

Departamento de Estabilidad

84.02/64.01 ESTABILIDAD I

DIAGRAMAS DE CARACTERÍSTICAS

Ing. Carolina Pérez Taboada¹

¹ JTP del Dto. de Estabilidad, Facultad de Ingeniería, UBA

Índice de contenidos

Fuentes de consulta	2
Objetivos	3
Esfuerzos característicos	3
Reacciones de vínculo interno	3
Esfuerzos característicos	4
Ternas locales y convención de signos	4
Diagramas característicos	6
Diagramas de características en el plano	6
Relaciones diferenciales en el plano	6
Procedimiento y recomendaciones para el trazado	8
Valores que se conocen de antemano	9
Relaciones diferenciales en el espacio	10
Trazado en el espacio	11
Resumen y chequeo	12
Pasos a seguir	12
Lista de verificación (checklist)	12

Fuentes de consulta

El presente apunte se ha confeccionado en base a la bibliografía que se detalla a continuación. Para mayor profundidad o detalles, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos, favor de recurrir a las fuentes.

- R. C. Hibbeler (2004) *Mecánica vectorial para ingenieros - Estática*, México, Pearson Educación
- Pico, Peralta, Ciancio, Montanaro (2013) *Estática*, Tandil, Buenos Aires, Argentina, UNICEN

Diagramas de características

Objetivos

Los objetivos del presente documento son que el estudiante:

- Comprenda la razón del cálculo de los esfuerzos característicos en una sección
- Pueda trasladar el concepto de reacciones de vínculo interno y lo relacione con el de esfuerzo interno en la sección transversal de una pieza
- Incorpore las relaciones diferenciales entre los esfuerzos característicos
- Identifique los puntos singulares, tanto de discontinuidades geométricas como discontinuidades de cargas.
- Sepa trazar los diagramas de esfuerzos característicos axil, corte y momentos en el plano y en el espacio
- Identifique las fibras traccionadas y comprimidas de una sección sometida a esfuerzos axiales o de momentos flexores.

Esfuerzos característicos

Se ha indicado anteriormente que en Estabilidad I se estudiarán estructuras formadas por barras. Se recuerda que se le llama barra a un elemento estructural donde una dimensión prevalece sobre las otras dos.

El diseño de cualquier elemento estructural o mecánico requiere conocer las fuerzas que actúan dentro de él, para saber si es capaz de soportar las cargas a las que se encuentra sometido. El primer paso para conocer el comportamiento de las fuerzas dentro del material, es conocer su resultante, que no son otra cosa que las reacciones de vínculo internas. Para ello se utilizará el método de las secciones.

Reacciones de vínculo interno

Se tiene un elemento de barra sobre el que actúa un sistema de fuerzas en equilibrio SF .

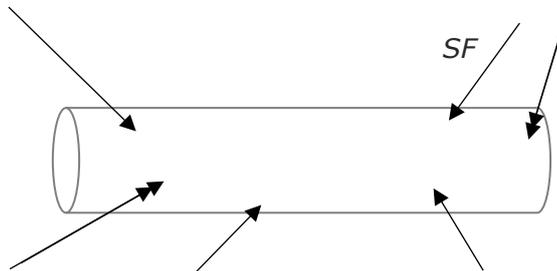


Figura 1. Cuerpo libre sobre el que actúa un sistema de fuerzas SF

Si se practica un corte por una sección transversal al eje de la barra y se separa una parte respecto de la otra, será necesario aplicarle el efecto que una parte estaba ejerciendo sobre la opuesta para restablecer el equilibrio.

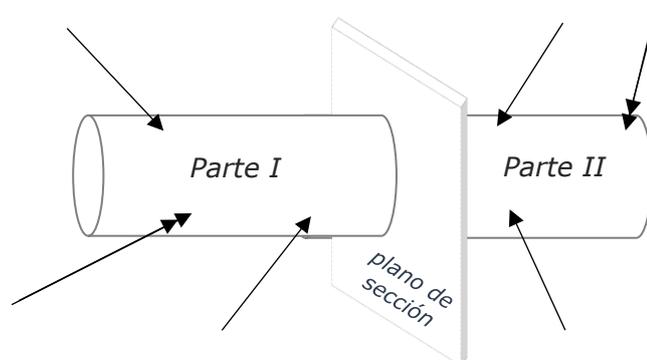


Figura 2. Corte por un plano perpendicular a la barra que separa el cuerpo en dos partes

Es decir que al separar una parte respecto de la otra, para que las dos partes sigan estando en equilibrio, debe reemplazarse el efecto de las fuerzas internas que estaban siendo ejercidas por el material. A este efecto se le llama reacciones de vínculo interno (RVI).

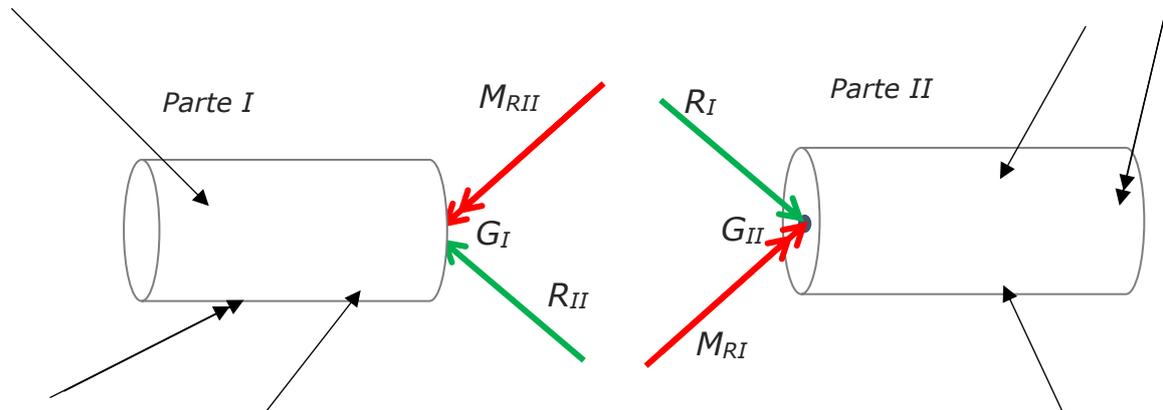


Figura 3. Restitución del equilibrio de las partes separadas mediante la resultante de fuerzas y momentos que está actuando en la parte opuesta, aplicado en el baricentro.

El valor de las reacciones de vínculo interno sobre una de las partes, por ejemplo *Parte I*, será igual a la resultante de fuerzas R_{II} y momentos M_{RII} del sistema de fuerzas que actúa sobre la otra parte, *Parte II*, aplicado en el baricentro de la sección transversal G_I . Así mismo, sobre la otra parte, la acción a aplicar para restituir el equilibrio será igual y contraria a la de la sección separada.

Para restituir el equilibrio en la Parte I Para restituir el equilibrio en la Parte II

$$\begin{aligned} \vec{R}_{II} &= \sum F_{\text{Parte II}} & \vec{R}_I &= \sum F_{\text{Parte I}} \\ \vec{M}_{RII} &= \sum M_{F_{\text{Parte II}}}^{G_I} & \vec{M}_{RI} &= \sum M_{F_{\text{Parte I}}}^{G_{II}} \end{aligned} \quad (\text{Eq 1})$$

Esfuerzos característicos

A estas reacciones de vínculo interno se las puede descomponer según una terna local de referencia, donde uno de los ejes será paralelo al eje de la barra y los otros dos pertenecientes al plano de la sección transversal.

Dado un cuerpo en sometido a un sistema de fuerzas en equilibrio, al que se lo separa en dos partes mediante una sección transversal a su eje, se le llama **esfuerzo o sollicitación característica** al par de fuerzas y/o par de momentos opuestos reducidos en el baricentro de la sección, necesarios para restituir el equilibrio de cada una de las partes. Estos esfuerzos reciben diferentes nombres según su orientación respecto del eje de la barra y el plano de la sección.

Se le llama:

- **Esfuerzo Normal N**, a las componentes paralelas al eje de la barra.
- **Esfuerzos de Corte**, cizallamiento o cortante **Q**, a las componentes de fuerza pertenecientes al plano de la sección.
- **Momentos Flexores M_{fi}** a los momentos con componentes dentro del plano de la sección.
- **Momento Torsor M_T** , al momento de dirección paralela al eje de la barra.

Ternas locales y convención de signos

No es suficiente con conocer el valor del esfuerzo, sino también debemos saber cómo es que está actuando. Es necesario entonces definir una terna y una convención de signos para indicar cuál es el efecto sobre la pieza.

Cada orientación de las barras que conforman la estructura tendrá una terna local, de manera que uno de sus ejes, se conviene en llamarlo x , debe coincidir con el eje de la barra. Dado que la mayor parte de las fuerzas actuantes son gravitatorias, el eje vertical suele ser positivo hacia abajo. Para

que en terna derecha el eje restante sea saliente, entonces debe nombrarse el eje vertical hacia abajo z y el eje horizontal saliente y .²

Se conviene adaptar la siguiente convención en terna derecha para cada orientación de barra:

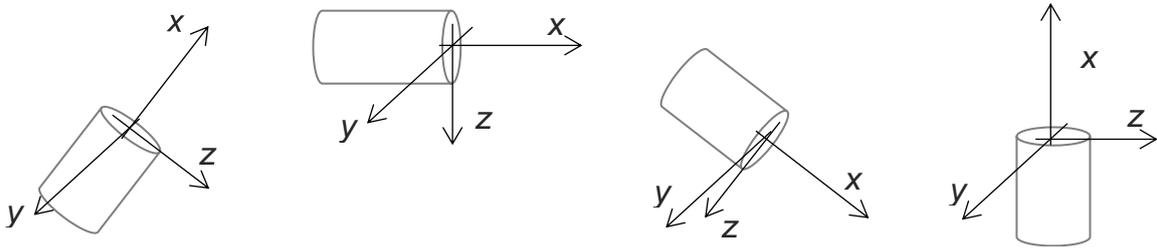


Figura 4. Ternas convenidas

Para poder visualizar mejor los esfuerzos en una sección dada, es conveniente representarlos en una rebanada de barra, de manera que la rebanada se encuentra en equilibrio y los pares de fuerzas o de momentos que forman el esfuerzo característico quedan expuestos sobre ambas caras de la rebanada.

Se conviene que serán positivos los siguientes esfuerzos:

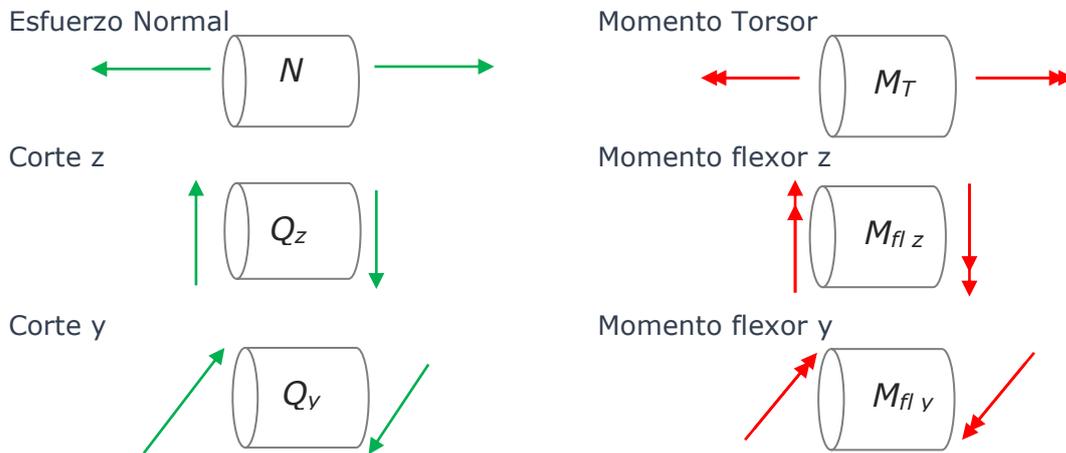


Figura 5. Convención de esfuerzos positivos

Se podría definir como cara positiva a aquella para la cual los esfuerzos positivos coinciden con la terna. En el caso de una barra horizontal, practicada una sección que separa en dos partes la barra, la cara positiva es la que queda sobre la parte que quedó a izquierda del corte.

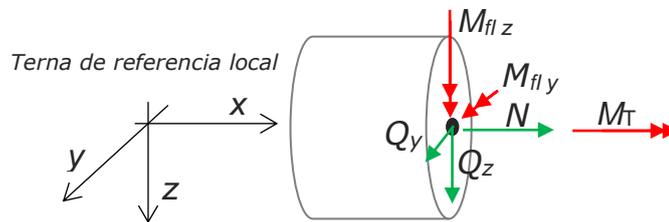


Figura 6. Cara positiva

² Otra premisa que debe considerarse es que es conveniente orientar los ejes y y z de acuerdo con los ejes principales de inercia de la sección transversal de la barra. Sin embargo es corriente que los ejes principales coincidan con las direcciones vertical y horizontal.

Diagramas característicos

Si se considera cada uno de estos esfuerzos por separado se puede graficar, sobre un esquema de la estructura de barras, el valor del esfuerzo en cada una de las secciones. A esta representación gráfica se le llama diagrama de características.

Esta es una manera muy elocuente de determinar la sección para la cual cada esfuerzo asume valores máximos y mínimos. Estos valores máximos y mínimos de un esfuerzo en cada elemento estructural determinan cuál es la sección más comprometida de la pieza. Estos valores son datos de entrada para el dimensionamiento y verificación del elemento estructural

Diagramas de características en el plano

Si la estructura y las cargas pueden modelarse contenidas en un plano, entonces las fuerzas internas de la pieza también pertenecen al mismo plano.

Los esfuerzos característicos que pueden desarrollarse en el plano son: el esfuerzo normal, el esfuerzo de corte perpendicular al normal, perteneciente al plano, y el momento flexor en el eje perpendicular al plano.

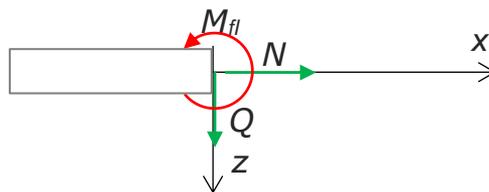


Figura 7. Esfuerzos característicos en el plano

Relaciones diferenciales en el plano

Los diagramas de cada esfuerzo representan el valor del esfuerzo en cada sección. Para conocer cómo son las funciones que indican la variación de los diagramas, se parte del equilibrio de una sección de tamaño diferencial de la barra, sometida a todas las acciones posibles en el plano cuyas funciones sean continuas y derivables.

Dada una estructura de barras plana en equilibrio sometida a un estado de cargas coplanar a la estructura, se considera una sección de ancho diferencial dx . Esta se encuentra sometida a la acción de cargas de distribución continua y derivable:

- Una carga distribuida q_z perpendicular al eje de la barra, de signo positivo según la terna local, de distribución cualquiera
- Una carga distribuida q_x , paralela al eje de la barra, de signo positivo según la terna local, y de distribución cualquiera

En este análisis no aplican las cargas concentradas, ya que la función que las describe no es continua y derivable.

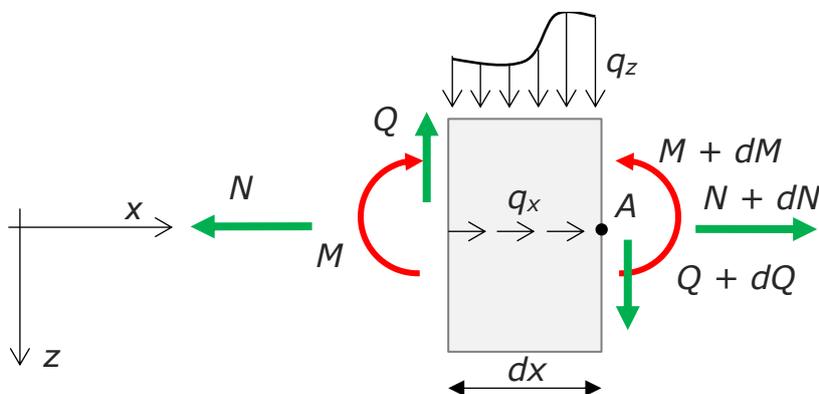


Figura 8. Elemento diferencial de barra en el plano

A la izquierda de la sección se tienen los valores de fuerza y momento de las reacciones de vínculo interno, descompuestas según la terna local, esto es N , Q y M . En el sentido de avance del eje x , estos valores se van modificando debido a que existen cargas actuando sobre la barra. De este modo, en un ancho diferencial de barra dx , a la derecha de la sección, las reacciones de vínculo interno son opuestas las que teníamos a la izquierda más la variación en ese tramo: $N + dN$, $Q + dQ$ y $M + dM$.

Como se había partido de que la estructura de la que fue extraída esta rebanada estaba en equilibrio, es posible afirmar que la rebanada también se encuentra en equilibrio.

Se plantean las 3 ecuaciones de equilibrio en el plano:

$$\sum F_x = 0 = -N + q_x \cdot dx + N + dN \quad (\text{Eq 2})$$

$$\sum F_z = 0 = -Q + q_z \cdot dx + Q + dQ \quad (\text{Eq 3})$$

$$\sum M^A = 0 = -M - Q \cdot dx + q_z \cdot dx \cdot a \cdot dx + M + dM \quad (\text{Eq 4})$$

Notar en la última ecuación que el equilibrio de momentos se considera respecto del punto A , de modo que las fuerzas que realizan momento no son las que tienen adicionada la variación. El brazo con el que la carga distribuida q_z ejerce momento es una proporción de dx , que representamos como $a \cdot dx$, siendo a un valor entre 0 y 1.

De la simplificación y análisis de las ecuaciones se obtienen las siguientes conclusiones:

El esfuerzo normal varía inversamente al valor de carga distribuida paralelo al eje de la barra: $\frac{dN}{dx} = -q_x \quad (\text{Eq 5})$

El corte varía inversamente al valor de carga distribuida perpendicular al eje de la barra: $\frac{dQ}{dx} = -q_z \quad (\text{Eq 6})$

El momento varía según el valor del corte. $\frac{dM}{dx} = Q \quad (\text{Eq 7})$

Para llegar a la Eq 7, en la Eq 4 se realizó la siguiente simplificación: dado que existe un término afectado por un diferencial de 2do orden dx^2 , frente al término contiguo afectado por el mismo diferencial de un orden inferior dx , es posible despreciar el término con el diferencial de 2do orden frente al de 1er orden. Esto es:

$$\sum M^A = 0 = -Q \cdot dx + \cancel{q_x \cdot a \cdot dx^2}^{\cong 0} + dM$$

De estas conclusiones se desprenden una serie de corolarios:

El diagrama de esfuerzo normal tiene una variación que es un orden superior a la variación de la carga paralela al eje de la barra. Es decir que el valor de la carga en x en cada sección es la tangente del diagrama normal. Si no existe carga distribuida paralela al eje de la barra el esfuerzo normal es uniforme (variación cero).

El diagrama de corte tiene una variación que es un orden superior a la variación de la carga perpendicular al eje de la barra. Es decir que el valor de la carga en x en cada sección es la tangente del diagrama de corte. Si no existe carga distribuida perpendicular al eje de la barra, el corte es uniforme. Si la carga perpendicular al eje de la barra es uniforme, el corte tiene variación lineal. Si la carga tiene variación lineal, el corte será cuadrático.

El diagrama de momentos tiene una variación que es un orden superior a la variación del corte. Es decir, que la tangente del diagrama de momentos en cada sección es igual al valor del corte en esa misma sección. Si el corte es constante, el momento tendrá variación lineal. Si el corte es lineal, el momento tendrá variación cuadrática. Si el corte tiene variación cuadrática, el momento será una parábola cúbica. Además, los puntos donde el corte se hace cero representan para el diagrama de momentos puntos donde existen máximos y mínimos para el momento, que serán las secciones de diseño de la pieza a la flexión. Por ser el diagrama de cargas la derivada 2da del diagrama de momentos, **la concavidad del diagrama de momentos sigue el sentido de las cargas.**

Este análisis es válido solamente en tramos de barra entre discontinuidades

Las discontinuidades pueden ser de dos tipos:

- Discontinuidades geométricas: nudos, quiebres, encuentros
- Discontinuidades de cargas: cargas concentradas o momentos aplicados, esto incluye los puntos de aplicación de los vínculos.

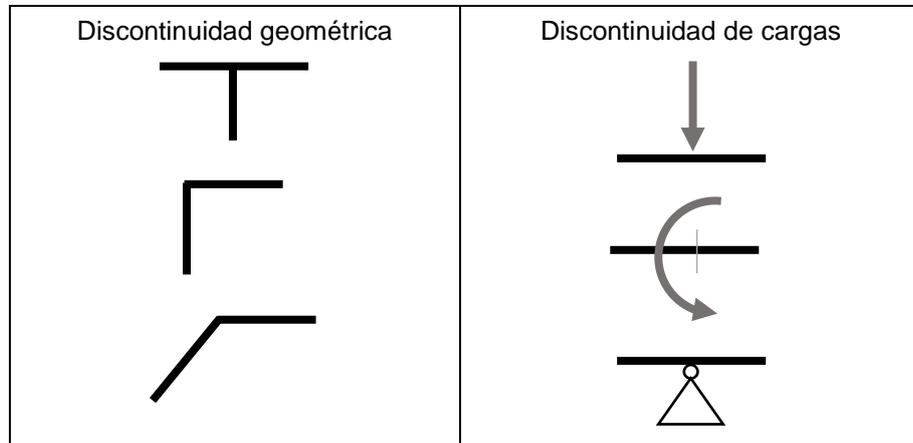


Figura 9. Discontinuidades donde no se cumplen las relaciones diferenciales

Procedimiento y recomendaciones para el trazado

Se parte del diagrama de cuerpo equilibrado (DCE). Debe estar dibujado en escala, poniendo de manifiesto valores de dimensiones y de cargas. No reemplazar las cargas distribuidas por sus resultantes. Para realizar los Diagramas de Características (DC) no es necesario reconocer las fuerzas activas de las reactivas. Sí es imprescindible que la estructura se encuentre en equilibrio.

Sobre cada una de las barras del DCE debe establecerse la terna local adoptada. Si bien se utilizó anteriormente una terna global para calcular las RVE, ésta deja de tener sentido en el trazado de los DC. Se recomienda trabajar con las ternas convenidas en la Figura 4.

Se dibuja un esquema en escala de la estructura de barras por cada uno de los diagramas a trazar. Esto es: un esquema para el diagrama de esfuerzos normales, un esquema para el diagrama de corte y un esquema para el diagrama de momentos. Es altamente recomendable que el DCE pueda quedar a la vista al momento de realizar los diagramas. También es muy útil que al realizar el diagrama de momentos pueda quedar a la vista el diagrama de corte.

Se identifican las discontinuidades y se indican los valores de los esfuerzos. Antes y después de cada discontinuidad se calculan los valores de los esfuerzos y se indican en escala adecuada sobre los esquemas, abatiendo sobre el eje z de la terna cada esfuerzo, del lado de la barra que corresponda según el signo del esfuerzo.

Se unen estos puntos singulares respetando las variaciones entre ellos según las relaciones características. Se trazan los diagramas, uno a uno, partiendo de la barra que quede más abajo a la izquierda, en el sentido de avance del eje x, uniendo los valores calculados antes y después de las discontinuidades. Es importante respetar la concavidad de los diagramas.

Valores que se conocen de antemano

Antes de comenzar a trazar los diagramas hay valores sobre los que no puede haber dudas, dado que se parte del equilibrio. Estos son: los valores de algunas solicitaciones en los extremos de barra y los valores de algunas solicitaciones en los vínculos entre barras.

Esto es:

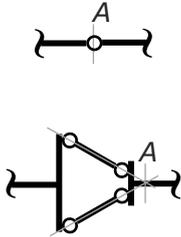
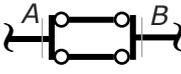
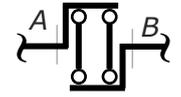
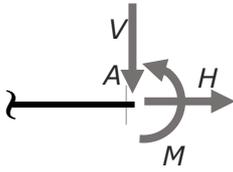
<p>En donde exista una articulación propia el valor del momento es igual a cero.</p>		$M^A = 0$
<p>En donde existan bielas paralelas, paralelas al eje de la barra (articulación impropia en la dirección de la barra) el corte a un lado y otro del vínculo es cero.</p>		$Q^A = Q^B = 0$
<p>En donde existan bielas paralelas, perpendiculares al eje de la barra (articulación impropia en la dirección perpendicular a la de la barra) el esfuerzo normal a un lado y otro del vínculo es cero.</p>		$N^A = N^B = 0$
<p>En los extremos de barra el valor del esfuerzo será igual al valor de la carga o momentos aplicados. Si no hay cargas o momentos sobre el extremo de la barra, el valor de los esfuerzos es igual a cero.</p>		$M^A = 0;$ $Q^A = 0;$ $N^A = 0$
		$M^A = M;$ $Q^A = V;$ $N^A = H$

Tabla 1. Valores de fácil chequeo

Relaciones diferenciales en el espacio

De manera análoga a como se procedió para determinar las relaciones entre los esfuerzos característicos en el plano, en el espacio estas relaciones se obtienen de plantear las 6 ecuaciones de equilibrio en el espacio. Aparece el momento torsor, un corte y un momento flector más. En total las características en el espacio son 6.

Dada una estructura de barras en equilibrio sometida a un estado de cargas cualquiera, se considera una sección de ancho diferencial dx . Esta se encuentra sometida a la acción de cargas de distribución continua y derivable:

- Una carga distribuida q_z perpendicular al eje de la barra, de signo positivo según la terna local, de distribución cualquiera
- Una carga distribuida q_y perpendicular al eje de la barra, de signo positivo según la terna local, de distribución cualquiera
- Una carga distribuida q_x , paralela al eje de la barra, de signo positivo según la terna local, y de distribución cualquiera
- Un momento distribuido m_x , paralelo al eje de la barra, positivo según la terna local.

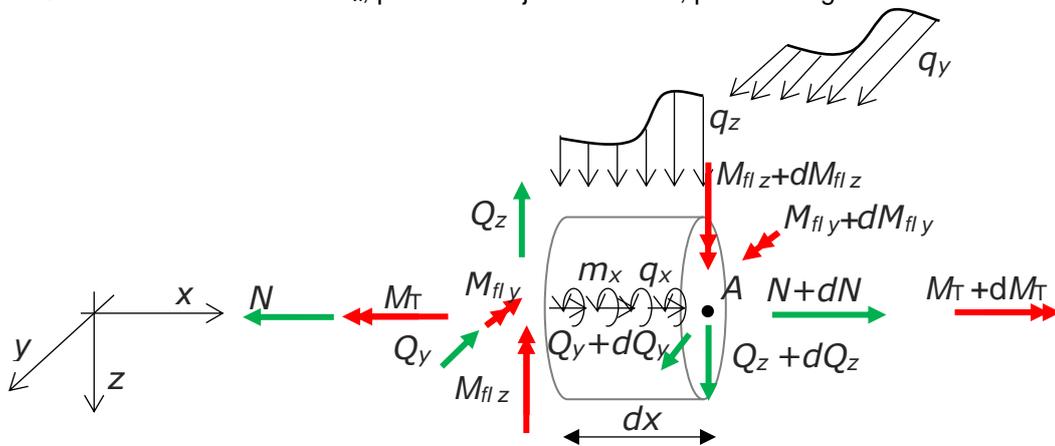


Figura 10. Elemento diferencial de barra en el espacio³

Planteo de las ecuaciones de equilibrio en el espacio:

$$\sum F_x = 0 = -N + q_x \cdot dx + N + dN \quad (\text{PL}) \quad (\text{Eq 8})$$

$$\sum F_y = 0 = -Q_y + q_y \cdot dx + Q_y + dQ_y \quad (\text{Eq 9})$$

$$\sum F_z = 0 = -Q_z + q_z \cdot dx + Q_z + dQ_z \quad (\text{PL}) \quad (\text{Eq 10})$$

$$\sum M_x^A = 0 = -M_T + m_x \cdot dx + M_T + dM_T \quad (\text{Eq 11})$$

$$\sum M_y^A = 0 = -M_{fl,y} - Q_z \cdot dx + q_z \cdot dx \cdot a \cdot dx + M_{fl,y} + dM_{fl,y} \quad (\text{PL}) \quad (\text{Eq 12})$$

$$\sum M_z^A = 0 = -M_{fl,z} + Q_y \cdot dx - q_y \cdot dx \cdot b \cdot dx + M_{fl,z} + dM_{fl,z} \quad (\text{Eq 13})$$

Igual que en el plano, el equilibrio de momentos se considera respecto del punto A, de modo que las fuerzas que realizan momento no sean las que tienen además la variación.

En la Eq 12, el brazo con el que la carga distribuida q_z ejerce momento M_y es una proporción de dx , que representamos como $a \cdot dx$, siendo a un valor entre 0 y 1.

³ En esquemas espaciales se hace difícil identificar los momentos graficados según el giro al que están asociados. Por lo tanto se opta por utilizar la notación de doble flecha.

En la Eq 13, el brazo con el que la carga distribuida q_y ejerce momento M_z es una proporción de dx , que representamos como $b dx$, siendo b un valor entre 0 y 1.

De estas 6 ecuaciones, las que corresponden al caso plano están indicadas con (PL).

De la simplificación y análisis de las ecuaciones se obtienen las siguientes conclusiones:

El esfuerzo normal varía inversamente al valor de carga distribuida paralelo al eje de la barra: $\frac{dN}{dx} = -q_x$ (Eq 14)

El corte varía inversamente al valor de carga distribuida perpendicular al eje de la barra: $\frac{dQ_y}{dx} = -q_y$ (Eq 15)

$\frac{dQ_z}{dx} = -q_z$ (Eq 16)

El momento torsor varía inversamente al valor de momento distribuido paralelo al eje de la barra: $\frac{dM_T}{dx} = -m_x$ (Eq 17)

El momento flexor en dirección y varía según el valor del corte en dirección z. $\frac{dM_{fly}}{dx} = Q_z$ (Eq 18)

El momento flexor en dirección z varía inversamente al valor del corte en dirección y. $\frac{dM_{flz}}{dx} = -Q_y$ (Eq 19)

Para llegar a las Eq 18 y 19 fue necesario despreciar el término con el diferencial de 2do orden frente al de 1er orden de las ecuaciones Eq 12 y 13 respectivamente. Esto es:

$$\sum M_y^A = 0 = -M_{fly} - Q_z \cdot dx + \cancel{q_z \cdot a \cdot dx^2}^{\cong 0} + M_{fly} + dM_{fly}$$

$$\sum M_z^A = 0 = -M_{flz} + Q_y \cdot dx - \cancel{q_y \cdot b \cdot dx^2} + M_{flz} + dM_{flz}$$

Trazado en el espacio

El trazado de los diagramas de características en el espacio no tiene diferencias conceptuales con el trazado en el plano.

Se mencionan las siguientes cuestiones a tener en cuenta:

- Los diagramas de características en el espacio son 6 y pueden trazarse en la misma hoja según los siguientes pares: N y M_T , Q_z y M_y , Q_y y M_z . La primera pareja no guarda relación entre sí, sí lo hacen los otros dos pares de diagramas.
- Se adopta como convención que los diagramas de momentos se dibujan en el plano de deformación, no sobre el eje correspondiente.
- El momento M_y se deforma como una vela empujada por las cargas. En el caso de M_z la concavidad es contraria.

Resumen y chequeo

Pasos a seguir

- Realizar el análisis cinemático
- Calcular las RVE
- Trazar el DCE
- Realizar un esquema en escala por cada uno de los diagramas a trazar, dejando el DCE a la vista
- Calcular los valores singulares antes y después de las discontinuidades
- Unir los valores singulares según la variación de los diagramas que indican las relaciones características
- Chequear los valores que se saben de antemano

Lista de verificación (checklist)

Una vez que se obtiene el diagrama, es bueno realizar un chequeo de las características que deben cumplirse para detectar errores, si los hubiere. Si bien no es difícil saber si hubo errores, dado que en ese caso el diagrama no cierra, es bueno realizar una verificación de modo de detectar dónde puede encontrarse el error.

- ¿Hay cargas en los extremos de barra? ¿Las características correspondientes coinciden con los valores de carga?
- ¿Qué valor toman los esfuerzos en los vínculos entre barras? ¿El momento es cero en articulaciones propias? ¿El corte es cero en el caso de bielas paralelas a la barra? ¿El esfuerzo normal es cero en el caso de bielas paralelas perpendiculares a la barra?
- ¿Existen cargas distribuidas paralelas al eje de la barra? Si no, ¿N es uniforme?
- ¿Existen cargas concentradas paralelas al eje de la barra? ¿N tiene un salto en el lugar de aplicación de la carga? ¿El salto en N suma el mismo valor de la carga aplicada?
- ¿Existen cargas distribuidas perpendiculares al eje de la barra? ¿La forma del diagrama de Q es un grado mayor que la forma del diagrama de cargas correspondiente?
- ¿Existen cargas concentradas perpendiculares al eje de la barra? ¿Q tiene un salto en el lugar de aplicación de la carga? ¿El salto en Q suma el mismo valor de la carga aplicada?
- ¿El diagrama de M tiene un máximo local donde el diagrama de Q se hace cero?
- ¿La forma del diagrama de M es un grado mayor que el diagrama de Q?
- ¿El diagrama de M toma la forma de una vela empujada por las cargas a las que está sometido el esquema? (verificar concavidades)
- ¿Existen momentos aplicados? ¿M tiene un salto en el lugar de aplicación del momento? ¿El salto en M suma el mismo valor de la carga aplicada?

Para 3D además chequear:

- ¿Existen momentos paralelos al eje de la barra? Si no, ¿M_T es uniforme?
- ¿Se verifica la relación entre M_z y Q_y?
- ¿Se verifica la relación entre M_y y Q_z?