

Departamento de Estabilidad

84.02/64.01 ESTABILIDAD I

GEOMETRÍA DE LAS SUPERFICIES

Ing. Carolina Pérez Taboada¹

¹ JTP del Dto. de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, UBA

Índice de contenidos

Fuentes de consulta.....	2
Objetivos.....	3
Superficies.....	3
Momento estático o de primer orden	3
Baricentro	4
Baricentro de figuras simples	5
Determinación de baricentro en figuras compuestas.....	6
Momentos de segundo orden	8
Momento de inercia.....	8
Momento centrífugo	9
Ejes conjugados y principales de inercia	9
Momento polar	9
Radio de giro	10
Transformaciones de ejes.....	11
Traslación de ejes	11
Fórmulas de Stainer	12
Giro de ejes	13
Determinación del eje conjugado de inercia	14
Determinación de ejes y momentos principales de inercia.....	14
Ejes principales de inercia.....	14
Momentos principales de inercia.....	15
ANEXOS	17
Hoja de fórmulas	17
Determinación de coordenadas rotadas	18
Transformaciones de ejes matricialmente	19
Traslación.....	19
Rotación	19

Fuentes de consulta

El presente apunte se ha confeccionado en base a la bibliografía que se detalla a continuación. Para mayor profundidad o detalles, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos, favor de recurrir a las fuentes.

- R. C. Hibbeler (2004) *Mecánica vectorial para ingenieros - Estática*, R. C. Hibbeler, Editorial Pearson, pag. 499
- E. D. Fliess (1970) *Estabilidad – 1º curso*, Enrique D. Fliess, Buenos Aires, Argentina, Editorial Kapeluz, pág. 165
- Pico, Peralta, Ciancio, Montanaro (2013) *Estática*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, UNICEN, pag. 58

Propiedades geométricas de las superficies

En las distintas ramas de la ingeniería es necesario conocer de una superficie plana no solo su área, sino también su orientación y cómo se distribuye esta área. Para esto se definen y calculan un conjunto de **propiedades** o **características geométricas** de las superficies.

Objetivos

Los objetivos del presente documento son que el estudiante pueda:

- Identificar el baricentro y momentos principales de inercia de cualquier figura
- Relacionar las características geométricas de una sección con la sección transversal en el comportamiento de un modelo de barras o en una compuerta sometida a empuje
- Identificar el conjunto de figuras simples que forman una sección más compleja y determinar sus características geométricas a partir de operar con valores conocidos de las secciones simples
- Calcular las características geométricas respecto de cualquier punto y orientación de eje del plano de la sección.

Superficies

En Estabilidad I se estudia la estática de cuerpos rígidos. Dependiendo de la geometría de estos cuerpos, de los vínculos entre los mismos, de las acciones sobre ellos y la vinculación a tierra, se elige con qué modelo trabajar. Puede utilizarse el modelo de chapas en el plano o el modelo de barras, cuando una dimensión es mucho mayor que las otras dos.

Para determinar las solicitaciones en modelos de barras de estructuras isoestáticas, no es necesario conocer qué figura describe la sección transversal. Sin embargo, tanto las características geométricas de la sección como su orientación respecto de las solicitaciones, junto con las características del material, influyen en la respuesta que ofrece la estructura a estas acciones.

Por otra parte, la acción total de una determinada carga distribuida sobre una sección, es función de las características geométricas de la misma. Esto es aplicable también al caso del empuje que ejerce un fluido sobre una compuerta, por ejemplo, o las tensiones internas en la sección de una barra.

En este texto se estudian las características de las figuras planas que dependen de su geometría. A continuación se definirán una serie de características, por lo general dependientes de los ejes de referencia y luego se estudiará la manera de operar con las mismas, para obtener las características con respecto a diferentes ejes.

Momento estático o de primer orden

Dada una superficie plana de área A y un eje u en el plano de la superficie, que puede o no cortarla. Se considera un diferencial de la superficie de área dA , separado del eje u una distancia v , que se conviene considerar positiva hacia un lado del eje y negativa hacia el lado opuesto, como en la siguiente figura:

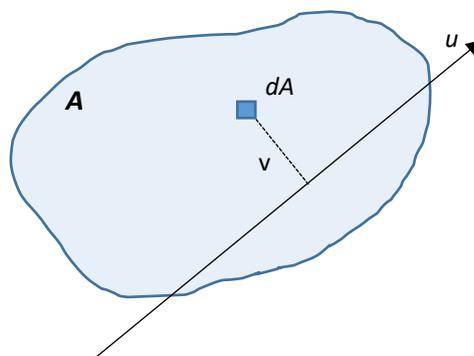


Figura 1. Diferencial de área dA , separado del eje u una distancia v

Se define al momento estático, o de primer orden, a la expresión:

$$S_u = \int v dA \quad (\text{Eq 1})$$

Se representa con la letra S mayúscula y como subíndice se utiliza el nombre del eje a partir del cual se consideran las distancias según la definición.

Por simplicidad en la expresión, se expresa con una integral simple lo que es en realidad una integral doble.

Las unidades de medida de los momentos de primer orden son: $[S] = m^2 \cdot m = m^3$

Dado que un diferencial de superficie dA es siempre positivo, según sea la posición relativa del eje u respecto de la superficie considerada, el momento estático puede ser negativo, positivo o nulo.

Para el caso de un sistema de coordenadas ortogonal x, y , como en la figura:

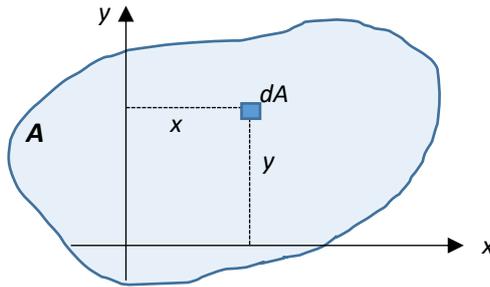


Figura 2. Diferencial de área dA , respecto de un sistema ortogonal x, y

Los momentos estáticos respecto de cada eje se definen:

$$\begin{aligned} S_x &= \int y dA \\ S_y &= \int x dA \end{aligned} \quad (\text{Eq 2})$$

Baricentro

El baricentro, o centroide, de una figura es un punto donde se podría concentrar toda el área de la misma. La ubicación del baricentro es una propiedad de la superficie. Es única y es independiente del sistema coordenado. Puede ubicarse dentro o fuera del contorno de la superficie.

El baricentro se representa normalmente con la letra mayúscula G o B .

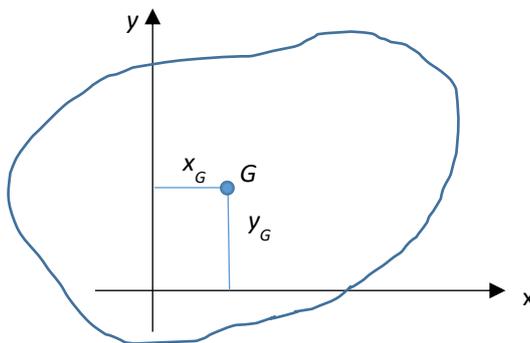


Figura 3. Punto donde se concentra el área: baricentro G

Se parte del supuesto de que el área total de la figura A se puede concentrar en un cierto punto G del plano. En ese caso los momentos de primer orden del área concentrada en G son:

$$S_x = A \cdot y_G \quad (\text{Eq 3})$$

$$S_y = A \cdot x_G$$

Siendo y_G y x_G las coordenadas de G en el sistema de referencia elegido.

Si se iguala el momento de primer orden de la superficie distribuida con el momento de primer orden de la misma superficie concentrada en G , se obtienen las coordenadas del baricentro:

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{\int y \, dA}{A} = \frac{S_x}{A} \\ x_G &= \frac{\int x \, dA}{A} = \frac{S_y}{A} \end{aligned} \quad (\text{Eq 4})$$

Las unidades de medida del baricentro son las unidades de longitud: $[x_G] = \frac{[S_y]}{[A]} = \frac{m^3}{m^2} = m$

Cualquier recta o eje que pase por el baricentro se denomina recta o eje baricéntrico.

Si un eje es baricéntrico su distancia al baricentro es nula. De acuerdo con las Eq. 3, dado que un área no puede ser nula, entonces el momento estático de cualquier eje baricéntrico es nulo: $S_G = 0$.

Si existe un eje de simetría o antimetría, de modo que para cada diferencial de área dA a un lado del eje existe un diferencial de área dA igual pero opuesto en relación al mismo eje, el mismo será baricéntrico.

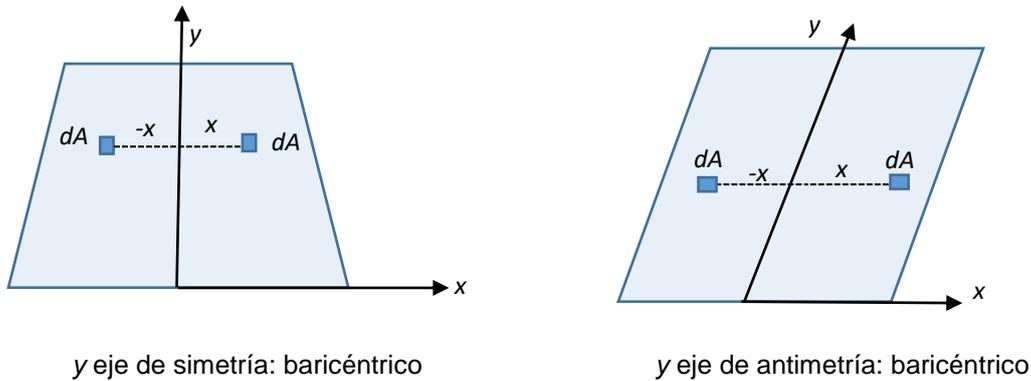
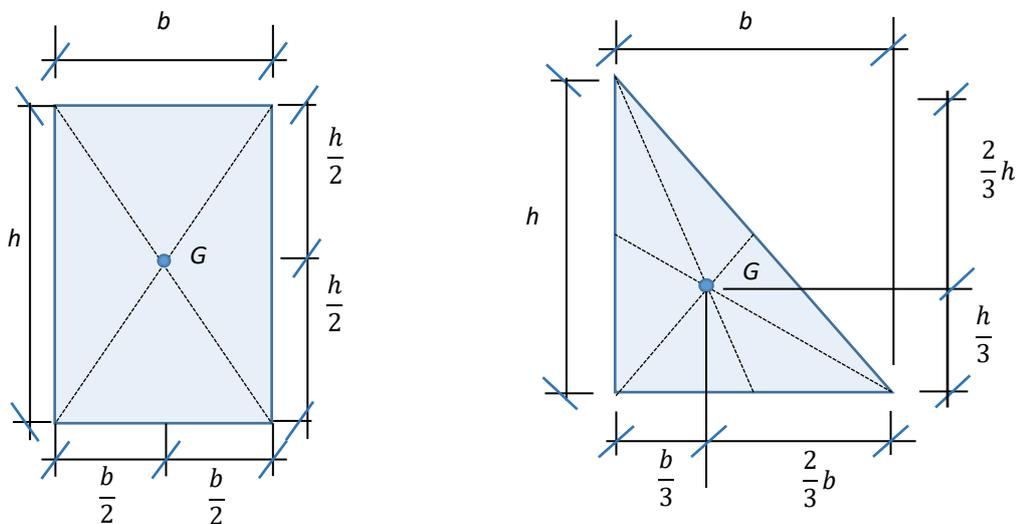


Figura 4. Ejes de simetría o antimetría: baricéntricos

Baricentro de figuras simples

Teniendo esta conclusión en cuenta es simple determinar los baricentros de las figuras más comunes:



Baricentro de rectángulo: en la intersección de las diagonales, o de los ejes de simetría

Baricentro de triángulo: en la intersección de las mediatrices

Figura 5. Baricentro de rectángulo y triángulo

El baricentro de la circunferencia es trivial: el centro.

Determinación de baricentro en figuras compuestas

Se considera ahora una superficie y se la subdivide en superficies menores:

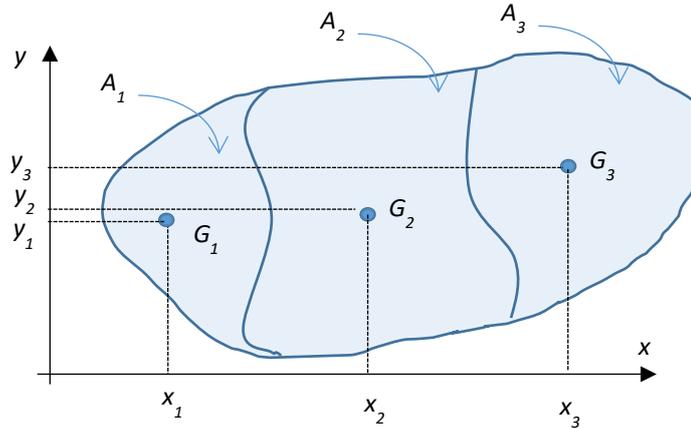


Figura 6. Superficie subdividida en superficies más pequeñas y sus baricentros

El momento estático de la figura total se puede calcular como la suma de los momentos estáticos de cada área más pequeña:

$$S_x = \int y \, dA = \sum \int y \, dA_i = \sum S_{xi} \tag{Eq 5}$$

$$S_y = \int x \, dA = \sum \int x \, dA_i = \sum S_{yi}$$

Las coordenadas de los baricentros de las superficies más pequeñas se calculan como:

$$y_{Gi} = \frac{\int y \, dA_i}{A_i} = \frac{S_{xi}}{A_i} \tag{Eq 6}$$

$$x_{Gi} = \frac{\int x \, dA_i}{A_i} = \frac{S_{yi}}{A_i}$$

Escribiendo los momentos estáticos parciales en función de sus coordenadas baricentricas parciales, y reemplazándolos en las Eq. 5, se tiene:

$$S_x = \sum y_{Gi} \cdot A_i \tag{Eq 7}$$

$$S_y = \sum x_{Gi} \cdot A_i$$

Que reemplazando en las Eq. 4, dado que el área total se puede obtener como la sumatoria de las áreas parciales $A = \sum A_i$:

$$y_G = \frac{\sum y_{Gi} \cdot A_i}{\sum A_i} \tag{Eq 8}$$

$$x_G = \frac{\sum x_{Gi} \cdot A_i}{\sum A_i}$$

Con lo cual, conociendo las ubicaciones de baricentros de figuras parciales y sus áreas, puede conocerse la ubicación del baricentro de una figura compuesta.

Podría considerarse a las coordenadas del baricentro como un promedio de las coordenadas de los baricentros de las áreas parciales, ponderado en sus superficies.

Por otra parte es posible considerar una figura como la composición de una figura y un hueco, es decir un área negativa.

Ejemplo de determinación de baricentro en figuras compuestas

En la siguiente figura se tiene un perfil de forma de L invertida:

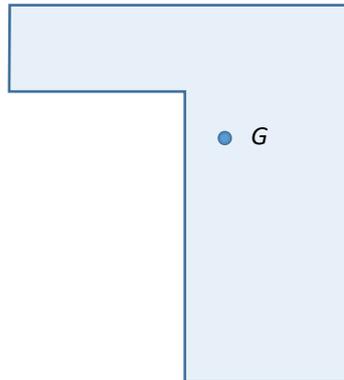


Figura 7. Superficie L

Puede considerarse la superficie L como la conjunción de dos rectángulos o como un gran rectángulo al que se le ha quitado otro rectángulo más pequeño.

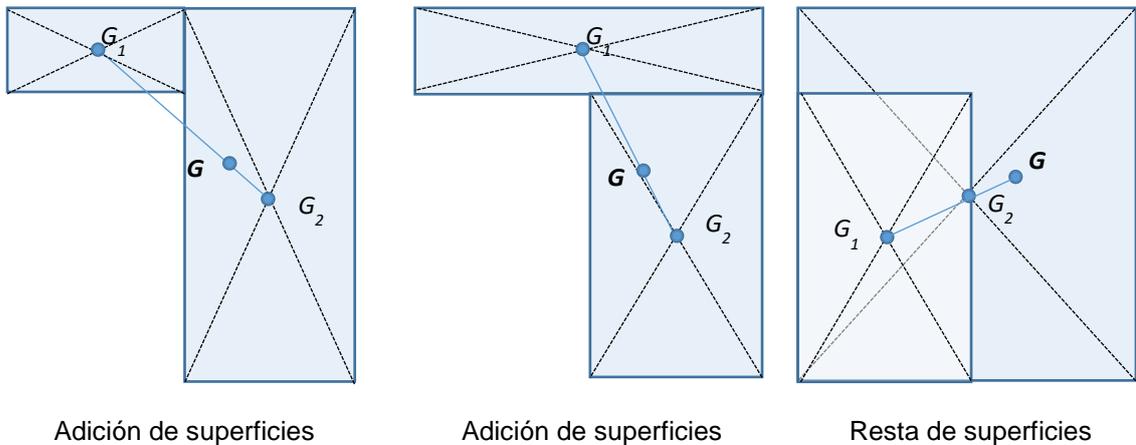


Figura 8. Subdivisión en superficies simples

En todos los casos, la ubicación del baricentro está sobre la línea que une ambos puntos. Para los dos primeros casos es un punto entre uno y otro baricentros, más cercano al que tuviera más superficie. En el caso de la resta de superficies, estará sobre la línea que une los baricentros, del lado donde no se encuentra el área negativa.

Gráficamente podría determinarse la ubicación del baricentro como la intersección de las rectas que unen los baricentros parciales, según diferentes alternativas de subdivisión.

Momentos de segundo orden

Se definirán a continuación tres momentos de segundo orden, es decir integrales en el área de un producto de coordenadas.

Los momentos de segundo orden se representan con la letra I o J mayúscula. Con subíndices se indican en orden indistinto los ejes a los que hacen referencia las coordenadas en la definición. Cuando la coordenada es repetida se puede omitir la repetición de los subíndices e indicarlo una única vez, como es el caso de los momentos de inercia.

De la misma manera que para momentos de primer orden se hizo abuso de expresión, indicando por simplicidad con una única integral lo que en realidad es una integral doble, en momentos de segundo orden también se expresarán las definiciones con única integral aunque sean superficiales.

Las unidades de medida de los momentos de segundo orden son: $[I] = m^2 \cdot m^2 = m^4$

Momento de inercia

Dada una superficie plana de área A y un eje u en el plano de la superficie, como la que se muestra en la Figura 1 con la cual se definió el momento estático, se define el momento de inercia I_u , siendo v la distancia al eje, a la integral:

$$I_u = \int v^2 dA \quad (\text{Eq 9})$$

De acuerdo con esta definición, dado que un diferencial de área no puede ser negativo, y una coordenada al cuadrado, sea cual fuere su signo tampoco puede ser negativa, el momento de inercia es siempre positivo. Por otra parte, para el caso en que el diferencial de área se encontrara sobre el eje de análisis u , entonces la coordenada v sería cero que al cuadrado es $0^2 = 0$. Esto significa que el momento de inercia nunca puede ser nulo.

Para el caso de un sistema de coordenadas ortogonal x, y , como en la Figura 2, los momentos de inercia con respecto a cada eje se definen:

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA \\ I_y &= \int x^2 dA \end{aligned} \quad (\text{Eq 10})$$

Físicamente el momento de inercia da una idea de la resistencia al giro que tiene esa superficie respecto del eje indicado.

Esto se puede ejemplificar en la orientación de una viga de sección rectangular sometida a una carga distribuida. Observando la Figura 9, frente a la misma sección rectangular, resulta intuitivo que orientarla según la configuración 1 generaría menor deflexión que si se orienta como la configuración 2, esto es $f_1 < f_2$. Esta deflexión está relacionada con el momento flexor, que se desarrolla en el eje saliente al plano, M_y . Para la terna local mostrada, el momento flexor está en el eje y . El momento de inercia relacionado con ese eje es el I_y . Se puede concluir fácilmente que el momento de inercia $I_{y1} > I_{y2}$ dado que la configuración 1 opone mayor resistencia a la deflexión, o sea al giro en torno del eje saliente al plano.

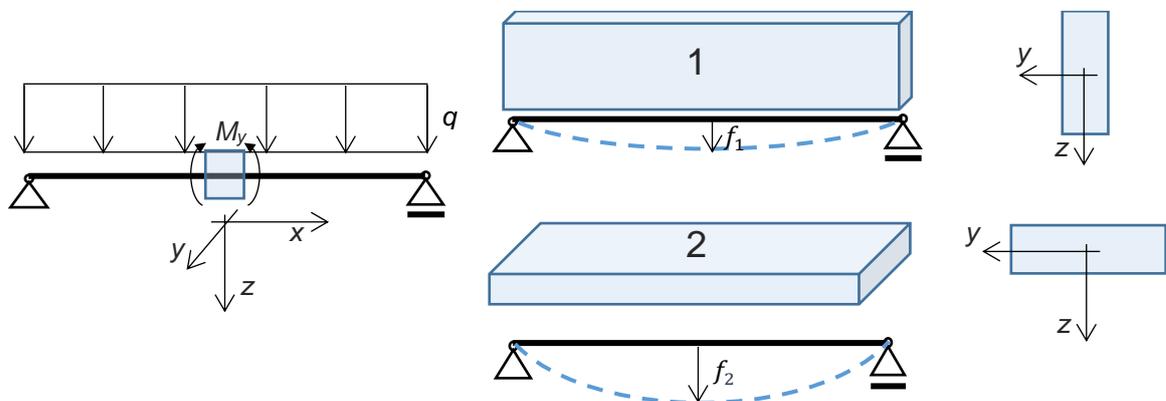


Figura 9. Relación entre momento de inercia y flexión: $f_1 < f_2$; $I_{y1} > I_{y2}$

Momento centrífugo

El momento centrífugo o producto de inercia se define, para un par de ejes cualesquiera u, v , como:

$$I_{uv} = \int u v dA \tag{Eq 11}$$

El orden de los subíndices se indica de manera indistinta.

Para un par de ejes ortogonales x, y la definición es análoga:

$I_{xy} = \int x y dA$	(Eq 12)
------------------------	---------

El signo del momento centrífugo depende de las coordenadas. Es decir que tomará el signo de los cuadrantes donde exista mayor cantidad de área.

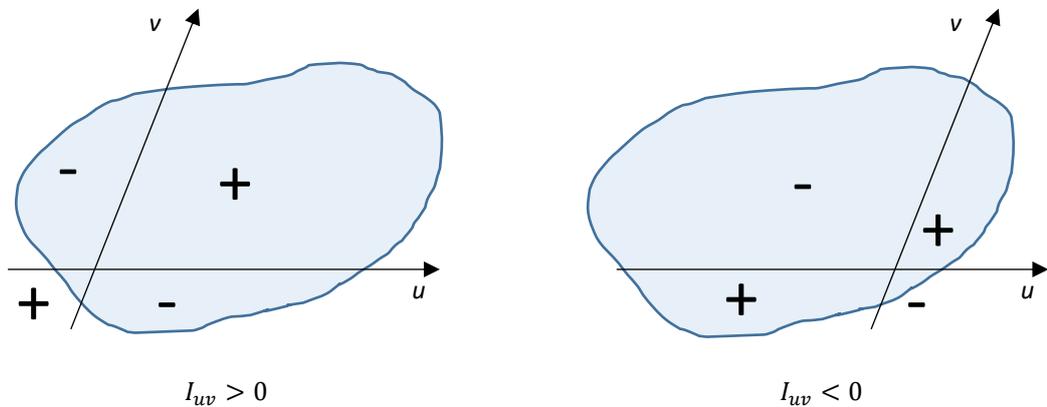


Figura 10. Signo del momento centrífugo

Ejes conjugados y principales de inercia

Si el momento centrífugo es nulo se trata de un par de ejes **conjugados de inercia**.

Si además de ser conjugados, el par de ejes son ortogonales entre sí, entonces se dice que son ejes **principales de inercia**.

Si uno de los ejes es de simetría, cualquiera sea el otro eje, el momento centrífugo será nulo.

Momento polar

Dada una superficie plana de área A y un punto P en el plano de la superficie, como la que se muestra en la siguiente figura:

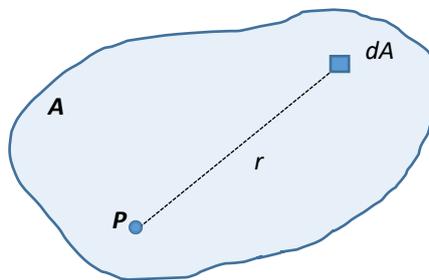


Figura 11. Diferencial de área dA , respecto de un punto P

Si r es la distancia del diferencial de área dA al punto P , se define el momento de inercia polar respecto del punto P , I_P , a la integral:

$I_P = \int r^2 dA$	(Eq 13)
---------------------	---------

Si se consideran un par de ejes ortogonales cualesquiera x , y pasantes por el punto P , según se muestra en la figura:

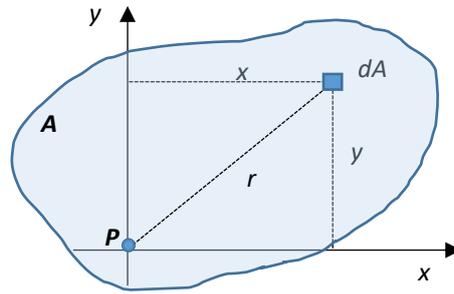


Figura 12. Diferencial de área dA , respecto de un punto P

Se puede expresar a r^2 en función de las coordenadas ortogonales x , y , según la igualdad de Pitágoras $r^2 = x^2 + y^2$. Reemplazando en la Eq. 13:

$$I_p = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y \quad (\text{Eq 14})$$

Es decir que para todo par de ejes ortogonales que pasen por el polo P , la suma los momentos de inercia respecto de cada eje es el valor del momento de inercia polar $I_p = I_x + I_y$.

Radio de giro

Se ha definido para una superficie de área A y una recta u al momento de inercia con respecto a la recta, según la Eq. 9, $I_u = \int v^2 dA$.

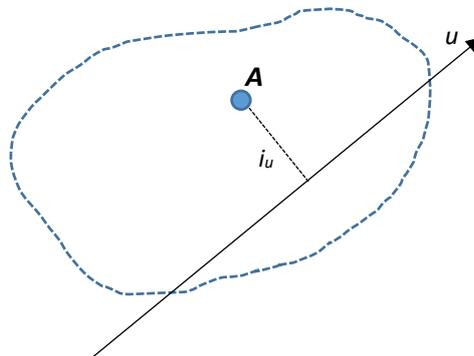


Figura 13. El área A , concentrada en un punto a una distancia i_u del eje u

Si se considerara a toda el área concentrada en un solo punto que se encuentra a una distancia i_u de la recta, entonces el momento de segundo orden se expresaría como:

$$I_u = i_u^2 \cdot A \quad (\text{Eq 15})$$

A esta distancia i_u se le llama radio de giro y se define como:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} \quad (\text{Eq 16})$$

Vale la misma definición para cualquier eje, incluso un par de ejes ortogonales x , y , o el radio de giro polar:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad ; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad ; \quad i_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}} \quad (\text{Eq 17})$$

Transformaciones de ejes

Se han enunciado las definiciones de los momentos de primero y segundo orden. Es común que las superficies con las que se trabaja estén formadas, o puedan ser fácilmente aproximadas, por figuras geométricas conocidas. De esta manera, conociendo las propiedades geométricas de las figuras más comunes, pueden obtenerse las de figuras más complejas. Pero la operación entre propiedades geométricas solamente es posible cuando están referidas a los mismos ejes. Los ejes para los cuales se desea conocer las propiedades pueden estar en cualquier posición en el plano con respecto a aquellos para los cuales los valores son conocidos. Es necesario encontrar la relación entre ejes trasladados y rotados en el plano.

Traslación de ejes

Se parte de una superficie de área A referida a un sistema cartesiano x, y , cuyas características geométricas son conocidos para este sistema coordenado. Se desea conocer los momentos de 2do orden respecto de otro sistema cartesiano x', y' paralelos a los ya conocidos, separados una distancia a y b respectivamente.

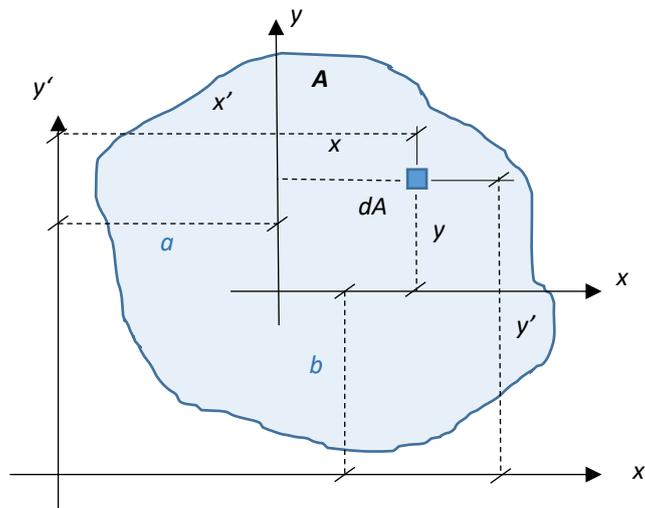


Figura 14. Traslación de ejes

Se pueden expresar las coordenadas del nuevo sistema cartesiano en función de las conocidas:

$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + b \end{aligned} \tag{Eq 18}$$

Aplicando las definiciones respectivas se obtienen expresiones de momento centrífugo y momentos de inercia de cada uno de los ejes, a saber:

Momento centrífugo trasladado:

$$I_{x'y'} = \int x' y' dA \tag{Eq 19}$$

Reemplazando los valores por los de las Eq. 18 y operando:

$$I_{x'y'} = \int (x + a)(y + b) dA = \int xy dA + b \int x dA + a \int y dA + ab \int dA$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + b S_y + a S_x + ab A \tag{Eq 20}$$

Momentos de inercia trasladados:

$$I_{x'} = \int y'^2 dA \quad ; \quad I_{y'} = \int x'^2 dA \tag{Eq 21}$$

Reemplazando y operando para $I_{x'}$:

$$I_{x'} = \int (y + b)^2 dA = \int y^2 dA + b^2 \int dA + 2 b \int y dA$$

$I_{x'} = I_x + b^2 A + 2 b S_x$	(Eq 22)
----------------------------------	---------

Análogamente para $I_{y'}$:

$$I_{y'} = \int (x + a)^2 dA = \int x^2 dA + a^2 \int dA + 2 a \int x dA$$

$I_{y'} = I_y + a^2 A + 2 a S_y$	(Eq 23)
----------------------------------	---------

Expresión matricial en Anexos.

Fórmulas de Steiner

En el caso particular en que el par de ejes coordenados del que se conocen las características geométricas sea un par de ejes baricéntricos, el cálculo de las características geométricas del nuevo par de ejes paralelo al anterior se simplifica.

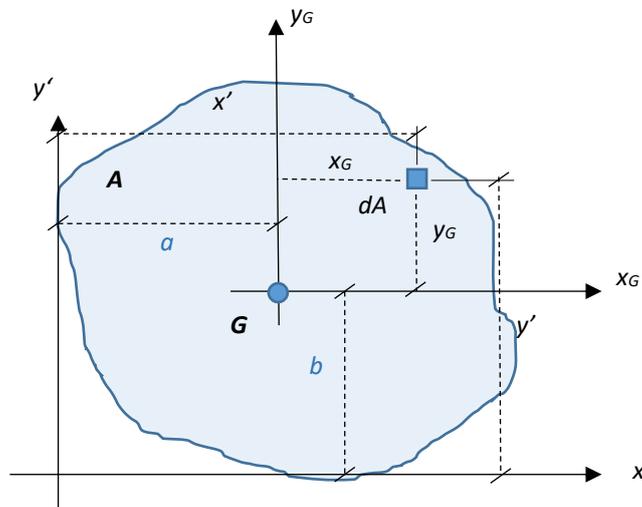


Figura 15. Traslación de ejes baricéntricos

Los términos afectados por momentos estáticos se anulan, ya que se hacen cero para ejes baricéntricos. Esto es:

Momento centrífugo

$$I_{x'y'} = I_{x_G y_G} + \cancel{b S_{y_G}} + \cancel{a S_{x_G}} + a b A = 0$$

$I_{x'y'} = I_{x_G y_G} + a b A$	(Eq 24)
----------------------------------	---------

Momentos de inercia

$$I_{x'} = I_{x_G} + b^2 A + \cancel{2 b S_{x_G}} = 0$$

$I_{x'} = I_{x_G} + b^2 A$	(Eq 25)
----------------------------	---------

$$I_{y'} = I_{y_G} + a^2 A + \cancel{2 a S_{y_G}} = 0$$

$I_{y'} = I_{y_G} + a^2 A$	(Eq 26)
----------------------------	---------

Las fórmulas anteriores son conocidas como fórmulas de Steiner y son muy utilizadas.

De la observación de las fórmulas de Steiner se concluye que: *los momentos de 2do orden baricéntricos son siempre menores que respecto a cualquier otro par de ejes paralelos a los primeros.*

Giro de ejes

Se conocen las características geométricas de la superficie A respecto de un par de ejes ortogonales x, y . Se desea obtener las mismas respecto de un par de ejes ortogonales x', y' , que comparten el origen con los primeros, y que están girados respecto de ellos un ángulo α .

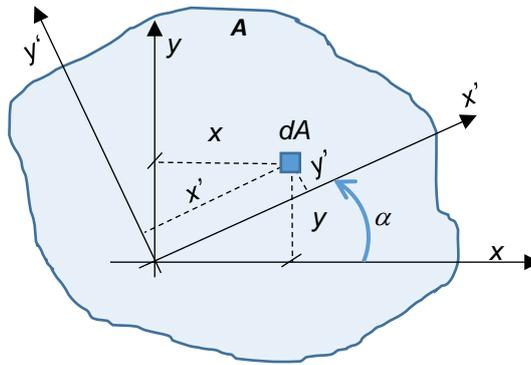


Figura 16. Giro de ejes

Se debe encontrar la forma de expresar las coordenadas del sistema rotado en función de las coordenadas conocidas y el ángulo α conocido.

Analizando la geometría² se llega a que:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' &= y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{aligned} \tag{Eq 27}$$

Reemplazando en las definiciones de los momentos de segundo orden:

Momento centrífugo girado:

$$\begin{aligned} I_{x'y'} &= \int x' y' dA \\ &= \int (x \cos \alpha + y \sin \alpha) (y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA \end{aligned}$$

Valiéndose de las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) &= \sin(2\alpha) \\ \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 &= \cos(2\alpha) \end{aligned} \tag{Eq 28}$$

Se obtiene:

$$I_{x'y'} = \cos(2\alpha) \int x y dA - \frac{\sin(2\alpha)}{2} \int x^2 dA + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \int y^2 dA$$

$I_{x'y'} = \cos(2\alpha) I_{xy} - \frac{\sin(2\alpha)}{2} (I_y + I_x)$	(Eq 29)
---	---------

Momentos de inercia girados:

Para I_x :

² Detalle en Anexos

$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA$$

$$= -\sin(2\alpha) \int x y dA + \sin(\alpha)^2 \int x^2 dA + \cos(\alpha)^2 \int y^2 dA$$

$$I_{x'} = \sin(\alpha)^2 I_y + \cos(\alpha)^2 I_x - \sin(2\alpha) I_{xy} \quad (\text{Eq 30})$$

Análogamente para $I_{y'}$:

$$I_{y'} = \int x'^2 dA = \int (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA$$

$$= \sin(2\alpha) \int x y dA + \cos(\alpha)^2 \int x^2 dA + \sin(\alpha)^2 \int y^2 dA$$

$$I_{y'} = \cos(\alpha)^2 \cdot I_y + \sin(\alpha)^2 \cdot I_x + \sin(2\alpha) I_{xy} \quad (\text{Eq 31})$$

Expresión matricial en Anexos.

Determinación del eje conjugado de inercia

Dada una figura para la cual se conocen las características geométricas referidas a una terna ortogonal x, y . Se desea conocer para un eje u , que forma un ángulo α con el eje x de la terna conocida, su eje conjugado. Es decir, se desea conocer la inclinación de un eje v tal que el momento centrífugo $I_{uv} = 0$.

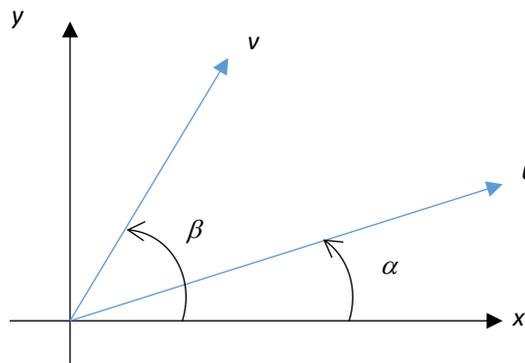


Figura 17. Conjugado de inercia

Se obtiene la inclinación β del eje v de la siguiente expresión³:

$$\tan(\beta) = \frac{I_x - I_{xy} \cdot \tan(\alpha)}{I_{xy} - I_y \cdot \tan(\alpha)} \quad (\text{Eq 32})$$

Determinación de ejes y momentos principales de inercia

Ejes principales de inercia

Los ejes principales de inercia son aquel par de ejes ortogonales para los cuales el momento centrífugo se anula. Esto implica que, de todos los pares de ejes ortogonales que tienen origen en el mismo punto, los principales de inercia alcanzan un máximo y un mínimo respectivamente.

Dada una figura cuyas características geométricas son conocidas para un par de ejes ortogonales x, y , se quiere encontrar la orientación α_0 respecto de éstos, de la terna que maximice o minimice los momentos de inercia. El ángulo α_0 se obtiene de derivar respecto de α e igualar a cero las expresiones de momento de inercia obtenidas para la rotación de ejes ortogonales. Esto es:

³ Su deducción no se encuentra desarrollada en este texto.

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = 0 \quad \text{O bien} \quad \frac{dI_{y'}}{d\alpha} = 0 \quad (\text{Eq 33})$$

Derivando e igualando a cero la Eq. 30:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{x'}}{d\alpha} = 0 &= \frac{d \sin(\alpha)^2}{d\alpha} \cdot I_y + \frac{d \cos(\alpha)^2}{d\alpha} \cdot I_x - \frac{d \sin(2\alpha)}{d\alpha} \cdot I_{xy} \\ 0 &= \sin(2\alpha_0) \cdot I_y - \sin(2\alpha_0) \cdot I_x - 2 \cdot \cos(2\alpha_0) \cdot I_{xy} \\ 2 \cdot \cos(2\alpha_0) \cdot I_{xy} &= \sin(2\alpha_0) \cdot (I_y - I_x) \\ \frac{2 \cdot I_{xy}}{(I_y - I_x)} &= \frac{\sin(2\alpha_0)}{\cos(2\alpha_0)} = \tan(2\alpha_0) \end{aligned}$$

$$\tan(2\alpha_0) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{(I_y - I_x)} \quad (\text{Eq 34})$$

La dirección α_0 hallada corresponde a la inclinación respecto del eje x conocido de uno de los ejes principales de inercia. La inclinación del otro es el perpendicular, es decir: $\alpha_0 + 90^\circ$.

Los ejes principales de inercia son **conjugados y ortogonales**, por definición. Es decir que el momento centrífugo es nulo para el par de ejes principales.

Es fácil de deducir que todo eje de simetría y sus perpendiculares son principales de inercia.

Momentos principales de inercia

Reemplazando el α_0 que maximiza el valor del momento de inercia en la ecuación de rotación de ejes, se obtienen los momentos de inercia máximos y mínimos o momentos principales de inercia: I_I , I_{II} , respectivamente.

Utilizando las identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)^2 &= \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \\ \sin(\alpha)^2 &= \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \end{aligned} \quad (\text{Eq 35})$$

Se parte de la Eq. 30, que define el momento de inercia rotado un ángulo α :

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \sin(\alpha)^2 I_y + \cos(\alpha)^2 I_x - \sin(2\alpha) I_{xy} \\ &= \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \cdot I_y + \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \cdot I_x - \sin(2\alpha) I_{xy} \\ &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{\cos(2\alpha)}{2} \cdot (I_x - I_y) - \sin(2\alpha) I_{xy} \end{aligned}$$

Reemplazando el α por α_0 :

$$\begin{aligned} I_{max} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \\ I_{min} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \end{aligned} \quad (\text{Eq 36})$$

O en forma compacta:

$$I_{I,II} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (\text{Eq 37})$$

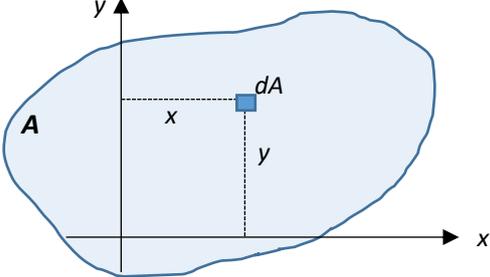
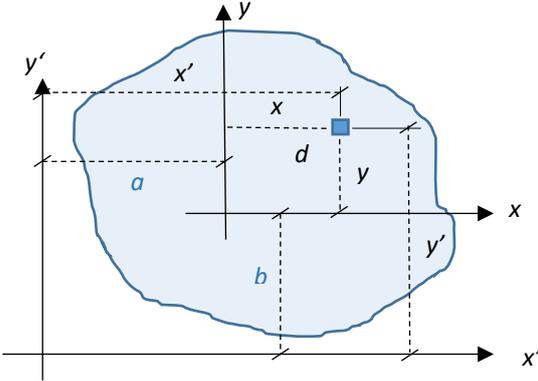
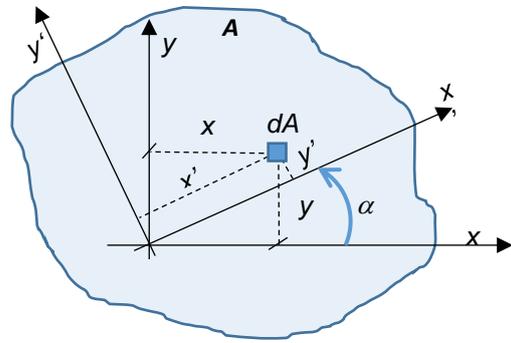
Los momentos de inercia

Del análisis de las fórmulas de Steiner se obtiene que los momentos de inercia respecto del **baricentro** son los mínimos que se pueden obtener de la figura, de forma que el momento principal baricéntrico es el mínimo de la figura en todo el plano.

Son de particular interés para el comportamiento de las piezas los **ejes principales de inercia baricéntricos**, es decir, cuyo origen es el baricentro de la figura.

ANEXOS

Hoja de fórmulas

	<p>Momentos de 1er orden</p> $S_x = \int y \, dA$ $S_y = \int x \, dA$	<p>Baricentro</p> $y_G = \frac{S_x}{A}$ $x_G = \frac{S_y}{A}$
	<p>Momentos de 2do orden</p> $I_x = \int y^2 \, dA$ $I_y = \int x^2 \, dA$ $I_{xy} = \int x y \, dA$ $I_p = \int r^2 \, dA = I_x + I_y$	<p>Radios de giro</p> $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ $i_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}}$
<p>Transformaciones de ejes</p>		
	<p style="text-align: center;">Traslación</p> $I_{x'} = I_x + b^2 A + 2 b S_x$ $I_{y'} = I_y + a^2 A + 2 a S_y$ $I_{x'y'} = I_{xy} + b S_y + a S_x + a b A$ <p style="text-align: center;">Stainer</p> $I_{x'} = I_{x_G} + b^2 A$ $I_{y'} = I_{y_G} + a^2 A$ $I_{x'y'} = I_{x_G y_G} + a b A$	
	<p style="text-align: center;">Rotación</p> $I_{x'} = \sin(\alpha)^2 I_y + \cos(\alpha)^2 I_x - \sin(2\alpha) I_{xy}$ $I_{y'} = \cos(\alpha)^2 I_y + \sin(\alpha)^2 I_x + \sin(2\alpha) I_{xy}$ $I_{x'y'} = \cos(2\alpha) I_{xy} - \frac{\sin(2\alpha)}{2} (I_y + I_x)$ <p style="text-align: center;">Conjugado de inercia</p> $\tan(\beta) = \frac{I_x - I_y \cdot \tan(\alpha)}{I_{xy} - I_y \cdot \tan(\alpha)}$ <p style="text-align: center;">Ejes principales de inercia</p> $\tan(2\alpha_0) = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}$ $I_{I,II} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}$	

Determinación de coordenadas rotadas

Se analiza la coordenada x' :

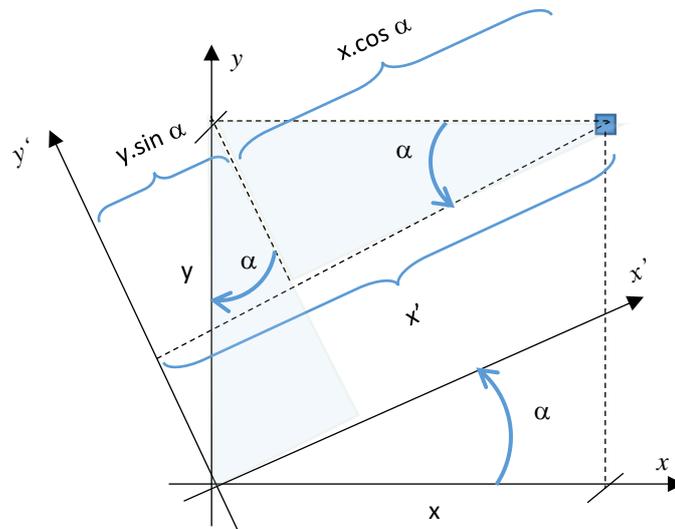


Figura 1. Coordenada x' en función de x , y y α

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

La coordenada y' :

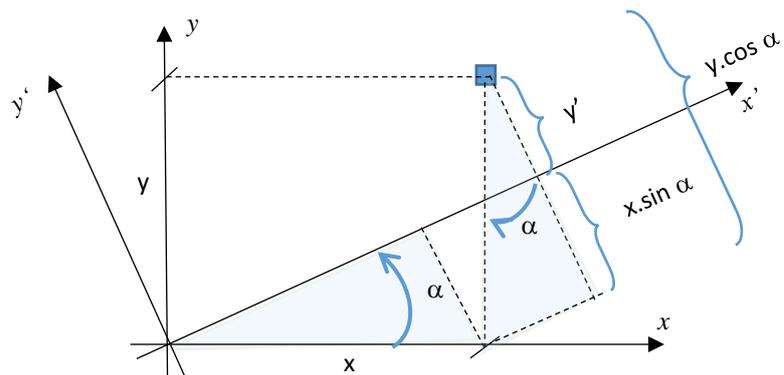


Figura 2. Coordenada y' en función de x , y y α

$$y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

Transformaciones de ejes matricialmente

Utilizando las mismas figuras de análisis y las mismas fórmulas se puede expresar como matriz transformación a los cambios de ejes.

Traslación

$$I_{x'y'} = I_{xGyG} + a \cdot b \cdot A$$

$$I_{x'} = I_{xG} + b^2 \cdot A$$

$$I_{y'} = I_{yG} + a^2 \cdot A$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} I_{x'} \\ I_{y'} \\ I_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^2 \\ a^2 \\ a \cdot b \end{bmatrix} \cdot A$$

Rotación

$$I_{x'y'} = \cos(2\alpha) I_{xy} - \frac{\sin(2\alpha)}{2} (I_y - I_x)$$

$$I_{x'} = \sin(\alpha)^2 \cdot I_y + \cos(\alpha)^2 \cdot I_x - \sin(2\alpha) I_{xy}$$

$$I_{y'} = \cos(\alpha)^2 \cdot I_y + \sin(\alpha)^2 \cdot I_x + \sin(2\alpha) I_{xy}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} I_{x'} \\ I_{y'} \\ I_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 & \sin(\alpha)^2 & -\sin(2\alpha) \\ \sin(\alpha)^2 & \cos(\alpha)^2 & \sin(2\alpha) \\ \frac{\sin(2\alpha)}{2} & -\frac{\sin(2\alpha)}{2} & \cos(2\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_{xy} \end{bmatrix}$$