UNIDAD 3: BRANCH AND BOUND- PETRICK.

(86:44) Técnica Digital Avanzada- Unidad 3.
Profesor: Ing. Miguel Antonio Martínez.

Selección de una cobertura óptima de Implicantes Primos.

Recuerde que Quine demostró que se pude obtener un costo mínimo de una función expresada como suma de producto considerando solo los implicantes primos de la misma. Nosotros dirigiremos nuestra atención a encontrar un subconjunto óptimo de Implicantes Primos con costo mínimo. O sea, buscaremos los Implicantes Primos que sean una **cobertura de la función.**

Recordando lo visto en el capítulo 1, haremos un ejemplo muy sencillo. Considérese la función siguiente:

$$f(x, y, z) = yz + x'y + y'z' + xyz + x'z'$$

Expresada esta función como suma completa queda:

$$x'y + x'z' + y'z' + yz.$$

Esta fórmula completa está formada por los Implicantes Primos de la función. Para saber cuál es la cobertura mínima u óptima hacemos la Tabla de Implicantes Primos. Recordar que esta tiene como filas los implicantes primos y como columnas los minitérminos de la función, quedando:

		0	2	3	4	7
	a(0, 2)	√	√			
	b(2, 3)		√	√		
*	c(3, 7)			√		√
*	d(0, 4)	√			√	
		√		√	√	√

Fácilmente se ve que los implicantes primos c y d son esenciales. Como no cubro todos los minitérminos, realizo la tabla de implicantes primos secundaria. Esta está conformada por los implicantes primos no esenciales y por los minitérminos no cubiertos, por lo tanto, queda:

	2
a(0, 2)	√
b(2, 3)	√

En este caso se ve que los implicantes primos secundarios son intercambiables, y por lo tanto me quedan dos funciones mínimas, que son:

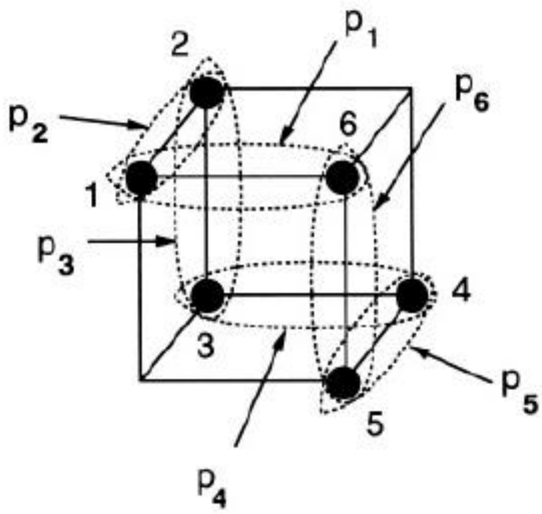
$$F_1 = y.z + \bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.\bar{z}$$

$$F_2 = y.z + \bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y$$

Desafortunadamente no siempre podemos encontrar una solución tan fácil como la anterior, por ejemplo, si tuviéramos una tabla de implicantes primos como la siguiente:

	1	2	3	4	5	6
p1	√					√
p2	√	√				
p3		√	√			
p4			√	√		
p5				√	√	
p6					√	√

Se ve que en esta función se ve que no se pueden eliminar filas ni elegir implicantes esenciales, por lo tanto, no se vislumbra columnas que formen parte de la solución. A este tipo de tablas se las llama **cíclicas o de núcleo cíclico.** En este ejemplo cada fila está cubierta por exactamente dos columnas y cada columna cubre dos filas. No hay razón aparente para preferir una columna sobre otra. Si vemos la representación de esta función en el cubo booleano nos queda:



Donde se aprecia mejor el fenómeno cíclico. Una forma de empezar a resolver esto es **elegir arbitrariamente una columna** y encontrar la mejor solución sujeta a la suposición que esa columna está seleccionada. Después suponemos que esa columna no está en la solución y buscar otro resultado. Luego comparamos las dos soluciones obtenidas y nos quedamos con la mejor,

Hemos visto en el ejemplo anterior reducción de la tabla de implicantes primos y ramificación en el caso de núcleos cíclicos. Antes de seguir con estos procedimientos podemos mencionar otra posible formulación del problema que es importante para nosotros. Podemos ver en nuestro ejemplo que la primera columna se puede escribir como la siguiente función:

$$P1 + p2$$

Esta función evalúa como 1 si p1 = 1 o p2 = 1 o ambos. Si nosotros interpretamos a pi = 1 como que la **fila pi está seleccionada**, vemos que la función es igual a 1 cuando la primera fila está cubierta y viceversa. Procediendo de la misma manera para todas las filas. Las expresiones así obtenidas son funciones de conmutación que deben ser todas 1 para que una solución sea válida. Por lo tanto, el producto deber ser 1. Por lo tanto, podemos escribir la siguiente ecuación como equivalente a la tabla de implicantes primos:

$$(p2+p3).(p1+p2).(p1+p4).p3.p4 = 1$$

El problema de cobertura radica en encontrar una asignación de ceros y de unos a las variables que sea una solución a la ecuación y que sea de costo mínimo. Volviendo a nuestro ejemplo podemos usar las propiedades de absorción o el teorema del consenso y nos queda:

$$\mathbf{(p1 + p2).p3.p4 = 1}$$

El método que hemos usado es conocido como **Método de Petrick**. Nos sirve para resolver TIPs cíclicas. Como ejemplo veremos como resolver el problema cuando llegamos a una tabla cíclica como la siguiente:

	m1	**m2**	**m3**	**m4**
ip1	√		√	
ip2		√		√
ip3		√	√	
ip4	√			√

Esta tabla consta de cuatro implicantes primos (ip_1 a ip_4) y cuatro minitérminos numerados de m_1 a m_4. Como se ve es una tabla cíclica donde no se puede encontrar implicantes primos esenciales. Como se ve en la figura para cubrir el minitérmino $\mathbf{m_1}$ tendría que tomar el implicante $\mathbf{ip_1}$ o el $\mathbf{ip_4}$**.** Para cubrir el minitérmno $\mathbf{m_2}$ necesito elegir el implicante primo $\mathbf{ip_2}$ o el implicante $\mathbf{ip_3}$**.** Y así sucesivamente. Plasmado esto en una ecuación que sería la fórmula de Petrick nos queda:

$$(p_1 + p_4).(p_2 + p_3).(p_1 + p_3).(p_2 + p_4) = 1$$

Haciendo uso de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma nos queda:

$$(p_1.p_2 + p_1.p_3 + p_2.p_4 + p_3.p_4).(p_1.p_2 + p_1.p_4 + p_2.p_3 + p_3.p_4) = 1$$

$$P_1.p_2 + p_1.p_2.p_4 + p_1.p_2.p_3 + p_1.p_2.p_3.p_4 + p_1.p_2.p_3 + p_1.p_3.p_4 + p_1.p_2.p_3 + p_1.p_3.p_4 +$$
$$+ p_1.p_2.p_4 + p_1.p_2.p_4 + p_2.p_3.p_4 + p_2.p_3.p_4 + p_1.p_2.p_3.p_4 + p_1.p_3.p_4 + p_2.p_3.p_4 + p_3.p_4 = 1$$

Resolviendo los términos repetidos y aplicando el teorema de absorción, nos queda finalmente:

$$\mathbf{(p_1.p_2 + p_3.p_4) = 1}$$

Vemos que para cubrir todos los minitérminos tengo que elegir los implicantes primos $\mathbf{ip_1}$ **y** $\mathbf{ip_2}$ por un lado o la segunda opción sería tomar los implicantes primos $\mathbf{ip_3}$ **o** $\mathbf{ip_4}$. Este de más decir que en este ejemplo hemos reemplazado el término **ip** por el término **p** solamente por cuestiones de simplificación.

Concluimos el problema visualizando que ninguna variable aparece complementada. Esto es debido a como armamos la ecuación. Una ecuación donde no aparece ninguna variable en su verdadero valor y a su vez complementada se denomina **Unate.**

Una función **Unate** es un tipo de función booleana que tiene propiedades monótonas, es decir si tenemos una función $f(x_1, x_2,\ldots, x_i,\ldots,x_n)$ decimos que es una función **Unate positiva en** $\mathbf{x_i}$ si se cumple que:

$$\mathbf{f(x_1, x_2,\ldots, 1,\ldots, x_n) \geq f(x_1, x_2,\ldots, 0,\ldots, x_n)}$$

Del mismo modo se define una función **Unate negativa respecto de x_i** si se cumple:

$$\mathbf{f(x_1, x_2, \ldots\ldots, 1, \ldots\ldots, x_n) \leq f(x_1, x_2, \ldots\ldots, 0, \ldots\ldots, x_n)}$$

Reducción de Tablas de implicantes primos:

Hasta ahora vimos que al no cubrir todos los minitérminos en una tabla de IP pasábamos a la Tabla de Implicantes Primos Secundarios (TIPS) y allí podían aparecer o Implicantes Primos intercambiables o Implicantes Primos dominantes. En el caso de dominantes hablamos solo de una fila que dominaba a otra. Después vimos que el panorama cambia cuando tenemos tablas complejas como por ejemplo las cíclicas. Ahora veremos los pasos a seguir en tablas complejas.

Cada vez que se selecciona un **implicante** para formar parte de la solución **se remueve el renglón correspondiente.**

Se comienza eliminando los **Implicantes Primos Esenciales**. Luego la tabla puede seguir reduciéndose (lo que llamamos TIPS), aplicando las siguientes reglas:

- **Una fila cubierta por otra puede eliminarse.**
- **Una columna que cubre a otra puede eliminarse.**

Prestar mucha atención que, en el caso de filas dominantes, **eliminamos las dominadas.**

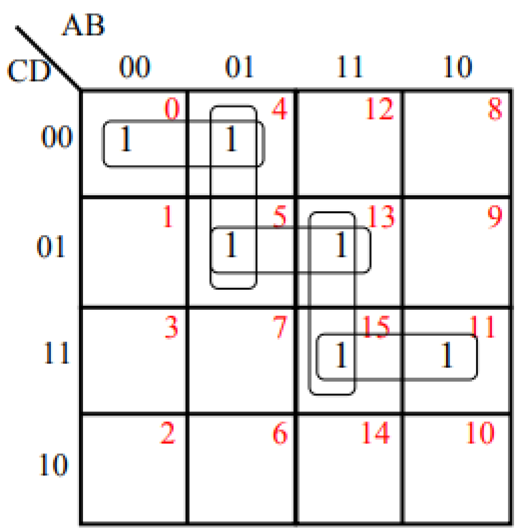
En el caso de columnas dominantes, **eliminamos las dominantes.**

Veremos dos ejemplos, uno aplicando dominancias de filas y dominancia de columnas.

Dada la función:

$$F(A,B,C,D) = \sum m(0, 4, 5, 11, 13, 15)$$

A esta función corresponde el siguiente mapa de Karnaugh:



Haciendo la tabla de implicantes primos, la misma queda:

		0	4	5	11	13	15
*	a (0,4)	√	√				
	b (4,5)		√	√			
	c (5,13)			√		√	
	d(13,15)					√	√
*	e(11,15)				√		√
		√	√		√		√

Como se observa tenemos dos IPE (a y e), pero con los mismos no cubrimos todos los minitérminos. Por lo tanto, hacemos la TIPS.

	5	13
b (4,5)	√	
c (5,13)	√	√
d(13,15)		√

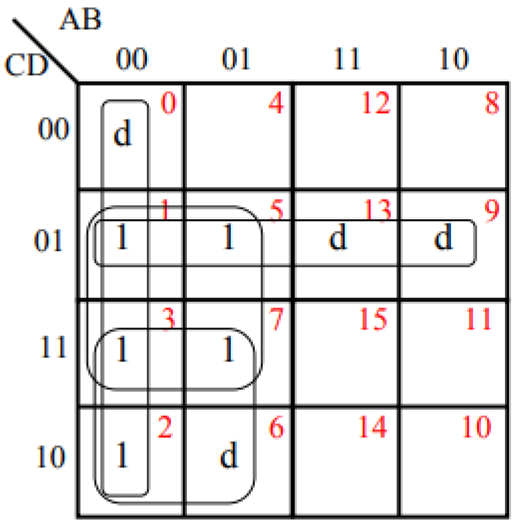
Como se observa el IP "c" es dominante, por lo tanto, la función final es:

$$\mathbf{F = \bar{A}.\bar{B}.\bar{D} + A.C.D + B.\bar{C}.D}$$

En este ejemplo se vio dominancia de filas, ahora simplificaremos la siguiente función:

$$F = \sum m(1, 2, 3, 5, 7) + \sum r(0, 6, 9, 13)$$

El mapa de Karnaugh correspondiente a esta función es el siguiente:



La tabla de implicantes primos correspondiente a este diagrama es:

	1	2	3	5	7
a (0,1,2,3)	√	√	√		
b (1,5,9,13)	√			√	
c (1,3,5,7)	√		√	√	√
d (2,3,6,7)		√	√		√

Como se observa la columna 1 cubre a la 5, y la columna 3 cubre a la 2 y a la 7. Por lo tanto, podemos eliminar las columnas **dominantes 1 y 3.** Entonces la tabla queda de la siguiente manera:

	2	5	7
a (0,1,2,3)	√		
b (1,5,9,13)		√	
c (1,3,5,7)		√	√
d (2,3,6,7)	√		√

Ahora vemos que el implIcante primo "d" domina al "a" y que el "c" domina al "b", ahora tenemos **dominancia de filas.** Por lo tanto, resulta que la tabla queda de la siguiente manera:

	2	5	7
c (1,3,5,7)		√	√
d (2,3,6,7)	√		√

La función simplificada queda:

$$\mathbf{F\ (A,B,C,D) = \overline{\mathit{A}}.D + \overline{\mathit{A}}.C}$$

También observando la tabla después de eliminar las columnas 1 y 3, vemos que también son válidas las coberturas siguientes:

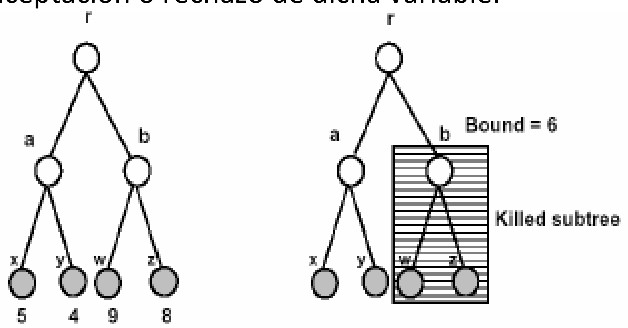
$$\mathbf{F\ (A,B,C,D) = \overline{\mathit{A}}.D + \overline{\mathit{A}}.\overline{\mathit{B}}}$$

$$\mathbf{F\ (A,B,C,D) = \overline{\mathit{A}}.C + \overline{\mathit{C}}.D}$$

En general, cada implicante primo corresponde a una compuerta AND en una expresión escrita como suma de productos. Si el número de compuertas en nuestro diseño es la única preocupación, es correcto asignar el mismo costo para todas las filas o variables. Sin embargo, si el número de literales es más importante, entonces un implicante primo con, digamos, cinco literales debería considerarse más costoso que un implicante primo con tres literales. Esto se puede acomodar asignando diferentes costos a cada fila. El **costo total** de una solución es entonces la suma de los costos de las filas seleccionadas.

Hasta acá hemos visto como la reducción tanto de filas como de columnas pueden genera nuevos implicantes esenciales. Tenga en cuenta que cuando empleamos el dominio de columnas, elegimos ignorar algunas soluciones válidas para la tabla de implicantes. Alguna de estas soluciones puede ser **óptimas.** Las técnicas de reducción vistas nos permiten determinar que algunos implicanes primos son esenciales o pueden quedar fuera de la solución. También vimos que cuando el problema es cíclico debemos seleccionar una variable y nos aparecen dos subproblemas reducidos, uno es aceptando esta variable como solución y el otro es desechando esta variable. Variable acá llamamos al implicante que elegimos o no para ser parte de la solución. Los subproblemas reducidos pueden ser a la vez cíclicos y, por lo tanto, requieren de nuevos implicantes o variables de división. En un problema cíclico debemos, en principio, enumerar **todas** las posibles soluciones, para encontrar una de **costo mínimo.** Por eso decimos que el problema de cobertura es un problema de enumeración. Cuando investigamos todas las posibles soluciones, se llama **enumeración explicita.** Hasta ahora nosotros enumeramos algunas soluciones, descartando otras incluyendo soluciones óptimas, a esto se llama **enumeración implícita**. Algunas veces investigar todas las posibles soluciones es imposible por el tamaño de esta búsqueda. Queremos encontrar un método que minimice esta búsqueda. O sea, en un problema cíclico buscamos como explorar el espacio de búsqueda a fin de minimizar la cantidad de soluciones que enumeramos explícitamente. El esquema de enumeración implícita que adoptamos se llama **Branch and Bound.** Este método se a problemas de búsqueda cuando nos interesa encontrar el costo mínimo o máximo de una solución factible. En estos procedimientos se pueden aplicar estrategias para no computar todas las soluciones, por ejemplo, no necesitamos enumerar todos los caminos entre dos ciudades para encontrar el más corto. El término Branch and Bound se puede traducir como **ramificación y acotamiento.**

En nuestro caso este método lo usamos para encontrar una cobertura de costo mínimo. Para lo cual empezamos tomando un implicante como parte de la solución y vamos calculando los costos de tomar otros implicantes dentro de la cobertura. Esto hace que se forme un árbol con ramas y subárboles. A cada rama se le calcula el costo, si excede el costo mínimo relativo ya calculado se poda esa rama. Si tenemos muchas variables es imposible dibujar un árbol por la cantidad de ramas. En la siguiente figura vemos un ejemplo genérico de un árbol de búsqueda o también llamado árbol de recursión. En nuestros casos booleanos el árbol es binario, cada nodo del árbol corresponde a una variable del problema y las dos ramas que salen de ese nodo corresponden a la aceptación o rechazo de dicha variable.



En nuestro caso queremos usar este método aplicado a Tabla de Implicantes Primos, lo que hacemos es resolver una tabla cíclica considerando un implicante cualquiera P_i como parte de la solución final y también considerando que no forma parte, se escoge entre las dos la solución de mínimo costo. Se almacena el costo y se varía la elección del implicante primo, se vuelve a realizar el proceso anterior y se compara costos almacenados hasta encontrar el menor. Puede escogerse el implicante que tengo menos literales, es decir el que cubra la mayor cantidad de minitérminos, también es buen candidato el cubo que contenga un minitérmino que es cubierto por el menor número de implicantes, etc.

Ejemplo, en la figura siguiente tenemos una TIP cíclica donde a cada implicante le asociamos un costo arbitrario y veremos cuál es la mejor cobertura.

	Costo	m1	m2	m3
IP1	2	√	√	
IP2	4		√	√
IP3	2	√		√

Si elegimos a **IP1** como parte de la solución, la tabla resultante nos queda:

	Costo	m3
IP2	4	√
IP3	2	√

Se escoge **IP3** por ser el de menor costo, con lo cual el costo total es 2 +2 = 4
Si ahora elegimos **IP2** como parte de la solución nos queda:

	Costo	m1
IP1	2	√
IP3	2	√

Podemos elegir tanto **IP1** como **IP3,** resultando un costo total de 4 + 2 = 6
Si ahora elegimos **IP3** nos queda:

	Costo	m2
IP1	2	√
IP2	4	√

Escogemos **IP1** por ser el de menor costo. Por lo tanto, tenemos dos soluciones con costo igual a 4 y ese es el costo mínimo.

Ahora aplicaremos el método a un problema un poco más complejo. Supongamos que tenemos la siguiente TIP donde marcamos las variables de cada implicante primo.

	ma	mb	mc	md	me	mf
Pa= 00-0	√	√				
Pb= 0-00	√			√		
Pc= 010-				√	√	
Pd= 01-1					√	√
Pe= --11			√			√
Pf= 001-		√	√			

No hay filas ni columnas dominantes. Primero tomamos a Pa como parte de la solución, es decir **ramificamos con respecto a Pa.** Eliminamos por lo tanto la fila Pa y las dos columnas ma y mb cubiertas por Pa para obtener la siguiente tabla:

	mc	md	me	mf
Pb= 0-00		√		
Pc= 010-		√	√	
Pd= 01-1			√	√
Pe= --11	√			√
Pf= 001-	√			

Ahora Pc domina a Pb y ambas tienen un costo de literales de 3, de manera que se elimina la fila dominada Pb, a su vez Pe domina a Pf y Pf tiene un costo literal un poco mayor (3 en lugar de 2). Por lo tanto, eliminamos la fila Pf y nos queda la siguiente tabla:

	mc	md	me	mf
Pc= 010-		√	√	
Pd= 01-1			√	√
Pe= --11	√			√

Ahora Pc y Pe se han convertido en esenciales y entre los dos cubren las cuatro columnas restantes. Esto quiere decir que hemos encontrado una cobertura de tres filas:

(Pa, Pb, Pc) = (00-0, 010-, --1)

con un costo de literales de 3 + 3 + 2 = **8.** Esta es la solución de menor costo al forzar Pa dentro de la cobertura. Será una solución de costo mínimo del problema original **si y solo sí** no existe una cobertura con menos de tres filas ni una cobertura de tres filas con costo de literales más bajo.

Falta examinar las otras cinco soluciones que se obtienen al colocar Pb, Pc, Pd, Pe y Pf, una por una en la solución tentativa. Los cálculos que se requieren para **ramificar** con respecto a Pb aparecen en la siguiente figura.

	mb	mc	me	mf
Pa=00-0	√			
Pc=010-			√	
Pd=01-1			√	√
Pe=--11		√		√
Pf=001-	√	√		

Una vez más empezamos con una tabla de cinco filas que se obtiene al eliminar la fila con respecto a la cual ramificamos. Se puede observar que como resultado de la eliminación de Pb se obtiene que Pd domina a Pc y que Pf domina a Pa. Nos queda la cobertura:

(Pb, Pd, Pf) = (0-00, 01-1, 001-)

Esta cobertura tiene tres filas, pero su costo de literales es 3 + 3 + 3 = **9,** peor a la que se obtuvo anteriormente. Se puede mostrar que las soluciones obtenidas a través de la ramificación con respecto a los otros cuatro implicantes primos siempre nos llevan a soluciones de tres términos con un costo mayor. Por lo tanto, concluimos que la ramificación respecto de **Pa** es una **cobertura de costo mínimo.**

Stanley R. Petrick. Nació en Iowa el 16 de agosto de 1931. Estudió en la Universidad Estatal de Iowa graduándose en Matemáticas en 1953. Entre 1953 y 1955 estudió en el MIT recibiéndose de Ingeniero Eléctrico. Al mismo tiempo fue un oficial activo de la Fuerza Aérea. Siempre estuvo asociado con la rama de la Matemática Aplicada. Entre 1959 y 1962 fue profesor de esa área en la Universidad de Northeasten. Una de sus más célebres publicaciones fue “La determinación de formas irredundantes de las funciones booleanas a partir de un conjunto de Implicantes Primos”. Fallece el 27 de julio de 2006.