

Esta síntesis no es un apunte de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

Integral de línea o curvilínea

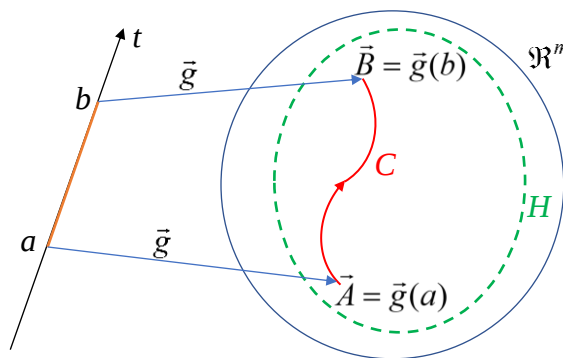
En esta síntesis vamos a abordar el concepto de integral a lo largo de un arco de curva (integral de línea) para los casos de campo escalar y de campo vectorial. Para ello comenzamos especificando el tipo de curva con la que vamos a trabajar.

Sea C un arco de curva suave a trozos⁽¹⁾ de ecuación:

$$\vec{X} = \vec{g}(t) \text{ con } a \leq t \leq b.$$

Supondremos $C \subset H$ con H conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$.

La parametrización establecida por $\vec{g}$ orienta a la curva desde un punto inicial $\vec{A} = \vec{g}(a)$ hacia un punto final $\vec{B} = \vec{g}(b)$, según se indica en el gráfico.



Integral de línea de campo escalar

Sea $f: H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, supondremos f continuo en H .

El símbolo $\int_C f ds$ representa **la integral de línea** de f a lo largo de C , donde:

- f se evalúa en puntos de C ,
- $ds = \|\vec{g}'(t)\| dt$ es el diferencial escalar de longitud de arco de curva,⁽²⁾

con lo cual:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{g}(t)) \|\vec{g}'(t)\| dt \quad (1)$$

Observe que $f(\vec{g}(t))$ es el campo en puntos de la curva que, en cada punto, se multiplica por la longitud de ds y la integral “suma la colaboración de esos productos” a lo largo de la curva. Para ello, el parámetro t varía desde a hasta b , que son los respectivos límites inferior y superior de la integral.

Planteada como está, la integral queda definida porque el integrando es continuo en el intervalo $[a, b]$.

En particular, cuando $f(\vec{X}) = 1$ para todo $\vec{X} = \vec{g}(t) \in C$, $\int_C ds = \int_a^b \|\vec{g}'(t)\| dt = \text{long}(C)$ de acuerdo a lo comentado en la pág. 4/9 de la síntesis S-7A. Es decir $\int_C ds$ sólo “suma” los ds a lo largo de C .

En el caso general, el resultado de $\int_C f ds$ depende de qué información brinda f para cada ds . Los valores de f caracterizan a C desde el punto de vista que se la está analizando.

⁽¹⁾ Ver Síntesis S-7A, pág. 1/9.

⁽²⁾ Ver Síntesis S-7A, pág. 7/9.

Para fijar ideas supongamos que C es un alambre muy delgado (filiforme), que tiene la forma de la curva. Si adoptamos al metro (m) como unidad de medida de ds , podemos mencionar los siguientes ejemplos elementales:

- $\int_C \underbrace{\underbrace{f}_{\frac{\text{kg}}{\text{m}}}}_{d(\text{masa})} \underbrace{ds}_{\text{m}} = \underbrace{\text{Masa}(C)}_{\text{kg}}$, donde f es la densidad longitudinal de masa (también denotada con δ).
- $\int_C \underbrace{\underbrace{f}_{\frac{\$}{\text{m}}}}_{d(\text{costo})} \underbrace{ds}_{\text{m}} = \underbrace{\text{Costo}(C)}_{\$}$, donde f representa los \$/m (costo por unidad de longitud) en cada punto.
- $\int_C \underbrace{\underbrace{f}_{\frac{\Omega}{\text{m}}}}_{d(\text{resist.})} \underbrace{ds}_{\text{m}} = \underbrace{\text{Resistencia}(C)}_{\Omega}$, donde f representa los Ω/m (Ohm/m) resistencia eléctrica por unidad de longitud). La letra Ω es el símbolo utilizado para el Ohm. ⁽³⁾

Por otra parte, el **valor medio** f_{med} del campo escalar f en C , es el valor constante que debería tener para que su integral de línea a lo largo de C resulte de igual valor. Es decir,

$$\int_C f \, ds = \int_C f_{\text{med}} \, ds = \int_a^b \underbrace{f_{\text{med}}(\vec{g}(t))}_{= f_{\text{med}} : \text{constante}} \|\vec{g}'(t)\| dt = f_{\text{med}} \int_a^b \|\vec{g}'(t)\| dt = f_{\text{med}} \text{long}(C),$$

de donde:

$$\boxed{f_{\text{med}} = \frac{1}{\text{long}(C)} \int_C f \, ds} \quad \text{valor medio de } f \text{ en } C \quad (2)$$

Integral de línea (o circulación) de un campo vectorial

Sea $\vec{f} : H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, supondremos $\vec{f}$ continuo en H .

El símbolo $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ representa la **integral de línea o circulación** de $\vec{f}$ a lo largo de C , donde:

- $\vec{f}$ se evalúa en puntos de C ,
- $d\vec{s} = \vec{g}'(t)dt$ es el diferencial vectorial de longitud de arco de curva, ⁽⁴⁾

con lo cual:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\vec{g}(t)) \cdot \vec{g}'(t) dt \quad (3)$$

Observe que $\vec{f} \cdot d\vec{s}$ representa el producto escalar de ambos vectores. Para que dicho producto pueda realizarse es necesario que $\vec{f}$ se evalúe en puntos de $C \subset H \subset \mathbb{R}^m$ y produzca imágenes en $\mathbb{R}^m$, porque $\vec{g}'(t)$ también tiene m componentes. Por ello se parte de $\vec{f} : H \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

La integral “suma la colaboración de esos productos escalares” a lo largo de la curva. Para ello, el parámetro t varía desde a hasta b , que son los respectivos límites inferior y superior de la integral.

⁽³⁾ La resistencia eléctrica es la oposición que ofrece el alambre al paso de corriente eléctrica a través de ella.

⁽⁴⁾ Ver Síntesis S-7A, pág. 9/9.

Planteada como está, la integral queda definida porque el integrando es continuo en el intervalo $[a, b]$.

La aplicación más conocida de este tipo de integral está relacionada con el cálculo del trabajo de un campo de fuerzas a lo largo de una curva. Por definición, siendo $\vec{f}$ un campo de fuerzas,

$$\text{Trabajo realizado por } \vec{f} \text{ a lo largo de } C \doteq \int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad (4)$$

Ejemplo: Sea $\vec{f}(\vec{X}) = \vec{F}$ constante en todo punto del segmento $\overline{AB}$, calcule el trabajo realizado por $\vec{f}$ a lo largo de dicho segmento recorrido desde $\vec{A}$ hasta $\vec{B}$.

Comenzamos por hallar una ecuación para el segmento, por ejemplo:

$$\vec{X} = \underbrace{\vec{A} + t(\vec{B} - \vec{A})}_{\vec{g}(t)} \text{ con } 0 \leq t \leq 1,$$

que cumple con la orientación requerida, pues $\vec{g}(0) = \vec{A}$ y $\vec{g}(1) = \vec{B}$.

Entonces,

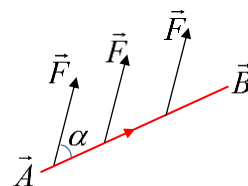
$$\text{Trabajo} = \int_{\overline{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\overline{AB}} \overbrace{\vec{f}(\vec{g}(t))}^{\text{constante}} \cdot \underbrace{\vec{g}'(t)}_{\vec{B}-\vec{A}} dt = \vec{F} \cdot (\vec{B} - \vec{A}) \underbrace{\int_0^1 dt}_{=1} = \vec{F} \cdot (\vec{B} - \vec{A}).$$

En este caso, $\vec{F}$ constante y camino recto, obtuvimos:

$$\begin{aligned} \text{Trabajo} &= \vec{F} \cdot (\vec{B} - \vec{A}) = \|\vec{F}\| \|\vec{B} - \vec{A}\| \cos(\alpha) = \\ &= F \text{ distancia } \cos(\alpha) \end{aligned}$$

donde $F = \|\vec{F}\|$ es la intensidad del campo y la distancia es la longitud del segmento $\overline{AB}$.

En particular, cuando $\alpha = 0$, Trabajo = F distancia.



Desde el punto de vista físico, si el campo es variable y la curva no es recta, para cada diferencial de arco se define $d(\text{trabajo}) = \vec{f} \cdot d\vec{s}$ ⁽⁵⁾. Entonces la $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ “suma a lo largo de la curva los diferenciales de trabajo” para calcular el trabajo a lo largo de C .

Propiedades de las integrales de línea

Para encarar el cálculo de integrales de línea, es muy importante tener en cuenta las siguientes propiedades, en las cuales indicamos $\int_C f$ para representa a ambos tipos de integrales, $\int_C f ds$ y $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$.

1. Con k constante, $\int_C k f = k \int_C f$.
2. $\int_C f + h = \int_C f + \int_C h$.

Estas dos son las propiedades de linealidad, que son consecuencia inmediata de las que tienen las integrales definidas de funciones escalares de una variable.

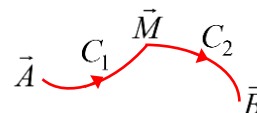
⁽⁵⁾ Recordemos que $d\vec{s}$ rectifica el pequeñísimo arco de curva en la dirección de la tangente y con la orientación de los arcos crecientes.

3. $|\int_C f| \leq \int_C \|f\|$. Si f es escalar, $\|f\| = |f|$.

4. *Aditividad del camino*

Sea $C = C_1 \cup C_2$ con $\text{long}(\underbrace{C_1 \cap C_2}_{\vec{M}}) = 0$. Entonces,

$$\int_C f = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f.$$



Corresponde aclarar los siguiente:

- $\vec{M} = C_1 \cap C_2$ es el punto común a C_1 y C_2 , la longitud de un punto vale cero.
- La curva C de punto extremos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está recorrida desde $\vec{A}$ hasta $\vec{B}$ (su orientación), sus dos partes –antes de tratarlas por separado– deben tener orientaciones coherentes con la de C .
- La nomenclatura comienza a resultar poco clara para poner en evidencia lo indicado en las dos anteriores. En estos casos puede convenir adoptar algo más explícito, por ejemplo:

$C : C_{AB}$, $C_1 : C_{AM}$ y $C_2 : C_{MB}$, con lo cual queda:

$$\int_{C_{AB}} f = \int_{C_{AM}} f + \int_{C_{MB}} f,$$

que claramente se refiere a C subdividida en dos partes, con un único punto en común, indicando la orientación correspondiente a cada parte en coherencia con la total.

Esta propiedad habilita a trabajar con curvas suave a trozos, sumando las integrales en cada uno de sus trozos.

5. *Influencia de la parametrización.* Debemos referirnos por separado para cada tipo de integral.

a) Integral de línea de campo escalar:

Parametrizando C de manera que sea “suave y simple”, el resultado de la $\int_C f ds$ no depende de la parametrización que se utilice. Es más, adoptando la nomenclatura que pone en evidencia los puntos extremos de la curva, $\boxed{\int_{C_{AB}} f ds = \int_{C_{BA}} f ds}$.

b) Integral de línea de campo vectorial:

Parametrizando C de manera que sea “suave y simple”, el resultado de la $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ no depende de la parametrización que se utilice siempre que se respete su orientación, en caso contrario cambia el signo del resultado. Es decir,

$$\boxed{\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\int_{C_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s}}.$$

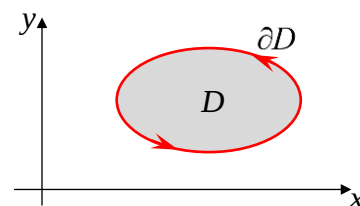
Para estas integrales, si la parametrización que logramos no impone la orientación deseada, o reparametrizamos (absolutamente innecesario) o aplicamos la propiedad recuadrada que nos permite calcular con una orientación, mediante la parametrización que impone la orientación opuesta.

Si C es suave a trozos, esta propiedad habilita –para ambos tipos de integrales– a usar una parametrización distinta en cada trozo, sin olvidar las condiciones indicadas en la propiedad anterior.

Los símbolos $\oint_C f \, ds$ o bien $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, significan que el arco de curva C es cerrado (punto inicial coincidente con el punto final).

Cuando se trabaja con camino cerrado en $\mathbb{R}^2$, por ejemplo en el plano xy , es común indicar el arco de curva como la frontera (∂D) de una región D .

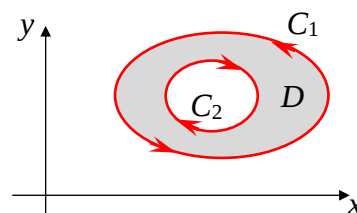
En el caso de la figura se indica $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$, donde ∂D^+ simboliza **circulación en sentido positivo** de $\vec{f}$ a lo largo de ∂D .



Se define “sentido positivo de circulación”, cuando la frontera se recorre de manera tal que el interior de D “queda a la izquierda”. Imagine que D es el agua de un lago y Ud. está recorriendo por el camino ∂D alrededor del lago. Su “paseo” lo hace en el sentido positivo, cuando durante el recorrido el agua queda a su izquierda.

Otro ejemplo es el de la figura de la derecha. En este caso, la frontera de D es $\partial D = C_1 \cup C_2$.

Para circular según ∂D^+ , el interior de D debe quedar a la izquierda, entonces las curvas C_1 y C_2 deben recorrerse con el sentido de circulación que se indica en el gráfico.



El sentido negativo (∂D^-), es el sentido de circulación opuesto al positivo.

Ejemplo: Dado $\vec{f}(x, y) = (x, xy)$ definido en $\mathbb{R}^2$, calcule la circulación en sentido positivo de $\vec{f}$ a lo largo de la frontera de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq y \leq x + 2\}$.

En la figura se representa la región D limitada por las curvas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = x + 2$, que se intersecan en los puntos $\vec{A} = (-1, 1)$ y $\vec{B} = (2, 4)$.

En este caso expresaremos $\partial D = C \cup \Gamma$, pudiendo representar $\partial D^+ = C_{AB} \cup \Gamma_{BA}$ para simbolizar cómo debemos recorrer cada trozo de ∂D .

Con lo cual:

$$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\Gamma_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad (\#)$$

Parametrizamos C : $\vec{X} = \underbrace{(x, x^2)}_{\vec{g}(x)}$ con $-1 \leq x \leq 2$. Con $\vec{g}(-1) = (-1, 1) = \vec{A}$ y $\vec{g}(2) = (2, 4) = \vec{B}$.

Como la orientación es correcta (con x creciente, desde $\vec{A}$ hasta $\vec{B}$), calculamos:

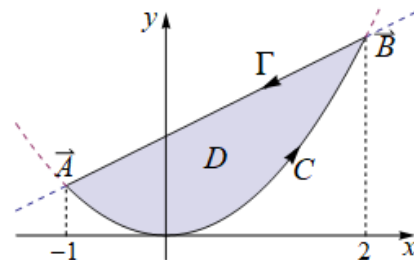
$$\int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{-1}^2 \vec{f}(\vec{g}(x)) \cdot \vec{g}'(x) dx = \int_{-1}^2 \underbrace{(x, x^3) \cdot (1, 2x)}_{x + 2x^4} dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{5} x^5 \right]_{-1}^2 = 147/10.$$

Parametrizamos Γ : $\vec{X} = \underbrace{(x, x + 2)}_{\vec{g}(x)}$ con $-1 \leq x \leq 2$. Con $\vec{g}(-1) = (-1, 1) = \vec{A}$ y $\vec{g}(2) = (2, 4) = \vec{B}$.

Como la orientación es opuesta a la que necesitamos aplicamos la propiedad “5. b)”:

$$\int_{\Gamma_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_{\Gamma_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = - \int_{-1}^2 \vec{f}(\vec{g}(x)) \cdot \vec{g}'(x) dx = - \int_{-1}^2 \underbrace{(x, x^2 + 2x) \cdot (1, 1)}_{x^2 + 3x} dx = - \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 \right]_{-1}^2 = - \frac{15}{2}$$

Reemplazando en (#) resulta $\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 147/10 - 15/2 = 36/5$.



Ejemplo: Calcule la masa de un hilo metálico C de ecuación $y = x^2$ con $-2 \leq x \leq 2$ si su densidad de masa por unidad de longitud es, en cada punto, proporcional a la distancia desde el punto al eje y .

Debemos calcular $\text{Masa}(C) = \int_C \delta \, ds$. La densidad en cada punto es $\delta(x, y) = k|x|$, donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad y $|x|$ es la distancia desde un punto (x, y) al eje y .

Una parametrización de C es $\vec{X} = \underbrace{(x, x^2)}_{\vec{g}(x)}$ con $-2 \leq x \leq 2$, $\vec{g}'(x) = (1, 2x)$.

Entonces, aplicando (1) con parámetro x , resulta:

$$\text{Masa}(C) = \int_C \delta \, ds = \int_{-2}^2 \delta(\vec{g}(x)) \|\vec{g}'(x)\| dx = \int_{-2}^2 \delta(x, x^2) \sqrt{1+4x^2} \, dx = \int_{-2}^2 k|x| \sqrt{1+4x^2} \, dx.$$

Para el cálculo debemos dividir en dos el intervalo de integración, pues $|x| = -x$ si $x \in [-2, 0]$ y pues $|x| = x$ si $x \in [0, 2]$, entonces queda:

$$\begin{aligned} \text{Masa}(C) &= \int_{-2}^0 k(-x) \sqrt{1+4x^2} \, dx + \int_0^2 kx \sqrt{1+4x^2} \, dx = \\ &= -k \frac{1}{12} [(1+4x^2)^{3/2}]_{-2}^0 + k \frac{1}{12} [(1+4x^2)^{3/2}]_0^2 = -k \frac{1}{12} [1-17^{3/2}] + k \frac{1}{12} [17^{3/2} - 1] = \\ &= k \frac{1}{6} [17^{3/2} - 1]. \end{aligned}$$

En este caso no nos preocupamos por la orientación, porque es la integral de línea de un campo escalar. Ver propiedad “5. a”).

Ejercicio: En los dos ejemplos anteriores, verifique que todos los arcos de curvas –con las parametrizaciones utilizadas– resultan suaves y simples.

Comentario: La integral de línea de campo vectorial puede adoptar una expresión distinta a la indicada.

En el plano xy , si el campo es del tipo $\vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ y $\vec{g}(t) = (x(t), y(t))$.

Dado que $d\vec{s} = \vec{g}'(t) dt = (x'(t) dt, y'(t) dt) = (dx, dy)$, el producto escalar del integrando resulta $\vec{f}(x, y) \cdot d\vec{s} = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, con lo cual resulta:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

En el espacio xyz , si $\vec{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ y $\vec{g}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, resulta:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

En ambos casos, como ya se hizo el producto escalar, para resolver falta realizar la parametrización correspondiente.

Los temas correspondientes al T.P. VII se completan en la Síntesis S-7C