

Derivadas de campos escalares

Ya extendimos a varias variables los conceptos de límites y continuidad. Ahora nos ocuparemos de la noción de derivada...

¿Qué entenderemos por *derivar* una función de varias variables?

Recordemos que en cálculo de una variable la definición es la siguiente: dada una función $f(x)$ y un punto interior de su dominio, $x_0 \in [Dom(f)]^\circ$, se calcula el límite del cociente incremental,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si ese límite existe y es finito, se lo llama la *derivada de f en x_0* , se lo designa $f'(x_0)$, y su valor (un número real) representa la *pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$* (**Figura 1**).

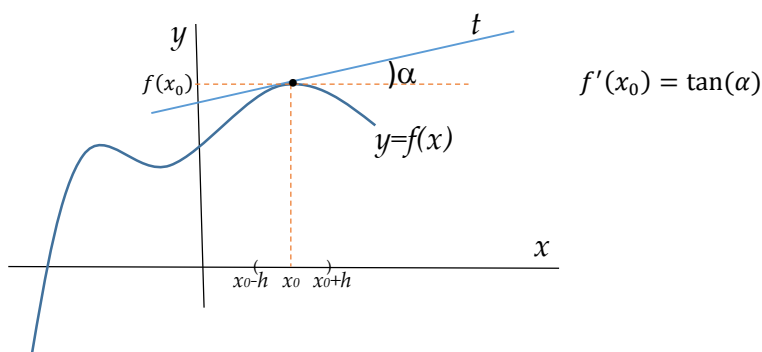


Figura 1. Recta tangente a una curva en un punto.

La sola existencia de ese límite garantiza que la recta tangente t exista, y la ecuación de esa recta es

$$t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

es decir, la ecuación de una recta de pendiente $f'(x_0)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Además se sabe que, si existe $f'(x_0)$, necesariamente la función f resulta continua en x_0 .

Observemos que, en el eje real, a partir de x_0 , podemos “movernos” con h hacia la derecha o hacia la izquierda a partir de x_0 .

Derivadas direccionales:

Tratemos de generalizar esta idea a un campo escalar de dos variables, que es el caso más sencillo de función de varias variables y tiene la ventaja de admitir representación gráfica.

Dada una función $f(x, y)$ y un punto interior de su dominio, $(x_0, y_0) \in [Dom(f)]^\circ$, quisiéramos definir un cociente incremental, pero encontramos aquí una primera dificultad: en el plano, a partir de (x_0, y_0) , podemos “movernos” en infinitas direcciones manteniéndonos dentro del dominio, como vemos en la **Figura 2**.

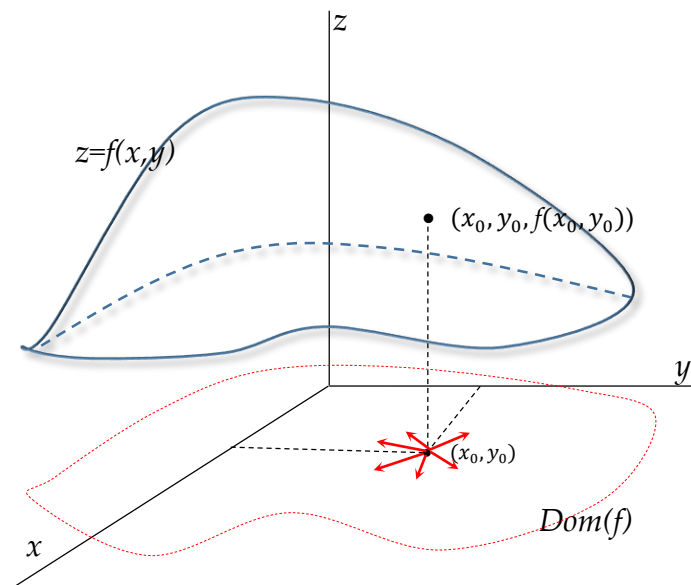


Figura 2. Existen infinitas direcciones a partir de (x_0, y_0) para calcular un cociente incremental.

Cada una de esas direcciones podríamos representarla con un vector $\check{v}$.

Para cada dirección $\check{v}$ se puede definir un cociente incremental:

$$\frac{f((x_0, y_0) + h \check{v}) - f(x_0, y_0)}{h}$$

El vector $h\check{v}$ podemos imaginarlo como un “paso” de longitud h en dirección de $\check{v}$, a partir de (x_0, y_0) .

Observemos que:

- $r: (x, y) = (x_0, y_0) + h \check{v}$, con $h \in \mathbb{R}$, es la ecuación, en el plano que contiene a $Dom(f)$, de la recta de dirección $\check{v}$ que pasa por (x_0, y_0) ;
- en el cociente incremental, $f((x_0, y_0) + h \check{v})$ es el valor de la función sobre los puntos de esa recta;

- en el gráfico de la función, los puntos $(x, y, f((x_0, y_0) + h \tilde{v}))$ se encuentran sobre la curva $\mathcal{C}$, que queda definida cuando el plano vertical π , de traza r , corta a la gráfica de la función.

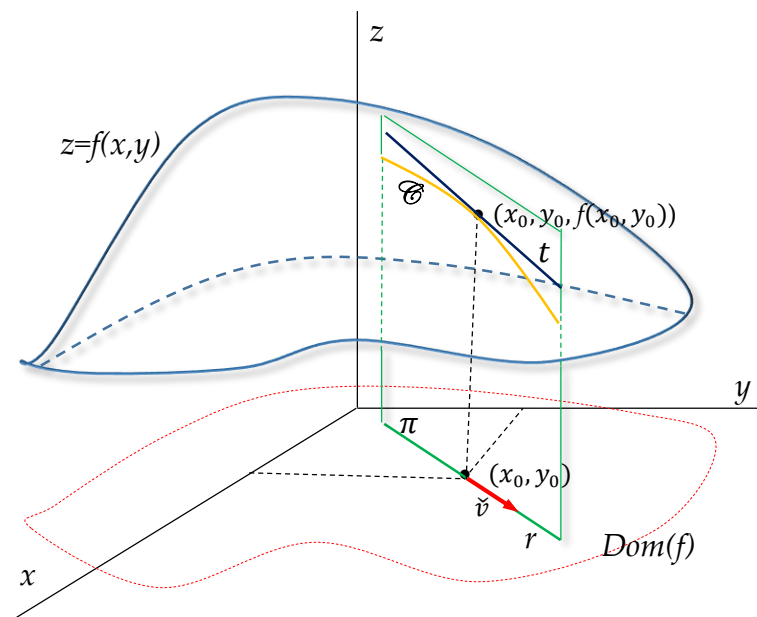


Figura 3. Sentido geométrico de la derivada direccional.

Por lo tanto, si existe y es finito el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h \tilde{v}) - f(x_0, y_0)}{h}$$

representará la pendiente de la recta t , tangente a esa curva $\mathcal{C}$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, si esta recta existe (**Figura 3**).

En caso de existir y ser finito, el límite del cociente incremental

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h \tilde{v}) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se denomina *derivada direccional de la función f en el punto (x_0, y_0) en la dirección $\tilde{v}$* .

Se lo indica $f'((x_0, y_0); \tilde{v})$, o $f'_{\tilde{v}}(x_0, y_0)$, o bien $\frac{\partial f}{\partial \tilde{v}}(x_0, y_0)$.

Cuando existe, es un número real que representa la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a la curva que queda definida al cortar la gráfica de la función con un plano vertical cuya traza sobre el plano xy es la recta de ecuación $r: (x, y) = (x_0, y_0) + h \tilde{v}$, $h \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1:

Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$ y el versor $\check{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

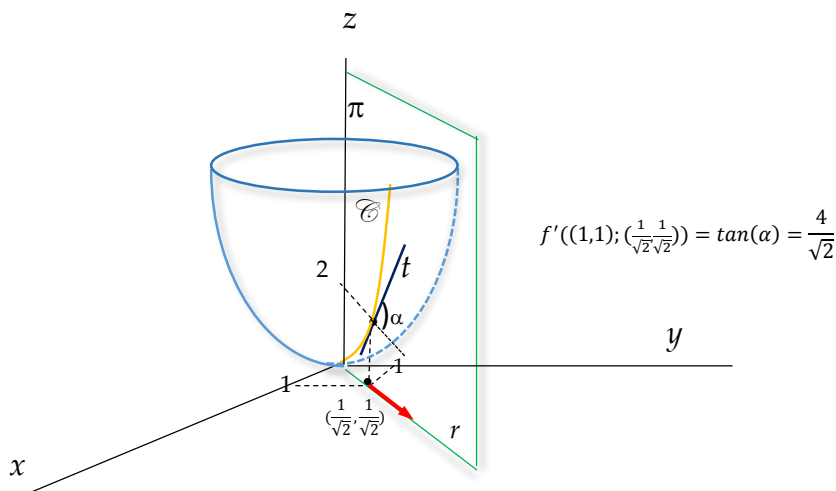


Figura 4. Representación gráfica para el Ejemplo 1.

Sabemos que la gráfica es un paraboloide. Por lo que podemos apreciar, la derivada direccional debería existir y su valor representaría la pendiente de la recta t que vemos en la **Figura 4**.

Calculando,

$$\begin{aligned} f'((1,1); (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})) &\stackrel{\text{si existe}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((1,1) + h(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})) - f(1,1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{h}{\sqrt{2}})^2 + (1 + \frac{h}{\sqrt{2}})^2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4h}{\sqrt{2}} + \frac{h^2}{2}}{h} = \frac{4}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Este resultado significa que, a partir del punto $(1,1)$, por cada unidad de longitud que nos movamos en el plano xy en dirección y sentido de la flecha roja, la altura del punto correspondiente *sobre la recta t* sube $\frac{4}{\sqrt{2}}$ unidades de longitud.

Podríamos calcular de modo similar la derivada direccional de esta función en cualquier punto de su dominio (todo $\mathbb{R}^2$) y en cualquier dirección $\check{v}$.

Comprueben, por ejemplo, que en punto $(0,0)$ existen las derivadas en todas las direcciones $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y resultan todas nulas. ¿Cómo explican esto geoméricamente?

Para una función f cualquiera, en cada punto $(x_0, y_0) \in [Dom(f)]^\circ$, el límite del cociente incremental podría existir para algunos versores $\vec{v}$ y no existir para otros, o existir para todos los versores, o no existir para ninguno... Se trata, en principio, de límites independientes entre sí. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2:

En la **Figura 5** se muestra el gráfico de la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$ que presenta en el origen una profunda “falla” y no parece admitir recta tangente en todas direcciones.

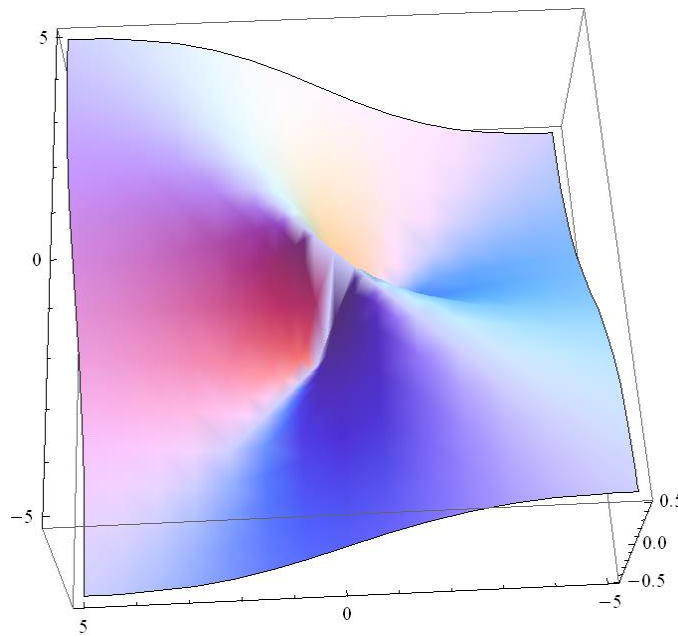


Figura 5. Gráfico para el Ejemplo 2.

Verifiquémoslo analíticamente.

Para un versor arbitrario $\vec{v} = (v_1, v_2)$, con $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$, es

$$f'((0,0); (v_1, v_2)) \stackrel{\text{si existe}}{\cong} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h(v_1, v_2)) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hv_1 hv_2}{h^2 v_1^2 + h^2 v_2^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 v_1 v_2}{h^3 (v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2}{h}$$

Este último límite existe (y vale 0) sólo si $v_1 = 0$ o $v_2 = 0$, vale decir si $\check{v}$ es alguno de los siguientes versores: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ o $(-1,0)$. Por lo tanto, esta función, en el origen, sólo es derivable según cuatro “direcciones” (en rigor, direcciones-sentido) y no lo es para el resto de los versores.

Observaciones:

- La existencia del límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h \check{v}) - f(x_0, y_0)}{h}$ supone la existencia de $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f((x_0, y_0) + h \check{v}) - f(x_0, y_0)}{h}$ y de $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f((x_0, y_0) + h \check{v}) - f(x_0, y_0)}{h}$.
- Es sencillo demostrar que $f'((x_0, y_0); \check{v})$ existe si y sólo si existe $f'((x_0, y_0); -\check{v})$ y se verifica que $f'((x_0, y_0); -\check{v}) = -f'((x_0, y_0); \check{v})$. ¡Hacerlo!...

Ejemplo 3:

Estudiemos ahora la existencia de derivadas direccionales de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

en el origen.

$$\begin{aligned} f'((0,0); (v_1, v_2)) &\stackrel{\text{si existe}}{\cong} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h(v_1, v_2)) - f(0,0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{hv_1 h^2 v_2^2}{h^2 v_1^2 + h^4 v_2^4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 v_1 v_2^2}{h^3 (v_1^2 + h^2 v_2^4)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{(v_1^2 + h^2 v_2^4)} = \begin{cases} 0 & \text{si } v_1 = 0 \\ \frac{v_2^2}{v_1} & \text{si } v_1 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función entonces, es derivable, en el origen, en toda dirección $\check{v}$.

Sin embargo... $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ no existe (¡verificarlo!...), de manera que esta función es discontinua en el origen.

Encontramos aquí una importante diferencia entre las nociones de derivabilidad para funciones de una variable y para funciones de varias variables:

- *en cálculo de varias variables, derivabilidad en un punto, **no implica necesariamente continuidad de la función en ese punto**, aun cuando la derivabilidad se verifique en todas las direcciones posibles. En cálculo de varias variables los conceptos de derivabilidad y continuidad resultan independientes entre sí.*

Hemos definido la derivada direccional para el caso de un campo escalar de dos variables, pero la definición es análoga para el caso de más variables, aunque no será posible una interpretación geométrica:

Definición: Dada una función $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in D^\circ$ y un versor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, se define la derivada direccional de f en $\vec{x}_0$ en dirección $\vec{v}$,

$$f'(\vec{x}_0; \vec{v}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h \vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

si tal límite existe y es finito.

Su valor indica la tasa de variación del valor de f cuando la variable se modifica en dirección $\vec{v}$ a partir de $\vec{x}_0$ y su existencia, aun para todo $\vec{v}$, nada indica con respecto a la continuidad de f en $\vec{x}_0$.

Derivadas parciales:

Hasta el momento hemos estudiado la derivación de campos escalares en dirección de un versor $\vec{v}$ cualquiera. ¿Qué ocurre si, en particular, elegimos los versores canónicos?

Esto es: para una función de dos variables, los versores $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$; para una función de tres variables, los versores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$ y, en general, para n variables los versores $\vec{e}_1 = (1,0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0, \dots, 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, \dots, 0,1)$.

Analicemos el caso de dos variables:

$$f'((x_0, y_0); (1, 0)) \stackrel{\text{si existe}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(1, 0)) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(x_0)$$

$$f'((x_0, y_0); (0, 1)) \stackrel{\text{si existe}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(0, 1)) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(y_0 + h) - \psi(y_0)}{h} = \psi'(y_0)$$

Observemos que, en cada uno de estos cocientes incrementales, una de las variables permanece invariable mientras que la otra se incrementa. El procedimiento es equivalente a derivar respecto de una variable, dejando fija la otra (hemos llamado $\varphi(x)$ a $f(x, y_0)$ y $\psi(y)$ a $f(x_0, y)$)

En caso de existir, estas derivadas direccionales particulares reciben el nombre de *derivada parciales* (según x , o según y , de acuerdo a cuál es la variable que se deriva). En lugar de $f'((x_0, y_0); (1, 0))$ o $f'((x_0, y_0); (0, 1))$ se acostumbra indicarla $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ o $f'_x(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ o $f'_y(x_0, y_0)$ respectivamente.

Ejemplo 4:

Calculemos las derivadas parciales de $f(x, y) = x^2y$, el punto $(x_0, y_0) = (1, 3)$.

$$f'_x(1, 3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((1, 3) + h(1, 0)) - f(1, 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + h, 3) - f(1, 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^2 \cdot 3 - 3}{h} = 6$$

$$f'_y(1, 3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((1, 3) + h(0, 1)) - f(1, 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, 3 + h) - f(1, 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1^2(3 + h) - 3}{h} = 1$$

Calculémoslas ahora en un punto genérico (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(1, 0)) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 y_0 - x_0^2 y_0}{h} = 2x_0 y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_y(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(0, 1)) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 (y_0 + h) - x_0^2 y_0}{h} = x_0^2 \end{aligned}$$

Observemos que el valor de las derivadas parciales coincide con el que hubiéramos obtenido si derivábamos la función respecto de una de las variables, dejando la otra

constante. Es más: las derivadas parciales resultan ser dos nuevos campos escalares de dos variables:

$$f(x, y) = x^2y \rightarrow \begin{cases} f'_x(x, y) = 2xy \\ f'_y(x, y) = x^2 \end{cases}$$

Ejemplo 5:

Estudiemos ahora la existencia de derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

en un punto cualquiera de su dominio.

En un punto cualquiera *diferente del origen* la función puede derivarse directamente: no necesitamos calcular los cocientes incrementales, sino que podemos obtener las derivadas parciales dejando cada vez una de las variables fija y derivando respecto de la otra (llamaremos a este procedimiento “regla práctica”):

- derivando $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ respecto de x , pensando y como una constante, obtenemos $\frac{y^2(x^2+y^2) - xy^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$ o sea $\frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Luego, para $(x, y) \neq (0, 0)$, es $f'_x(x, y) = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$.
- derivando $\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ respecto de y , pensando x como una constante, obtenemos $\frac{2xy(x^2+y^2) - xy^2 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$ o sea $\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$. Luego, para $(x, y) \neq (0, 0)$, es $f'_y(x, y) = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$.

(observen que usamos la regla de derivación de un cociente).

En el origen este procedimiento no puede seguirse pues allí la función cambia de definición. Para analizar si existen en el origen usamos la definición del límite del cociente incremental:

$$f'_x(0, 0) \stackrel{\text{si existe}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(1, 0)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0^2}{h^2 + 0^2} - 0}{h} \stackrel{(1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$f'_y(0, 0) \stackrel{\text{si existe}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(0, 1)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h^2}{0^2 + h^2} - 0}{h} \stackrel{(2)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

de modo que en el caso de esta función existen las derivadas parciales en el origen y resultan ambas nulas (en otro caso podrían no existir, o existir una sola de ellas; por otra parte, que ambas hayan resultado iguales es una coincidencia).

Observar que en (1) y (2), primero resolvemos el cociente y luego calculamos el límite, por lo que no se trata de indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$.

Para esta función se puede escribir, entonces,

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ y } f'_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Hasta aquí hemos ejemplificado derivadas parciales de campos escalares de dos variables, pero el concepto es análogo para funciones con mayor número de variables.

Ejemplo 6:

a) Para $f(x, y, z) = x^3 \cos(yz)$ se tienen

$$f'_x(x, y, z) = 3x^2 \cos(yz), f'_y(x, y, z) = -x^3 z \sin(yz) \text{ y } f'_z(x, y, z) = -x^3 y \sin(yz)$$

b) Para $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^{x_1 + x_3(x_4)^5}$ se tienen

$$f'_{x_1}(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^{x_1 + x_3(x_4)^5}, f'_{x_2}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

$$f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4)^5 e^{x_1 + x_3(x_4)^5} \text{ y } f'_{x_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_3(x_4)^4 e^{x_1 + x_3(x_4)^5}$$

En ambos ejemplos pudimos utilizar “regla práctica”.

c) Para $f(x, y, z, w) = \begin{cases} \frac{x+yz}{w} & \text{si } w \neq 0 \\ 0 & \text{si } w = 0 \end{cases}$ podemos calcular f'_x , f'_y y f'_z por regla práctica, pero para f'_w :

$$f'_w(x, y, z, w) = \begin{cases} -\frac{x+yz}{w^2} & \text{si } w \neq 0 \\ 0 & \text{si } w = 0 \text{ y } x + yz = 0 \\ \text{no existe} & \text{si } w = 0 \text{ y } x + yz \neq 0 \end{cases}$$

pues

$$\begin{aligned} f'_w(x, y, z, 0) &\stackrel{\text{si existe}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y, z, 0) + h(0, 0, 0, 1)) - f(x, y, z, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z, h) - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+yz}{h}}{h} = \begin{cases} 0 & \text{si } x + yz = 0 \\ \text{no existe} & \text{si } x + yz \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Derivadas de orden superior:

En los Ejemplos 4 a 6 vimos que las derivadas parciales de campos escalares resultan, a su vez, nuevos campos escalares (cuyo dominio está contenido en el dominio del campo original). Estos nuevos campos escalares podrían, a su vez, derivarse, y así se obtendrían derivadas parciales de orden superior.

Veamos un ejemplo sencillo (la notación que usamos se explica por sí misma):

Ejemplo 7:

Para $f(x, y) = e^{x^2+3y}$ se tienen (verificar los cálculos)

$$\begin{array}{ll} f'_x(x, y) = 2xe^{x^2+3y} & f''_{xx}(x, y) = 2e^{x^2+3y} + 4x^2e^{x^2+3y} & f'''_{xxx}(x, y) = 12xe^{x^2+3y} + 4x^2e^{x^2+3y} \\ & f''_{xy}(x, y) = 6xe^{x^2+3y} & f'''_{xxy}(x, y) = 6e^{x^2+3y} + 12x^2e^{x^2+3y} \\ & f''_{yx}(x, y) = 6xe^{x^2+3y} & f'''_{xyx}(x, y) = 6e^{x^2+3y} + 12x^2e^{x^2+3y} \\ f'_y(x, y) = 3e^{x^2+3y} & & f'''_{xyy}(x, y) = 18xe^{x^2+3y} \\ & f''_{yy}(x, y) = 9e^{x^2+3y} & f'''_{yxx}(x, y) = 6e^{x^2+3y} + 12x^2e^{x^2+3y} \\ & & f'''_{yxy}(x, y) = 18xe^{x^2+3y} \\ & & f'''_{yyx}(x, y) = 18xe^{x^2+3y} \\ & & f'''_{yyy}(x, y) = 27e^{x^2+3y} \end{array}$$

etc.

Observemos, en primer lugar, que, en caso de existir, para una función de 2 variables se tienen 2 derivadas primeras, 4 derivadas segundas, 8 derivadas terceras, ... (en este ejemplo podríamos seguir derivando indefinidamente).

¿Cuántas derivadas de orden n existirían? ¿Y para una función de 3 variables?
¿Y para una de m variables?

Algo más que podemos observar es cierta regularidad en las derivadas:

$$\begin{array}{l} f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) \\ f'''_{xxy}(x, y) = f'''_{yxx}(x, y) = f'''_{xyx}(x, y) \\ f'''_{xyy}(x, y) = f'''_{yyx}(x, y) = f'''_{yxy}(x, y) \end{array}$$

Y podríamos seguir encontrando regularidades si continuáramos derivando.

No se trata de una casualidad sino de una propiedad que se expresa en el siguiente teorema:

Teorema (de Schwarz o de Clairaut)

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables definida en una región abierta D ; si en D existen las derivadas parciales f'_x , f'_y , f''_{xy} , f''_{yx} y además f''_{xy} es continua, entonces se cumple que en esa región las derivadas “cruzadas” de segundo orden son iguales:

$$f''_{xy} = f''_{yx} \quad \forall (x, y) \in D$$

Observaciones

- Se lo enuncia aquí para dos variables y para derivadas segundas, pero este teorema se cumple para cualquier número de variables y para todo orden de derivación. Por ejemplo, para una función de tres variables para la que existieran todas las derivadas hasta las de orden 4 y, por ejemplo, f''''_{yxzz} fuera continua resultarían

$$\begin{aligned} f''''_{yxzz} &= f''''_{xyzz} = f''''_{zyxz} = f''''_{zxyz} = f''''_{zzyx} = f''''_{zzxy} = \\ &= f''''_{zxzy} = f''''_{zyzx} = f''''_{xzzx} = f''''_{yzzx} = f''''_{yzxz} = f''''_{xzyz}, \end{aligned}$$

- Cuando se cumplen las hipótesis del teorema y, en razón de esta propiedad, se suele adoptar una notación más conveniente. Por ejemplo, en el caso anterior, en lugar de

$$f''''_{yxzz}, f''''_{xyzz}, f''''_{zyxz}, f''''_{zxyz}, f''''_{zzyx}, f''''_{zzxy}, f''''_{zxzy}, f''''_{zyzx}, f''''_{xzzx}, f''''_{yzzx}, f''''_{yzxz} \text{ o } f''''_{xzyz},$$

que son todas coincidentes, se indica

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}$$

pues sólo interesa cuántas veces se deriva con respecto a cada variable.

- Si una función f tiene en un dominio D derivadas parciales de orden n continuas, se indica

$$f \in C^n(D)$$

En caso de que tuviera derivadas parciales continuas de *todos* los órdenes (como las funciones exponenciales, trigonométricas, polinómicas, combinaciones de ellas, etc.) se indica

$$f \in C^\infty(D)$$

Ejemplo 8:

Verifiquen que para la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

resulta $f''_{xy}(0) \neq f''_{yx}(0)$. ¿Contradice esto al Teorema de Schwarz?