **halle** los puntos de Σ en los que el plano tangente es horizontal (paralelo al plano xy) y **analice** en cuáles de dichos puntos el valor de f es un extremo local **indicando**, en ese caso, si es máximo o mínimo local.

Siendo f polinómica es C^2 , con lo cual comenzamos buscando los puntos estacionarios (puntos en que ∇f es nulo).

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + 2x \quad \text{Ptos. estacionarios: } \begin{cases} \frac{1}{2}y^2 + 2x = 0 & (*) \\ xy + y = 0 & \rightarrow y(x+1) = 0 \rightarrow y = 0 \vee x = -1 \end{cases}$$

$$y = 0 \xrightarrow{(*)} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow A = (0, 0).$$

$$x = -1 \xrightarrow{(*)} \frac{1}{2}y^2 - 2 = 0 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = -2 \vee y = 2 \rightarrow B = (-1, -2) \text{ y } C = (-1, 2).$$

A, B y C son los puntos estacionarios. Siendo $f(0, 0) = 8$, $f(-1, -2) = 9$ y $f(-1, 2) = 9$.

Los puntos de Σ donde el plano tangente es horizontal son: $(0, 0, 8)$, $(-1, -2, 9)$ y $(-1, 2, 9)$.

Análisis de extremos locales:

Derivadas de 2º orden	$A = (0, 0)$	$B = (-1, -2)$	$C = (-1, 2)$
$f''_{xx}(x, y) = 2$	2	2	2
$f''_{xy}(x, y) = y$	0	-2	2
$f''_{yy}(x, y) = x + 1$	1	0	0

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0 \Rightarrow f(0, 0) = 8 \text{ es extremo local. Como } f''_{xx}(0, 0) = 2 > 0, \text{ es mínimo local.}$$

$$H(-1, -2) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \boxed{f(-1, -2) \text{ no es extremo local.}}$$

$$H(-1, 2) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \boxed{f(-1, 2) \text{ no es extremo local.}}$$

2. Sea la curva C incluida en la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (u - v, u + v, u - v + 2(u + v)^2)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que la proyección de C sobre el plano xy tiene ecuación $x + y = 1$, **analice** si la recta tangente a C en $(-1, 2, 7)$ tiene algún punto en común con el plano yz .

De la ecuación vectorial de Σ surge que su ecuación cartesiana es: $z = x + 2y^2$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces una ecuación vectorial para la curva C es $\vec{X} = \underbrace{(x, 1 - x, x + 2(1 - x)^2)}_{\vec{g}(x)}$ con $x \in \mathbb{R}$.

Siendo $\vec{g}(-1) = (-1, 2, 7)$ y $\vec{g}'(-1) = (1, -1, 1 - 4(1 - x))|_{x=-1} = (1, -1, -7)$, una ecuación para la recta tangente a C en $(-1, 2, 7)$ es:

$$\vec{X} = (-1, 2, 7) + \lambda(1, -1, -7) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{X} = (-1 + \lambda, 2 - \lambda, 7 - 7\lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Dado que el plano yz tiene ecuación $x = 0$, la recta tendrá un punto en común con él si existe λ para el que $-1 + \lambda = 0$. Como esto se logra con $\lambda = 1$, reemplazando en la ecuación de la recta resulta el punto $(0, 1, 0)$. Respuesta: La recta tiene en común el punto $(0, 1, 0)$ con el plano yz .

3. Siendo $f(x, y) = 2y^2 e^{3x+y-5}$, **calcule** una aproximación de $f(1.01, 1.98)$ con Taylor de 2º orden. Considerando el punto $A = (1, 2)$, los valores de f se aproximan por Taylor de 2º orden en un entorno de A mediante $f(x, y) \cong f(A) + df(A, X - A) + \frac{1}{2} d^2 f(A, X - A)$,

donde con $X = (x, y)$ y $A = (1, 2)$ resulta $X - A = (x-1, y-2)$,

siendo $d^i f(A, X - A) = \left[\frac{\partial}{\partial x} (x-1) + \frac{\partial}{\partial y} (y-2) \right]_{f(A)}^{(i)}$ con $i = 1, 2$.

Con lo cual queda:

$$f(x, y) \cong f(A) + f'_x(A)(x-1) + f'_y(A)(y-2) + \frac{1}{2} \{ f''_{xx}(A)(x-1)^2 + 2 f''_{xy}(A)(x-1)(y-2) + f''_{yy}(A)(y-2)^2 \}$$

$$f(A) = 8$$

$$f'_x(A) = \left[2y^2 e^{3x+y-5} 3 \right]_A = 24, \quad f'_y(A) = \left[4ye^{3x+y-5} + 2y^2 e^{3x+y-5} \right]_A = 16$$

$$f''_{xx}(A) = \left[6y^2 e^{3x+y-5} 3 \right]_A = 72, \quad f''_{xy}(A) = \left[(12y + 6y^2) e^{3x+y-5} \right]_A = 48$$

$$f''_{yy}(A) = \left[(4 + 4y) e^{3x+y-5} + (4y + 2y^2) e^{3x+y-5} \right]_A = 28$$

Con lo cual, en un entorno de $A = (1, 2)$, resulta:

$$f(x, y) \cong 8 + 24(x-1) + 16(y-2) + 36(x-1)^2 + 48(x-1)(y-2) + 14(y-2)^2$$

$$f(1.01, 1.98) \cong 8 + 24(0.01) + 16(-0.02) + 36(0.01)^2 + 48(0.01)(-0.02) + 14(-0.02)^2$$

$$\boxed{f(1.01, 1.98) \cong 7.9196}$$

4. Dada $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / f(x, y) = \ln(y + x^2)$ definida en su dominio natural D , **determine** y **grifique** D y el conjunto de puntos M de la curva de ecuación $y = x^2 - 2$ donde f queda definida.

Los puntos de D son aquellos para los cuales $y + x^2 > 0$.

Es decir,

$$\boxed{D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > -x^2\}},$$

que se representa sombreado en el gráfico de la derecha.

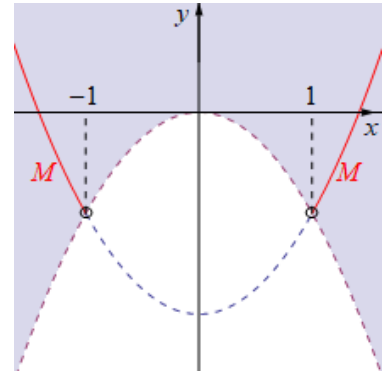
Por su parte, el conjunto M es el de los puntos de la curva de ecuación $y = x^2 - 2$ que pertenecen a D .

Veamos en qué puntos se intersecan la frontera de D y esta curva:

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = x^2 - 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} y = -x^2 \\ -x^2 = x^2 - 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} y = -x^2 \\ x^2 = 1 \end{cases} \equiv \begin{cases} y = -1 \\ x^2 = 1 \end{cases}. \text{ Los puntos son } (-1, -1) \text{ y } (1, -1).$$

En el gráfico se representa el conjunto M en color rojo, como M debe estar incluido en D , resulta:

$$\boxed{M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2 - 2 \wedge y > -1\}}$$



5. Dada $z = v + u^2 v^3$ con $\begin{cases} u = f(x, y) \\ v = x^2 + y \end{cases}$, resulta $z = h(x, y)$. Sabiendo que f queda definida en forma implícita mediante la ecuación $xu + \ln(yu - 1) - 1 = 0$ en un entorno de $(x_0, y_0) = (1, 2)$, **halle** una ecuación para la recta normal a la superficie $z = h(x, y)$ en el punto $(1, 2, z_0)$.

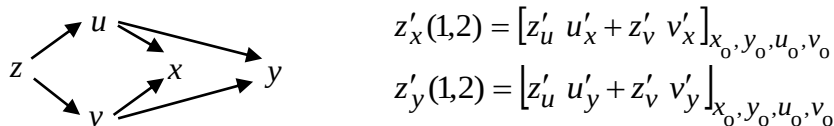
Siendo $(x_0, y_0) = (1, 2) \Rightarrow \begin{cases} u_0 = f(1, 2) \\ v_0 = 3 \end{cases}$ donde $1u_0 + \ln(2u_0 - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow u_0 = 1$, con lo cual resulta $z_0 = 3 + 1^2 3^3 = 30$.

Expresando ahora la ecuación de la superficie en forma implícita tenemos:

$$\underbrace{h(x, y) - z}_{F(x, y, z)} = 0$$

Con lo cual un vector normal a la superficie en $(1, 2, 30)$ es $\vec{n}_0 = \nabla F(1, 2, 30)$. Una vez obtenido este vector, una ecuación para la recta normal pedida es $\vec{X} = (1, 2, 30) + \lambda \vec{n}_0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ (*).

$\vec{n}_0 = \nabla F(1, 2, 30) = (h'_x(1, 2), h'_y(1, 2), -1) = (z'_x(1, 2), z'_y(1, 2), -1)$, que se puede calcular observando la red de dependencia funcional que se representa:



Denotando $G(x, y, u) = xu + \ln(yu - 1) - 1$, se observa que:

- $G(1, 2, 1) = 0$.
- $\nabla G(x, y, u) = (u, \frac{u}{yu-1}, x + \frac{y}{yu-1})$ es continuo en entorno de (x_0, y_0, v_0) por tener componentes continuas (polinomios, cociente de polinomios con denominador no nulo, o suma de ambas).
- $G'_u(1, 2, 1) = 3 \neq 0$.

Con lo cual la ecuación $xu + \ln(yu - 1) - 1 = 0$ define $u = f(x, y)$ en entorno de $(1, 2)$ con f diferenciable en $(1, 2)$, resultando: $u'_x(1, 2) = -\frac{G'_x(1, 2, 1)}{G'_u(1, 2, 1)} = -\frac{1}{3}$, $u'_y(1, 2) = -\frac{G'_y(1, 2, 1)}{G'_u(1, 2, 1)} = -\frac{1}{3}$.

Las otras derivadas son directas:

$$\begin{aligned} z'_u(u_0, v_0) &= [2uv^3]_{u=1, v=3} = 54, \quad z'_v(u_0, v_0) = [1 + 3u^2v^2]_{u=1, v=3} = 28, \\ v'_x(x_0, y_0) &= [2x]_{x=1, y=2} = 2, \quad v'_y(x_0, y_0) = [1]_{x=1, y=2} = 1. \end{aligned}$$

Entonces
$$\begin{aligned} z'_x(1, 2) &= 54(-1/3) + 28 \cdot 2 = 38 \\ z'_y(1, 2) &= 54(-1/3) + 28 \cdot 1 = 10 \end{aligned}$$

Reemplazando en (*) resulta $\vec{X} = (1, 2, 30) + \lambda(38, 10, -1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Respuesta: Una ecuación para la recta normal pedida es $\vec{X} = (1 + 38\lambda, 2 + 10\lambda, 30 - \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nota: La obtención de $\vec{n}_0$ es válida pues h es diferenciable por composición de funciones diferenciables (polinomios y la función f que es diferenciable, y por lo tanto también $u^2 = f^2$) en el punto $(1, 2)$.