

Esta síntesis no es un apunte de la teoría de la asignatura, sólo es un resumen de las principales definiciones y enunciados de teoremas/propiedades, utilizando una nomenclatura que respeta la adoptada en la Guía de Trabajos Prácticos.

EXTREMOS CON CONDICIONES DE VÍNCULO

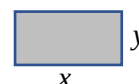
En esta sección nos referimos al análisis de máximos y mínimos de campos escalares, cuando sus variables deben cumplir ciertas condiciones, denominadas **condiciones de vínculo** entre las mismas.

La forma más directa de resolver estas situaciones, consiste en imponer la condición o condiciones de vínculo mediante la composición de funciones. Veamos varios ejemplos para fijar ideas.

Ejemplos:

- (a) Halle el rectángulo de área máxima, cuyo perímetro es igual a 20 cm.

Si las longitudes de los lados del rectángulo son x e y , debemos maximizar $f(x, y) = xy$ respetando la condición que debe cumplir el perímetro:
 $2x + 2y = 20$.



Expresión a maximizar: $f(x, y) = xy$.

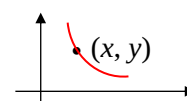
Condición de vínculo: $\underbrace{2x + 2y - 20}_{\varphi(x, y)} = 0$ con $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Despejando de la condición de vínculo resulta $y = 10 - x$ con $0 < x < 10$, es decir, debemos trabajar en puntos $(x, y) = \underbrace{(x, 10 - x)}_{\vec{g}(x)}$ con $0 < x < 10$.

Entonces queda $h(x) = f(\vec{g}(x)) = x(10 - x) = 10x - x^2$ con $0 < x < 10$, se deja como ejercicio verificar que el máximo se produce para $x = 5$. Con lo cual ambos lados deben ser de 5 cm, se trata de un cuadrado, y el área máxima es de 25 cm^2 .

- (b) Dada la curva C plana de ecuación $y = 1/x$ con $x > 0$, halle el punto de C más cercano al origen de coordenadas.

La distancia desde un punto (x, y) al $(0, 0)$ es $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, para que el punto pertenezca a la curva debe cumplirse que $y = 1/x$ con $x > 0$.



Expresión a minimizar: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

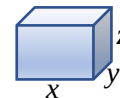
Condición de vínculo: $\underbrace{xy - 1}_{\varphi(x, y)} = 0$ con $x \in \mathbb{R}^+$.

Ahora trabajamos con puntos $(x, y) = \underbrace{(x, 1/x)}_{\vec{g}(x)}$ con $x > 0$.

Entonces queda $h(x) = f(\vec{g}(x)) = \sqrt{x^2 + 1/x^2}$ con $x > 0$. Dado que la raíz cuadrada es una función continua y estrictamente creciente, alcanza con minimizar su argumento $w(x) = x^2 + 1/x^2$ con $x > 0$ para lograr minimizar $h(x)$. Se deja como ejercicio verificar que el mínimo se logra para $x = 1$, con lo cual el punto más cercano es el $(1, 1)$ y la distancia al origen es $\sqrt{2}$.

- (c) Halle el paralelepípedo rectangular de volumen máximo, tal que el área de superficie frontera resulte igual a 54 cm^2 .

Con longitudes de lados x, y, z , debemos maximizar $f(x, y, z) = xyz$ respetando que el área total: $2xy + 2xz + 2yz = 54$.



Expresión a maximizar: $f(x, y, z) = xyz$.

Condición de vínculo: $\underbrace{2xy + 2xz + 2yz - 54}_{\varphi(x, y, z)} = 0$ con $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

De la condición de vínculo se puede despejar $z = \frac{27-xy}{x+y}$ con $x, y \in \mathbb{R}^+ \wedge xy < 27$.

Trabajamos con puntos $(x, y, z) = \underbrace{(x, y, (27-xy)/(x+y))}_{\bar{g}(x, y)}$ con $x, y \in \mathbb{R}^+ \wedge xy < 27$.

Queda $h(x, y) = f(\bar{g}(x, y)) = xy \frac{27-xy}{x+y}$ con $x, y \in \mathbb{R}^+ \wedge xy < 27$, buscamos el valor máximo de $h(x, y)$.

Es un campo escalar de dos variables, se deja como ejercicio el análisis, el punto en que se produce el máximo es $(x_0, y_0) = (3, 3) \Rightarrow z_0 = 3$. Con lo cual todos los lados deben ser de 3 cm, se trata de un cubo, y el volumen máximo es igual a 27 cm^3 .

- (d) Halle extremos locales de $f(x, y, z) = z - x^2 + ye^{2x-y-z}$ en puntos del plano de ecuación vectorial $\vec{X} = (v, u, 2v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Expresión a analizar: $f(x, y, z) = z - x^2 + ye^{2x-y-z}$

Condición de vínculo: $(x, y, z) = \underbrace{(v, u, 2v)}_{\bar{g}(u, v)}$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

En este caso, en forma cartesiana, al condición de vínculo es $\underbrace{z - 2x}_{\varphi(x, y, z)} = 0$.

Queda $h(u, v) = f(\bar{g}(u, v)) = 2v - v^2 + ue^{-u}$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, nuevamente queda un campo escalar de dos variables (u y v). Se deja como ejercicio el análisis correspondiente, se obtiene un máximo local $h(1, 1) = 1 + e^{-1}$, que se corresponde con $f(1, 1, 2) = 1 + e^{-1}$.

- (e) Halle extremos absolutos de $f(x, y, z) = xz - y$, evaluada en puntos del arco de curva dado como intersección de las superficies S_1 y S_2 de ecuaciones $x^2 + z = 4$ e $y = x$ respectivamente, con $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$.

Expresión a analizar: $f(x, y, z) = xz - y$

Condiciones de vínculo: $\underbrace{x^2 + z - 4}_{\varphi_1(x, y, z)} = 0$ y $\underbrace{y - x}_{\varphi_2(x, y, z)} = 0$

El arco de curva admite la ecuación $(x, y, z) = \underbrace{(x, x, 4 - x^2)}_{\bar{g}(x)}$ con $0 \leq x \leq 2$, para que $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$.

En este caso queda $h(x) = f(\bar{g}(x)) = x(4 - x^2) - x = 3x - x^3$ con $0 \leq x \leq 2$.

- En el interior del intervalo ($0 < x < 2$), tenemos:

$h'(x) = 3 - 3x^2 \xrightarrow{\text{pto. crítico}} 3 - 3x^2 = 0 \rightarrow x=1 \vee x=-1$, el último se descarta porque no es interior al intervalo.

$h''(1) = [-6x]_{x=1} = -6 < 0 \Rightarrow h(1) = 2$ es máximo local.

- En los puntos frontera del intervalo tenemos: $h(0) = 0$ y $h(2) = -2$.

Comparando el extremo local en el interior con los valores en la frontera, concluimos que en el intervalo $[0, 2]$ el mínimo absoluto es $h(2) = -2$ y el máximo absoluto es $h(1) = 2$.

Dado que $\bar{g}(2) = (2, 2, 0)$ y $\bar{g}(1) = (1, 1, 3)$ se concluye que, en puntos del arco de curva dato, resulta mínimo absoluto $f(2, 2, 0) = -2$ y máximo absoluto $f(1, 1, 3) = 2$.

Método de los multiplicadores de Lagrange

En los ejemplos anteriores se puede observar que las condiciones de vínculo se han expresado en forma implícita. Ahora vamos a construir las siguientes expresiones, teniendo en cuenta cada uno de dichos ejemplos, con el siguiente criterio:

función a extremar + combinación lineal de las funciones que establecen las condiciones de vínculo

cuando dichas condiciones se expresan en forma implícita (e igualadas a cero).

Veamos como queda para cada uno de los ejemplos anteriores:

(a) $w = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = xy + \lambda (2x + 2y - 20)$

(b) $w = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \lambda (xy - 1)$

(c) $w = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) = xyz + \lambda (2xy + 2xz + 2yz - 54)$

(d) $w = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) = z - x^2 + ye^{2x-y-z} + \lambda (z - 2x)$

(e) $w = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z) = xz - y + \lambda_1 (x^2 + z - 4) + \lambda_2 (y - x)$

Los coeficientes $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ se denominan **multiplicadores de Lagrange** y debe considerárselos como variables en la expresión de w .

Haciendo las derivadas correspondientes, los puntos críticos de w son los que corresponden a los extremos de f con la o las condiciones de vínculo correspondientes.

Veamos, por ejemplo, el caso (a). Planteamos el sistema para hallar los puntos críticos.

$$\begin{aligned} w'_x = 0 &\rightarrow \begin{cases} y + 2\lambda = 0 & (1) \\ x + 2\lambda = 0 & (2) \end{cases} \\ w'_y = 0 &\rightarrow \begin{cases} x + 2\lambda = 0 & (2) \\ 2x + 2y - 20 = 0 & (3) \end{cases} \\ w'_\lambda = 0 &\rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 20 = 0 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

De (1) y (2), restando, resulta $y = x$. Reemplazando en (3) se obtiene $4x - 20 = 0 \rightarrow x = y = 5$, con $\lambda = -5/2$.

Siempre que de las primeras se pueda eliminar λ , se obtiene la solución general del problema “es un cuadrado”. Al reemplazar en las otras se logra la solución particular del caso planteado.

Este método –hasta aquí– sólo detecta los puntos críticos, no permite asegurar que en ellos se produzca un máximo o un mínimo.

Las hipótesis para aplicar este método son las siguientes:

- Función escalar a maximizar de valores $f(x_1, \dots, x_n)$ con $n > 1$.
- Condiciones de vínculo $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, con $i = 1, \dots, k$ siendo $k < n$.
- $\vec{A} = (a_1, \dots, a_n)$ es punto crítico, que resuelve el sistema que anula las w'_i , con $i = 1, \dots, n+k$.
Donde $w'_i \equiv w'_{x_i}$ si $i = 1, \dots, n$, mientras que $w'_i \equiv w'_{\lambda_{i-n}}$ si $i = n+1, \dots, n+k$ y aseguran que $\varphi_i(\vec{A}) = 0$, es decir, el punto crítico satisface todas las condiciones de vínculo.
- $f \in C^1(E(\vec{A}))$ y $\varphi_i \in C^1(E(\vec{A}))$ con $i = 1, \dots, k$.
- Si $k = 1$, tenemos una condición de vínculo $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$, debe ser $\nabla \varphi(\vec{A}) \neq \vec{0}$.
- Si $k > 1$, deber ser no nulo en $\vec{A}$ algún jacobiano que permita asegurar que el sistema:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

define a k de las n variables en función de la(s) restante(s), en el entorno de un punto. Ver funciones definidas implícitamente por un sistema de ecuaciones. En particular, si se tienen dos condiciones de vínculo para f de tres variables, se debe cumplir que $\nabla \varphi_1(\vec{A}) \times \nabla \varphi_2(\vec{A}) \neq \vec{0}$.

En las áreas técnicas de aplicación práctica de este método, existen razones suficientes para saber que en los puntos hallados se produce el extremo buscado y el valor de los multiplicadores tiene un significado físico de interés.

En otros casos, para poder concluir es necesario apelar a consideraciones de tipo geométricas o bien aplicar otras herramientas que se pueden disponer en la bibliografía (hessianos especiales, que no son imprescindibles para enfocar los ejercicios/problemas de nuestra asignatura).

Comentario: El planteo comentado, para k condiciones de vínculo, determina cada punto crítico $\vec{A}$ como aquel que anula las derivadas de w , con lo cual:

$$\varphi_i(\vec{A}) = 0 \text{ con } i = 1, \dots, k \text{ y, además,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{A}) + \lambda_i \sum_{i=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\vec{A}) = 0 \text{ con } j = 1, \dots, n.$$

La última equivale a imponer: $\nabla f(\vec{A}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla \varphi_i(\vec{A}) = \vec{0}$, o bien, $\nabla f(\vec{A}) = - \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla \varphi_i(\vec{A})$.

Si denotamos con $\mu_i = -\lambda_i$, resulta:

$$\nabla f(\vec{A}) = \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla \varphi_i(\vec{A}).$$

que también se corresponde con igualar a 0 todas las derivadas de w respecto de las x_j . En esta última expresión se considera que los multiplicadores de Lagrange son los μ_i (a veces, a estos mismos se los indica con λ_i).