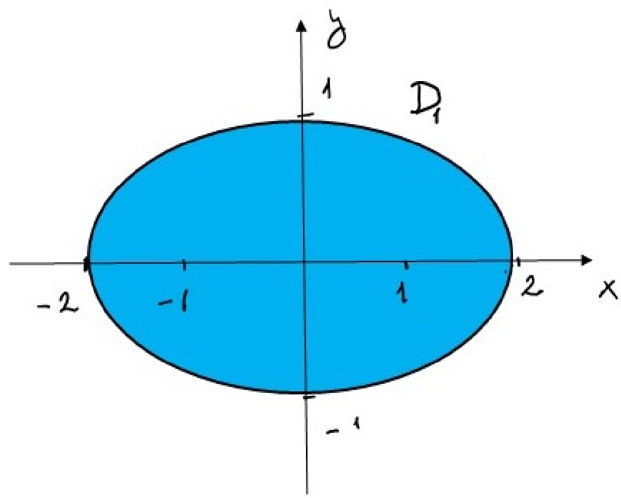
Un resolución explicada[1]

Tema 1

- **Ejercicio 1.** Sea
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2-4y^2}}{x^2-y^2},$$
y sea D el dominio natural de f. Grafique D, ∂D y el interior de D.

Solución:

El dominio natural de f es el conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ formado por los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ para los cuales es posible efectuar las operaciones que definen $f(x,y)$. Entonces $(x,y) \in D$ si y solo si
$$4-x^2-4y^2 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2-y^2 \neq 0.$$
Si llamamos $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 4-x^2-4y^2 \geq 0\}$ y $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2-y^2 \neq 0\}$, tenemos que $D = D_1 \cap D_2$. Como $4-x^2-4y^2 \geq 0$ si y solo si $\frac{x^2}{2^2}+y^2 \leq 1$, resulta que D_1 es una elipse centrada en el origen con ejes paralelos a los ejes coordenados junto con su interior.

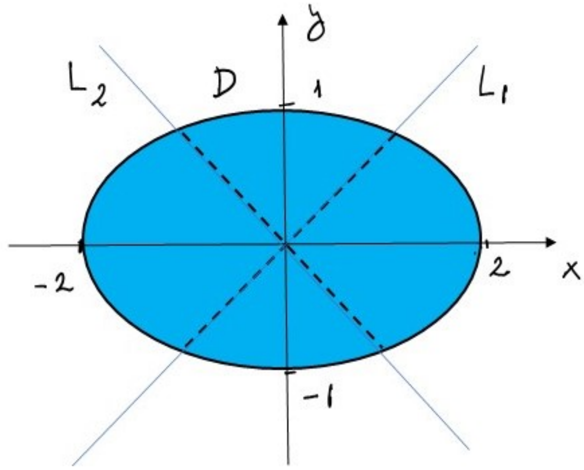


Respecto de D_2, su complemento $D_2^c = \mathbb{R}^2 - D_2$ está compuesto por los puntos (x,y) tales que $x^2-y^2=0$. Como $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, tenemos que
$$x^2-y^2=0 \iff (x-y)(x+y)=0 \iff x-y=0 \ \vee \ x+y=0.$$
Por lo tanto D_2^c es la unión de las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones, respectivamente, $y=x$ e $y=-x$. Entonces
$$D_2 = \mathbb{R}^2 - (L_1 \cup L_2)$$

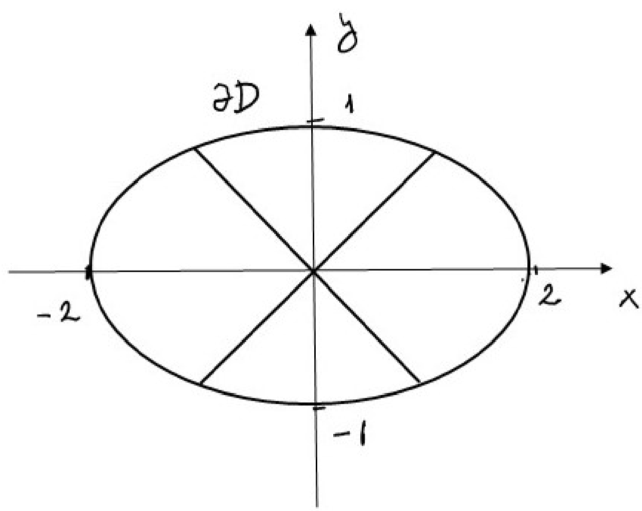
[1] Por J.L. Mancilla Aguilar, con la colaboración de M.E. di Iorio, M. Maulhardt, S. Gigola y E. Zitto.

y, en consecuencia, el conjunto D es $D = D_1 - (L_1 \cup L_2)$, cuya expresión analítica es

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{2^2} + y^2 \leq 1 \ \wedge \ y \neq x \ \wedge \ y \neq -x \right\}.$$

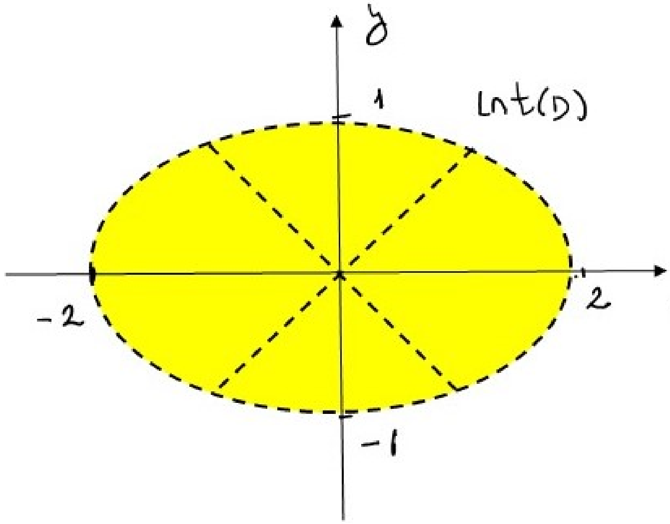


La frontera de D es entonces el conjunto ∂D cuyo gráfico se muestra a continuación.



Note que los puntos de las rectas L_1 y L_2 que se encuentran en D_1 forman parte de la frontera de D pues no pertenecen a D pero cualquier entorno de ellos contiene puntos de D, en otras palabras, cumplen con la definición de punto frontera de D, que es que cualquier entorno de un punto frontera debe contener puntos tanto de D como del complemento de D.

Finalmente, el interior de D es $\text{int}(D) = D - \partial D$ y tiene el gráfico siguiente:



- **Ejercicio 2.** Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 \leq 4\}$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2+3x+y^2$. Justifique la existencia de extremos absolutos para f y hállelos, indicando en qué puntos de D se producen.

  Solución:

  El conjunto D es el círculo de radio 2 centrado en el punto $(-1, 0)$, el cual es un conjunto cerrado y acotado y, por ende, compacto. La función f es continua en D pues es polinómica. Entonces, debido al teorema de Weierstrass f alcanza un máximo y un mínimo absolutos en D.

  Una vez justificada la existencia de los extremos absolutos, procedemos a buscar los puntos de D que son candidatos a producir extremo. Tanto el máximo como el mínimo podrían producirse en el interior o en la frontera de D. En caso de que un extremo se alcance en el interior de D, entonces en el punto en el cual éste se produce también f alcanza un extremo relativo y, en consecuencia, ese punto debe ser un punto crítico de f. Comenzamos entonces buscando los puntos del interior de D (que llamaremos U) que son puntos críticos de f. Como f es de clase $\mathcal{C}^1$ en U por ser polinómica, los puntos críticos deben cumplir que $\nabla f(x, y) = \vec{0}$. Como

  $$\nabla f(x, y) = \vec{0} \iff f'_x(x, y) = 2x + 3 = 0 \ \wedge \ f'_y(x, y) = 2y = 0 \iff x = -\frac{3}{2} \ \wedge \ y = 0,$$

  hay un único punto crítico de f en U, que es $P_1 = (-3/2, 0)$. Note que $P_1 \in U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + y^2 < 4\}$.

  En caso de que un extremo se alcance en la frontera $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x + 1)^2 + y^2 = 4\}$, los puntos en los cuales éste se produce se encuentran entre aquellos en los cuales la función f restringida a ∂D alcanza un extremo absoluto. Buscamos entonces los puntos de ∂D en los cuales podría producirse un extremo de f cuando se toma como dominio de la función al conjunto ∂D.

  Como ∂D admite la parametrización $(x, y) = \vec{\sigma}(t) = (2\cos(t) - 1, 2\text{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, analizamos la función $h = f \circ \vec{\sigma}$, es decir:

$$\begin{aligned} h(t) &= f(2\cos(t) - 1, 2\operatorname{sen}(t)) \\ &= (2\cos(t) - 1)^2 + 3(2\cos(t) - 1) + 4\operatorname{sen}^2(t) \\ &= 2 + 2\cos(t) \end{aligned}$$

sobre el intervalo $[0, 2\pi]$, pues los valores máximo y mínimo de h sobre $[0, 2\pi]$ coinciden, respectivamente, con los valores máximo y mínimo de f sobre ∂D y, además, h alcanza un extremo en $t \in [0, 2\pi]$ si y solo si f alcanza un extremo en $P = \vec{\sigma}(t) \in \partial D$.

Como h es derivable en $(0, 2\pi)$ los extremos absolutos de h solo podrían alcanzarse en $t = 0$, $t = 2\pi$, o en los puntos $t \in (0, 2\pi)$ tales que $h'(t) = 0$. Como $h'(t) = -2\operatorname{sen}(t)$, $h'(t) = 0$ si y solo si $t = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, el único punto de $(0, 2\pi)$ donde se anula la derivada de h es $t = \pi$. Resumiendo, los puntos de $[0, 2\pi]$ en los cuales podría producirse un extremo de h son $t_a = 0$, $t_b = \pi$ y $t_c = 2\pi$. En consecuencia, los puntos de ∂D en los cuales podría producirse un extremo de f restringida a ∂D son:

$$P_2 = \vec{\sigma}(t_a) = (1, 0), \quad P_3 = \vec{\sigma}(t_b) = (-3, 0), \qquad P_4 = \vec{\sigma}(t_c) = (1, 0) = P_2.$$

Teniendo en cuenta el análisis en el interior y en la frontera de D, llegamos a la conclusión que los candidatos a ser puntos en los cuales f alcanza un extremo absoluto son P_1, P_2 y P_3.

Como $f(P_1) = f(-3/2, 0) = -9/4$, $f(P_2) = 4$ y $f(P_3) = 0$, concluimos que

$$\boxed{\text{máx}(f) = 4 \text{ y se alcanza en } P_2} \quad \boxed{\text{mín}(f) = -9/4 \text{ y se alcanza en } P_1}$$

Proponemos al lector que grafique los conjuntos de nivel de f en D, para visualizar los puntos donde f restringido al dominio D alcanza sus extremos de absolutos.

- **Ejercicio 3.** Sea C la curva incluida en la superficie Σ de ecuación $xy + z = 0$ cuya proyección sobre el plano xy satisface la ecuación $x^2 + y^2 = 2$. Halle todos los puntos de la curva en los cuales la recta tangente resulta paralela al plano xy.

  Solución:

  Los puntos de la curva C satisfacen la ecuación de la superficie Σ y también la ecuación $x^2 + y^2 = 2$ ya que si $(x, y, z) \in C$, su proyección sobre el plano xy es $(x, y, 0)$. Luego C es la intersección de la superficie Σ con el cilindro Σ^* de ecuación $x^2 + y^2 = 2$. En otras palabras, C está definida por la ecuaciones cartesianas:

$$C : \begin{cases} xy + z = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} . \tag{1}$$

  Sean $f_1(x, y, z) = xy + z$ y $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2$. Ambas funciones son de clase $\mathcal{C}^1$ y, en consecuencia, diferenciables. Por lo tanto, en aquellos puntos $(x, y, z) \in C$ en los cuales

$\vec{T} = \nabla f_1(x, y, z) \times \nabla f_2(x, y, z) \neq \vec{0}$, tendremos que $\vec{T}$ es vector director de la recta tangente a C en ese punto.

Como

$$\vec{T} = \nabla f_1(x, y, z) \times \nabla f_2(x, y, z) = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ y & x & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = (-2y, 2x, 2y^2 - 2x^2),$$

y los puntos de C satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 2$, se tiene que en ningún punto de la curva pueden anularse en forma simultánea las coordenadas x e y, con lo cual $\vec{T} \neq \vec{0}$ en todo punto de C. Por lo tanto, para todo punto $(x, y, z) \in C$, $\vec{T} = (-2y, 2x, 2y^2 - 2x^2)$ es vector director de la recta tangente a C en ese punto. Entonces, la recta tangente a C en (x, y, z) es paralela al plano xy si y solo si la tercera componente de $\vec{T}$ es nula, es decir, si $2y^2 - 2x^2 = 0$. Los puntos de C que satisfacen la condición pedida en el enunciado son los que cumplen

$$\begin{cases} xy + z = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ 2y^2 - 2x^2 = 0 \end{cases}.$$

La última ecuación es equivalente a $x^2 = y^2$, con lo cual, sutituyendo en la segunda ecuación queda que $2x^2 = 2$ y entonces $x^2 = 1$, lo que es quivalente a $x = 1$ ó $x = -1$. Por lo tanto tenemos las siguientes posibilidades:

$$x = 1 \;\Rightarrow\; y^2 = 1 \;\Rightarrow\; y = 1 \;\vee\; y = -1 \;\Rightarrow\; (x = 1,\; y = 1,\; z = -1) \vee (x = 1,\; y = -1,\; z = 1).$$

o

$$x = -1 \;\Rightarrow\; y^2 = 1 \;\Rightarrow\; y = 1 \vee y = -1 \;\Rightarrow\; (x = -1,\; y = 1,\; z = 1) \vee (x = -1,\; y = -1,\; z = -1).$$

Note que en todos los casos z se obtuvo a partir de la primera ecuación, que es equivalente a $z = -xy$.

En definitiva, los puntos que cumplen lo solicitado, son

$$\boxed{(1, 1, -1),\; (1, -1, 1),\; (-1, 1, 1) \text{ y } (-1, -1, -1)}$$

Otra forma de resolver el problema es a través de una parametrización de C. A partir de las ecuaciones de C dadas en (1) podemos obtener lo siguiente. Como $x^2 + y^2 = 2$, entonces podemos expresar $x = \sqrt{2}\cos(t)$ e $y = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Teniendo en cuenta que $z = -xy$, entonces $z = -2\cos(t)\,\mathrm{sen}(t) = -\mathrm{sen}(2t)$. Por lo tanto

$$\vec{X} = \vec{\alpha}(t) = (\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t), -\mathrm{sen}(2t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

es una ecuación paramétrica para C.

Como $\vec{\alpha}'(t) = (-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t), \sqrt{2}\cos(t), -2\cos(2t)) \neq \vec{0}$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, el vector $\vec{\alpha}'(t)$ es vector director de la recta tangente a C en cada punto $\vec{\alpha}(t)$. Luego, la condición que la recta tangente sea paralela al plano xy es equivalente a que en el punto de la curva correspondiente al parámetro t se cumpla que $\cos(2t) = 0$. Como $\cos(2t) = 0$ si y solo si $2t = \pi/2 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, y $t \in [0, 2\pi]$, obtenemos los valores $t_1 = \pi/4$, $t_2 = 3\pi/4$, $t_3 = 5\pi/4$ y $t_4 = 7\pi/4$, que corresponden a los puntos $P_i = \vec{\alpha}(t_i)$, $i = 1, \ldots, 4$, que resultan ser los mismos que hallamos al principio, pero por otro medio.

- **Ejercicio 4.** Halle el plano tangente al gráfico de $g(x, y) = f(x^2 - 2y, x^2 - y^2)$ en el punto $(1, -1, g(1, -1))$, siendo $w = f(u, v)$ la función de clase $\mathcal{C}^1$ definida implícitamente en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (3, 0)$ por la ecuación

$$ue^{vw} - 2uw = 9.$$

Solución:

Dado que (u_0, v_0, w_0), con $w_0 = f(u_0, v_0)$, debe satisfacer a la ecuación que define a f implícitamente, resulta que $9 = u_0 - 2u_0w_0 = 3 - 6w_0$ y, por ende, $f(u_0, v_0) = w_0 = -1$.

Como el enunciado afirma que f es de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $(3, 0)$[2], f es diferenciable en ese punto y sus derivadas parciales valen:

$$\begin{aligned} f'_u(3, 0) &= -\frac{F'_u(3, 0, -1)}{F'_w(3, 0, -1)} = -\frac{e^{vw} - 2w|_{(3,0,-1)}}{uve^{vw} - 2u|_{(3,0,-1)}} = \frac{1}{2} \\ f'_v(3, 0) &= -\frac{F'_v(3, 0, -1)}{F'_w(3, 0, -1)} = -\frac{wue^{vw}|_{(3,0,-1)}}{uve^{vw} - 2u|_{(3,0,-1)}} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donde $F(u, v, w) = ue^{vw} - 2uw - 9$ es de clase $\mathcal{C}^1$. Luego, $Df(3, 0) = [1/2 \quad -1/2]$.

Llamemos $\vec{h}(x, y) = (x^2 - 2y, x^2 - y^2)$. Esta función tiene componentes $\mathcal{C}^1$, con lo cual es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$. Dado que $g = f \circ \vec{h}$ es la composición de dos funciones diferenciables y que $\vec{h}(1, -1) = (3, 0)$, tenemos que es válida la regla de la cadena y que

$$Dg(1, -1) = Df(3, 0)D\vec{h}(1, -1) = [1/2 \quad -1/2] \begin{bmatrix} 2x & -2 \\ 2x & -2y \end{bmatrix}_{(1,-1)} = [0 \quad -2].$$

Por lo tanto $\nabla g(1, -1) = (0, -2)$. También tenemos que $g(1, -1) = f(3, 0) = -1$. Una ecuación para el plano tangente al gráfico g en $(1, -1, -1)$ es entonces

$$z = g(1, -1) + \nabla g(1, -1) \cdot (x - 1, y + 1) = -1 - 2y - 2 = -2y - 3,$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{2y + z + 3 = 0}$$

[2]Esto puede probarse mediante el teorema de la función implícita pero no se pide.

- **Ejercicio 5.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas, de la cual se sabe que el conjunto de nivel 1 es un superficie Σ que admite la parametrización $\vec{X} = (u, u+v, u^2+v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que para $A = (1, 2, 2)$ y $\check{r} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $f'(A, \check{r}) = \sqrt{3}$, halle la aproximación lineal de f alrededor de A.

  Solución:

  Como f tiene derivadas parciales continuas es de clase $\mathcal{C}^1$ y por lo tanto diferenciable. Por lo tanto tenemos que

  $$\nabla f(A) \cdot \check{r} = f'(A, \check{r}) = \sqrt{3}, \tag{2}$$

  y de allí deducimos que $\nabla f(A) \neq \vec{0}$.

  Por otro lado, por el dato que tenemos, la superficie $\Sigma : \ f(x, y, z) = 1$ admite la parametrización $\vec{\phi}(u, v) = (u, u+v, u^2+v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Dado que $A = \vec{\phi}(1, 1)$, $A \in \Sigma$ y además $f(A) = 1$. Como las componentes de $\vec{\phi}$ son de clase $\mathcal{C}^1$, $\vec{\phi}$ es diferenciable y, entonces, el vector

  $$\vec{n} = \phi'_u(1,1) \times \phi'_v(1,1) = \left| \begin{matrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & 1 & 2u \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right|_{(1,1)} = (-1, -1, 1),$$

  es normal a Σ en A, al igual que lo es $\nabla f(A)$, ya que Σ es una superficie de nivel de f. Entonces $\nabla f(A) \parallel \vec{n}$, es decir $\nabla f(A) = \alpha\, \vec{n} = (-\alpha, -\alpha, \alpha)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Con esta información volvemos a (2) para obtener

  $$\sqrt{3} = (-\alpha, -\alpha, \alpha) \cdot (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

  De allí deducimos que $\alpha = -3$ y a continuación que $\nabla f(A) = (3, 3, -3)$. La aproximación lineal de f alrededor de A es entonces

  $$\boxed{L(x, y, z) = f(A) + \nabla f(A) \cdot (x-1, y-2, z-2) = 1 + 3(x-1) + 3(y-2) - 3(z-2)}$$

El tema 2 se resuelve de forma similar y solo presentamos su enunciado.

Tema 2

- **Ejercicio 1.** Sea C la curva incluida en la superficie Σ de ecuación $xz - y = 0$ cuya proyección sobre el plano xz satisface la ecuación $x^2 + z^2 = 8$. Halle todos los puntos de la curva en los cuales la recta tangente resulta paralela al plano xz.

- **Ejercicio 2.** Halle el plano tangente al gráfico de $g(x, y) = f(x^2 - y^2, x + 2y^2)$ en el punto $(1, -1, g(1, -1))$, siendo $w = f(u, v)$ la función de clase $\mathcal{C}^1$ definida implícitamente en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (0, 3)$ por la ecuación

  $$ve^{-uw} + 2vw = 9.$$

- **Ejercicio 3.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas, de la cual se sabe que el conjunto de nivel 1 es un superficie Σ que admite la parametrización $\vec{X} = (u, u-v, u^2-v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que para $A = (1, 2, 2)$ y $\check{r} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $f'(A, \check{r}) = -\sqrt{3}$, halle la aproximación lineal de f alrededor de A.

- **Ejercicio 4.** Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 \leq 4\}$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = y^2 + 3y + x^2$. Justifique la existencia de extremos absolutos para f y hállelos, indicando en qué puntos de D se producen.

- **Ejercicio 5.** Sea
$$f(x, y) = \frac{\sqrt{4 - 4x^2 - y^2}}{y^2 - x^2},$$
y sea D el dominio natural de f. Grafique D, ∂D y el interior de D.