

Dado el siguiente problema diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \cos(\pi x)$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$y(-1) = 0$$

$$y(1) + \frac{dy}{dx}(1) = 1$$

- a) Discretice el problema matemático mediante el método de diferencias finitas a orden 2. Utilice un paso de discretización Δx arbitrario y uniforme, obteniendo al dividir el intervalo de trabajo en N segmentos. Justifique cada etapa de discretización

- b) Resuelva para el caso $N=4$

El intervalo $[-1, 1]$ tiene longitud 2

N segmentos $N+1$ nodos

$$\Delta x = \frac{2}{N}$$

Los nodos son

$$x_i = -1 + 2\Delta x i$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N$$

Fórmula centrada de segundo orden

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x_i} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2} = \cos(\pi x_i)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

Encuentro un sistema lineal para las incógnitas $y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$ porque y_0 y y_N están definidas por la frontera.

$$\text{L} \Rightarrow x_0 = -1 \quad y_0 = 0$$

$$x_N = 1$$

$$y(1) + y'(1) = 1$$

$$y'(x_N) \approx \frac{y_N - y_{N-1}}{\Delta x}$$

$$y_N + \frac{y_N - y_{N-1}}{\Delta x} = 1$$

Resuelvo para $N=4$

$$\Delta x = \frac{2}{4} = 0,5$$

Nodos: $x_0 = -1 \quad x_1 = -0,5 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 0,5 \quad x_4 = 1$

$$y_0 = 0$$

$$y_4 + \frac{y_4 - y_3}{0,5} = 1$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x_L} = \frac{y_{L-1} - 2y_L + y_{L+1}}{(\Delta x)^2} = \cos(\pi x)$$

$$L=1 \quad \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{(0,5)^2} = \cos(\pi x_1)$$

$$L=2 \quad \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{(0,5)^2} = \cos(\pi x_2)$$

$$L=3 \quad \frac{y_2 - 2y_3 + y_4}{(0,5)^2} = \cos(\pi x_3)$$

$$y_4 + \frac{y_4 - y_3}{(0,5)} = 1$$

$$y_4 - 1 = - \frac{y_4 - y_3}{(0,5)}$$

$$(y_4 - 1) \cdot 0,5 = - (y_4 - y_3)$$

$$(y_4) 0,5 - 0,5 = -y_4 + y_3$$

$$1,5 y_4 = y_3 + 0,5$$

$$y_4 = \frac{y_3}{1,5} + \frac{1}{3}$$

$$Y_0 - 2Y_1 + Y_2 = \cos(\pi x_1) \cdot 0,5^2$$

$$Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = \cos(\pi x_2) \cdot 0,5^2$$

$$Y_2 + \underbrace{-2Y_3}_{-\frac{4}{3}Y_3} + \frac{Y_3}{1,5} + \frac{1}{3} = \cos(\pi x_3) (0,5)^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1,33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi \cdot 0,5) \cdot 0,5^2 \\ \cos(\pi \cdot 0) \cdot 0,5^2 \\ \cos(\pi \cdot 0,5) \cdot 0,5^2 - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$-2Y_1 + Y_2 = 0,25$$

$$Y_1 - 2Y_2 = 0,25$$

$$Y_1 + \frac{2}{3} = 2,66Y_3 = 0,25$$

$$Y_2 + 1,33Y_3 = -\frac{1}{3}$$

$$Y_2 = -\frac{1}{3} + 1,33Y_3$$

$$Y_0 = 0 \quad Y_1 = -0,003 \quad Y_2 = -0,166 \quad Y_3 = 0,125$$

$$Y_4 = \frac{0,125}{1,5} + \frac{1}{3} = 0,416$$