FIUBA Análisis Matemático II- Primer Parcial 21-5-2022

Un resolución explicada[1]

Tema 1

- **Ejercicio 1.** Sea $h = f \circ \vec{g}$ con f diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\vec{g}(x,y) = (xy^2, x^2 - 2y)$. Sabiendo que $h(1,-1) = 2$ y que $\nabla h(1,-1) = (2,-4)$, halle el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,3,f(1,3))$.

  Solución:

  Como f y $\vec{g}$ son funciones diferenciables ($\vec{g}$ lo es porque sus componentes son polinómicas) entonces h también es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

  Por ser f diferenciable admite plano tangente a su gráfico en el punto $(1,3,f(1,3))$ de ecuación

  $$z = f(1,3) + \nabla f(1,3) \cdot (x-1, y-3).$$

  Como $h(1,-1) = 2$ y $h = f \circ \vec{g}$ tenemos que $h(1,-1) = f(\vec{g}(1,-1)) = f(1,3) = 2$.

  Aplicado la regla de la cadena (podemos hacerlo porque las funciones son diferenciables), resulta

  $$Dh(1,-1) = Df(\vec{g}(1,-1))\ D\vec{g}(1,-1)$$

  $$[2\ \ -4] = Df(1,3) \begin{bmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x & -2 \end{bmatrix}_{(1,-1)}$$

  $$[2\ \ -4] = \underbrace{Df(1,3)}_{[a\ \ b]} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

  Operando, nos queda

  $$\begin{cases} 2 = a + 2b \\ -4 = (-2)a + (-2)b \end{cases}$$

  resultando $a = 2$ y $b = 0$, es decir, $\nabla f(1,3) = (2,0)$.

  Reemplazando todo lo obtenido tenemos que una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,3,2)$ es

  $$\boxed{z = 2x}$$

[1] Por J.L. Mancilla Aguilar y S. Gigola, con la colaboración de M.E. di Iorio y M. Maulhardt.

- **Ejercicio 2.** Sea r_0 la recta normal a la superficie Σ de ecuación paramétrica:

$$\vec{X} = (uv, u^2 + v, u - v), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

en el punto $(-1, 0, 2)$. Halle todos los puntos en los cuales r_0 interseca al plano tangente a la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^3 = 0$ en el punto $(2, 2, -2)$.

Solución:

Sea $\vec{F}(u, v) = (uv, u^2 + v, u - v)$. Hallemos $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{F}(u_0, v_0) = (2, 0, -1)$.

$$\begin{cases} u_0 v_0 &= -1 \qquad (I) \\ u_0^2 + v_0 &= 0 \qquad (II) \\ u_0 - v_0 &= 2 \qquad (III) \end{cases}$$

Sumando (II) y (III) tenemos que $u_0^2 + u_0 = 2 \Rightarrow u_0 = 1$ ó $u_0 = -2$.

Usando (II) nos queda que si $u_0 = 1 \Rightarrow v_0 = -1$ y si $u_0 = -2 \Rightarrow v_0 = -4$.

Observemos que el par $(1, -1)$ satisface (I) pero el par $(-2, -4)$ no la satisface. Por lo tanto, la única solución del sistema es $(u_0, v_0) = (1, -1)$.

Por otro lado, $\vec{F}$ es diferenciable porque sus componentes son polinómicas. Un vector normal a Σ en $(-1, 0, 2)$ es

$$\vec{n}_0 = \vec{F}_u(1, -1) \times \vec{F}_v(1, -1) = \left.\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ v & 2u & 1 \\ u & 1 & -1 \end{vmatrix}\right|_{(1,-1)} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 0, -3) \parallel (1, 0, 1).$$

Luego, una ecuación de r_0 es

$$\vec{X} = (-1, 0, 2) + \lambda\ (1, 0, 1) = (-1 + \lambda, 0, 2 + \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Hallemos ahora el plano tangente a la superficie dada en el punto $P = (2, 2, -2)$.

Sea $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3$. La superficie Σ es el conjunto de nivel 0 de G. Como G es de clase $\mathcal{C}^1$ y

$$\nabla G(P) = (2x, 2y, 3z^2)_P = (4, 4, 12) \neq \vec{0},$$

$\nabla G(P)$ es normal al plano tangente a Σ en P.[2] Entonces, teniendo en cuenta que el vector $\vec{n} = (1, 1, 3)$ es paralelo a $\nabla G(P)$, una ecuación del plano tangente buscado es

$$(1, 1, 3) \cdot (x - 2, y - 2, z + 2) = 0.$$

[2]Notamos que el hecho que G sea $\mathcal{C}^1$ y que $\nabla G(P) \neq \vec{0}$ nos garantizan, debido al teorema de la función implíta, que Σ admite plano tangente en P.

Operando nos queda $x + y + 3z + 2 = 0$.

Veamos qué punto o puntos de la recta satisfacen la ecuación del plano
$(-1 + \lambda) + 0 + 3(2 + \lambda) + 2 = 4\lambda + 7 = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{7}{4}$.
Reemplazando el valor de λ obtenido en la ecuación de la recta resulta que el punto en el que r_0 interseca al plano es

$$\boxed{\left(-\frac{11}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)}$$

- **Ejercicio 3.** Sea $f(x, y) = \alpha[e^{x-2} + \cos y] + \beta[xy - \operatorname{sen} y] + g(x, y)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y g una función de clase $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ para la cual $P_2(x, y) = 4x^2 + 2xy + y^2 - 13x - 5y$ es su polinomio de Taylor de 2do orden en $A = (2, 0)$. Halle los valores de α y β para que f tenga un punto crítico (estacionario) en A y determine, para los valores hallados, si allí se produce un extremo local, indicando el tipo en caso afirmativo.

Solución:

Empezamos por ver qué información sobre g nos brinda P_2. Como P_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 de g en A, se cumple que:

$$g(A) = P_2(A) = -10 \tag{1}$$
$$g'_x(A) = P'_{2x}(A) = 8x + 2y - 13|_A = 3, \qquad g'_y(A) = P'_{2y}(A) = 2x + 2y - 5|_A = -1 \tag{2}$$
$$g''_{xx}(A) = P''_{2\,xx}(A) = 8, \qquad g''_{xy}(A) = P''_{2\,xy}(A) = 2, \qquad g''_{yy}(A) = P''_{2\,yy}(A) = 2. \tag{3}$$

Note que dado que g es de clase $\mathcal{C}^3$, y en particular de clase $\mathcal{C}^2$, $g''_{yx}(A) = g''_{xy}(A) = 2$ por el teorema de Schwarz.

La función $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ dado que las funciones exponenciales, polinómicas y trigonométricas lo son y g lo es. Por lo tanto f es diferenciable en A y tiene un punto estacionario allí si y solo si $\nabla f(A) = \vec{0}$.

Entonces se debe cumplir que

$$f'_x(A) = [\alpha e^{x-2} + \beta y]_A + g'_x(A) = \alpha + g'_x(A) = 0 \tag{4}$$
$$f'_y(A) = [-\alpha \operatorname{sen} y + \beta(x - \cos y)]_A + g'_y(A) = \beta + g'_y(A) = 0, \tag{5}$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{\alpha = -g'_x(A) = -3} \qquad \wedge \qquad \boxed{\beta = -g'_y(A) = 1}.$$

Pasamos ahora a analizar qué tipo de punto es A para la función f correspondiente a los valores $\alpha = -3$ y $\beta = 1$. Para ello tengamos en cuenta que reemplazando α y β en la definición de f por los valores obtenidos y derivando f respecto de x y de y quedan

$$f'_x(x, y) = -3\, e^{x-2} + y + g'_x(x, y) \qquad \wedge \qquad f'_y(x, y) = 3 \operatorname{sen} y + x - \cos y + g'_y(x, y).$$

Entonces, derivando y evaluando en el punto A obtenemos

$$f''_{xx}(A) = -3e^{x-2}|_A + g''_{xx}(A) = 5, \quad f''_{xy}(A) = 1 + g''_{xy}(A) = 3,$$
$$f''_{yy}(A) = [3\cos y + \operatorname{sen} y]_A + g''_{yy}(A) = 5.$$

Como $f''_{xx}(A) = 5 > 0$ y $\begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 16 > 0$, por el criterio de las segundas derivadas se produce en el punto A un mínimo local estricto, cuyo valor es

$$f(A) = (-3e^{x-2} - 3\cos y + xy - \operatorname{sen} y)_A + g(A) = -16.$$

- **Ejercicio 4.** Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Estudie tanto la existencia de las derivadas direccionales como la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Solución:

Empezamos por calcular las derivadas direccionales en $(0,0)$. Sea $\breve{v} = (v_1, v_2)$ un versor arbitrario. Entonces

$$f'((0,0),\breve{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\breve{v}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(tv_1)^2 \operatorname{sen}(tv_2)}{[(tv_1)^2 + 2(tv_2)^2]\, t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 v_1^2 \operatorname{sen}(tv_2)}{[v_1^2 + 2v_2^2]\, t^3}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(tv_2)}{t} \; \frac{v_1^2}{v_1^2 + 2v_2^2} = \frac{v_1^2\, v_2}{v_1^2 + 2v_2^2},$$

dado que $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_2\ \cos(tv_2)}{1} = v_2$ en virtud de la regla de L'Hôpital (o L'Hospital)[3] Por lo tanto f es derivable en el origen y las derivadas direccionales valen

$$\boxed{f'((0,0),\breve{v}) = \frac{v_1^2\, v_2}{v_1^2 + 2v_2^2} \quad \forall \breve{v} = (v_1, v_2)}$$

Pasemos a analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$. Notamos que las derivadas parciales de f en el origen son las derivadas direccionales en las direcciones de los versores $\breve{\imath}$ y $\breve{\jmath}$, es decir,

$$f'_x(0,0) = f'((0,0),(1,0)) = 0 \qquad \wedge \qquad f'_y(0,0) = f'((0,0),(0,1)) = 0.$$

Entonces f es diferenciable en $(0,0)$ si y solo si el siguiente límite existe y es nulo:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f'_x(0,0)h - f'_y(0,0)k}{\|(h,k)\|} = 0.$$

[3]Note que en este caso se cumplen las hipótesis de la regla de L'Hôpital, pues $f(t) = \operatorname{sen}(v_2 t)$ y $g(t) = t$ tienden a 0 cuando $t \to 0$, ambas funciones son derivables en un entorno reducido de 0 y existe $\lim_{t\to 0} f'(t)/g'(t)$.

Teniendo en cuenta la definición de f y el valor de las derivadas parciales en el origen, la diferenciabilidad de f en $(0,0)$ es equivalente a que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 \text{sen}(k)}{(h^2+2k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{6}$$

Si (6) fuese cierto, entonce el límite calculado a lo largo de la recta $L: h = k$ debería ser nulo también

$$0 = \lim_{(h,k)\to_L(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,h)}{\sqrt{h^2+h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\text{sen}(h)}{(h^2+2h^2)\sqrt{h^2+h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)}{3\sqrt{2h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)}{3\sqrt{2}\,|h|}. \tag{7}$$

Lo cual es imposible, pues, dado que $\lim_{h\to 0^+} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1$,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\text{sen}(h)}{3\sqrt{2}\,|h|} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\text{sen}(h)}{3\sqrt{2}\,h} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \neq 0.$$

Como no se cumple (7), tampoco se cumple (6), y la función f no es diferenciable en $(0,0)$.

Otra forma (más corta) de llegar a la misma conclusión es la siguiente. Si f fuese diferenciable en $(0,0)$, entonces f admitiría gradiente en ese punto y éste valdría $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Además tendríamos que

$$f'((0,0),\breve{v}) = \nabla f(0,0)\cdot \breve{v} = 0 \quad \forall \breve{v},$$

lo cual es absurdo, pues $f'((0,0),(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})) \neq 0$.

- **Ejercicio 5.** Pruebe mediante el teorema de la función implícita que en un entorno del punto $(1,1,1)$, la ecuación $x^2z - yz^2 + z^3 = 1$ define una función $z = h(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$. Calcule en forma aproximada $h(1.01, 0.98)$ mediante una aproximación lineal y halle el versor $\breve{v}$ que maximiza $h'((1,1),\breve{v})$.

Solución:

Sea $f(x,y,z) = x^2z - yz^2 + z^3 - 1$. Esta función es polinómica y por lo tanto de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Además, en el punto $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$ tenemos que

1. $f(x_0,y_0,z_0) = 0$;
2. $f'_z(x_0,y_0,z_0) = x^2 - 2yz + 3z^2|_{(1,1,1)} = 2 \neq 0$.

Luego, el teorema de la función implícita asegura la existencia de un entorno U de $(1,1,1)$,[4] de un entorno V de $(1,1)$ y de una única función $h: V \to \mathbb{R}$, que resulta de clase $\mathcal{C}^1$, tales que

$$(x,y,z)\in U \quad \wedge \quad f(x,y,z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y)\in V \quad \wedge \quad z = h(x,y).$$

Note que como $(1,1,1)\in U$ y $f(1,1,1) = 0$, por ende $h(1,1) = 1$.

[4] Aquí, un entorno de un punto A es un conjunto abierto que contiene a A, pero no es necesariamente una bola.

Como h es diferenciable en $(1,1)$, entonces admite una aproximación lineal

$$L(x,y) = h(1,1) + \nabla h(1,1) \cdot (x-1, y-1).$$

Dado que

$$h'_x(1,1) = -\frac{f'_x(1,1,1)}{f'_z(1,1,1)} = -\frac{2xz|_{(1,1,1)}}{2} = -1 \quad \wedge \quad h'_y(1,1) = -\frac{f'_y(1,1,1)}{f'_z(1,1,1)} = -\frac{-z^2|_{(1,1,1)}}{2} = \frac{1}{2},$$

$\nabla h(1,1) = (-1, 1/2)$ y $L(x,y) = 1 - (x-1) + \frac{y-1}{2}$. Por lo tanto

$$\boxed{h(1.01, 0.98) \approx L(1.01, 0.98) = 0.98}$$

Finalmente, $h'((1,1), \breve{v})$ es máxima cuando

$$\boxed{\breve{v}_M = \frac{\nabla h(1,1)}{\|\nabla h(1,1)\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-1, \frac{1}{2}\right)} \quad \wedge \quad \boxed{h'((1,1), \breve{v}_M) = \|\nabla h(1,1)\| = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Como el tema 2 se resuelve de forma similar, solo presentamos su enunciado.

Tema 2

- **Ejercicio 1.** Sea r_0 la recta normal a la superficie Σ de ecuación paramétrica:

  $$\vec{X} = (v-u, v^2+u, uv), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

  en el punto $(2,0,-1)$. Halle todos los puntos en los cuales r_0 interseca al plano tangente a la superficie de ecuación $x^3 + y^2 + z^2 = 0$ en el punto $(-2,2,2)$.

- **Ejercicio 2.** Sea $h = f \circ \vec{g}$ con f diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\vec{g}(x,y) = (x^2y, 2x - y^2)$. Sabiendo que $h(-1,1) = 2$ y que $\nabla h(-1,1) = (4,-2)$, halle el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1,-3,f(1,-3))$.

- **Ejercicio 3.** Sea $f(x,y) = \alpha[e^{y-2} + \cos x] - \beta[xy - \operatorname{sen} x] + g(x,y)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y g una función de clase $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ para la cual $P_2(x,y) = 4y^2 + 2xy + x^2 - 13y - 5x$ es su polinomio de Taylor de 2do orden en $A = (0,2)$. Halle los valores de α y β para que f tenga un punto crítico (estacionario) en A y determine, para los valores hallados, si allí se produce un extremo local, indicando el tipo en caso afirmativo.

- **Ejercicio 4.** Pruebe mediante el teorema de la función implícita que en un entorno del punto $(1,-1,-1)$, la ecuación $x^2z - yz^2 + z^3 = -1$ define una función $z = h(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$. Calcule en forma aproximada $h(0.98, -1.02)$ mediante una aproximación lineal y halle el versor $\breve{v}$ que maximiza $h'((1,-1), \breve{v})$.

- **Ejercicio 5.** Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \operatorname{sen} x}{2x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

  Estudie tanto la existencia de las derivadas direccionales como la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.