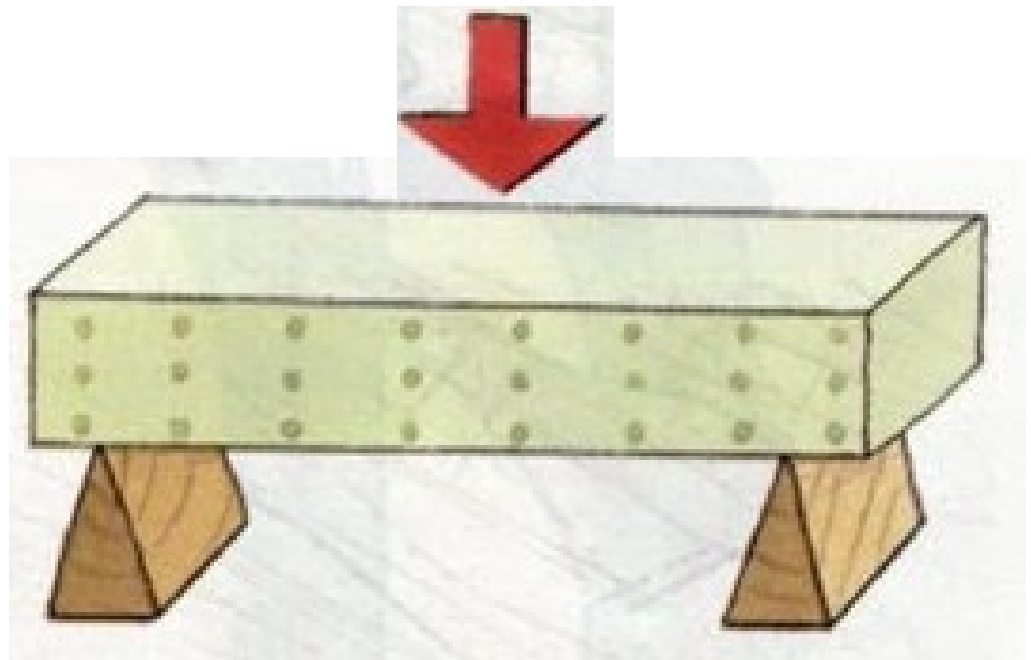
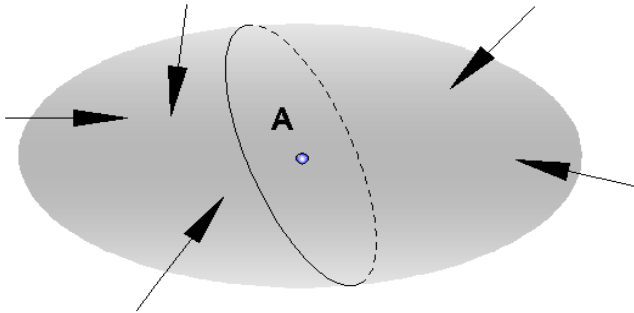
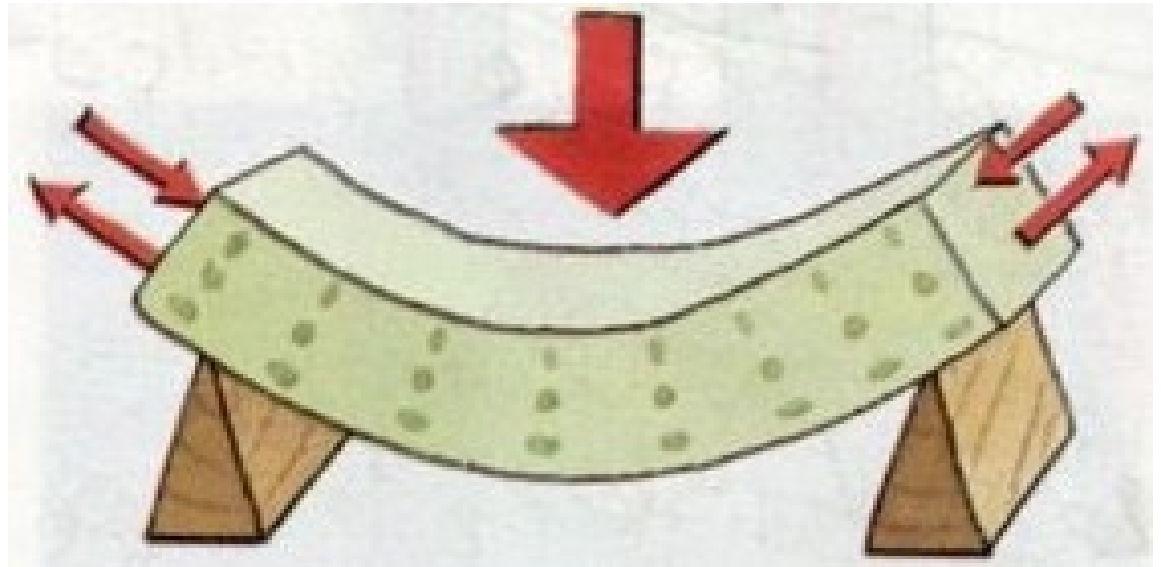
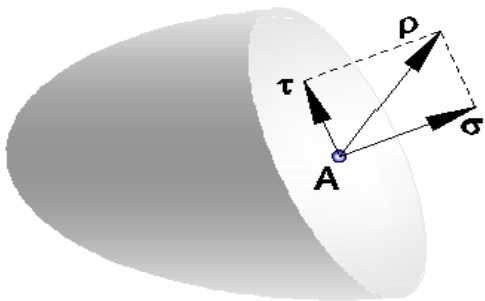


Equilibrio estático

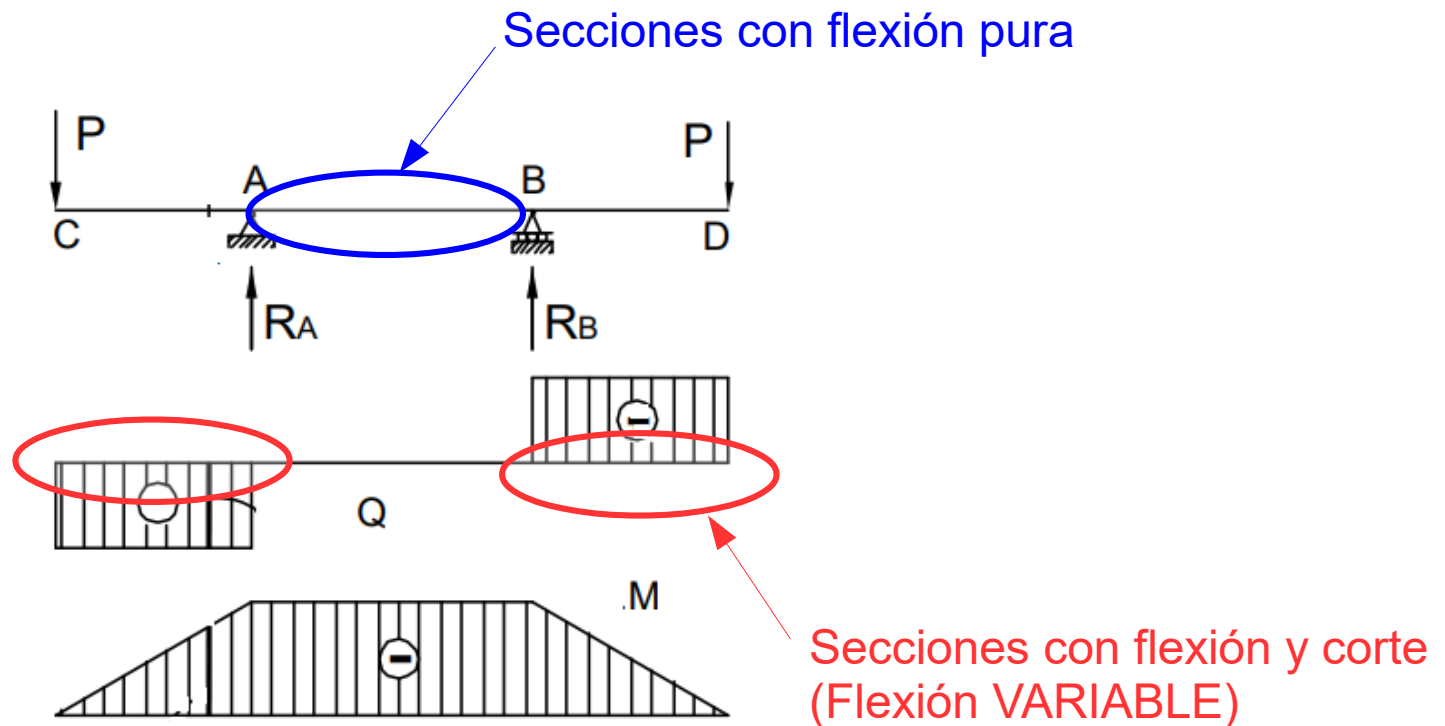


Equilibrio estático y equilibrio elástico



FLEXION Conceptos generales

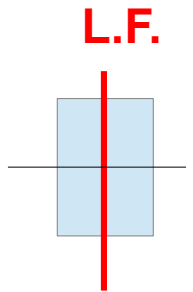
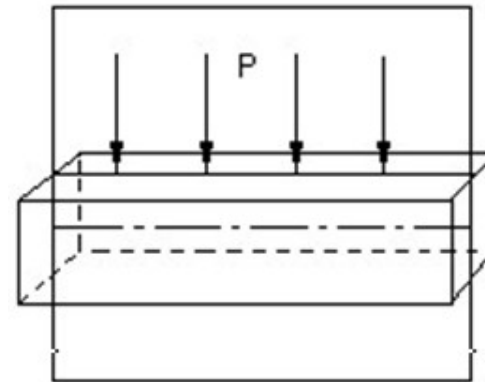
➡ **Flexión**: La sollicitación se limita a dos pares normales al plano de la sección, sin o con esfuerzo de corte, en el primer caso es flexión pura y en el segundo es flexión y corte.



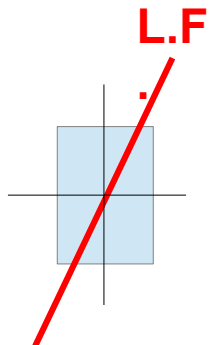
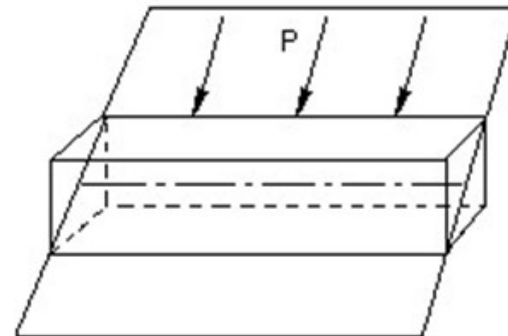
Conceptos generales

- ➡ **Flexión simple**: La sollicitación se limita a dos pares normales al plano de la sección, sin o con esfuerzo de corte.
- ➡ **Plano de flexión**: plano donde actúan los pares flexores.
- ➡ **Línea de fuerzas**: intersección del plano de flexión con el plano de la sección.

Flexión Simple normal (F.S.N.): La **línea de fuerzas** coincide con un eje principal de inercia de la sección.

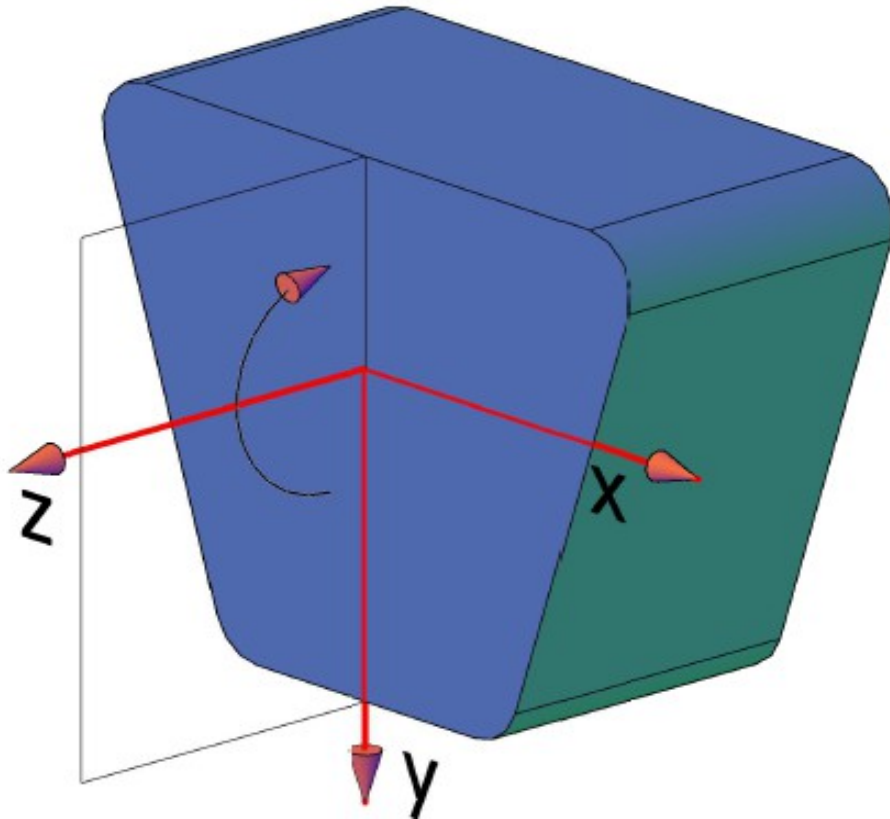


Flexión simple oblicua (F.S.O.): La **línea de fuerzas** forma un cierto ángulo con un eje principal de inercia.



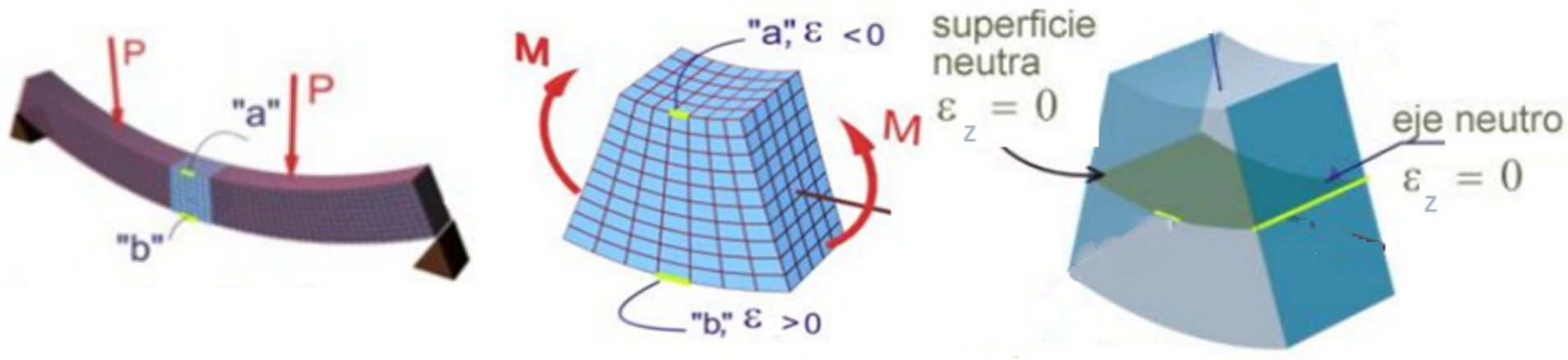
Flexión pura normal

- La línea de fuerzas coincide con un eje principal de inercia de la sección.
- La única sollicitación es M_x (con vector momento coincidente con el otro de los ejes principales), las demás son nulas.



Flexión pura normal

- Hipótesis de Bernoulli-Navier: Las secciones permanecen planas y giran en torno al eje neutro. Ciertas fibras se alargan y otras se acortan con una variación lineal; de lo cual podemos deducir que habrá fibras que no sufren deformación (estas fibras componen esta superficie que es la superficie neutra).



- Acorde al punto anterior y a la ley de Hooke, las tensiones variarán proporcionalmente en el plano de la sección según su distancia al eje neutro.

Flexión pura normal

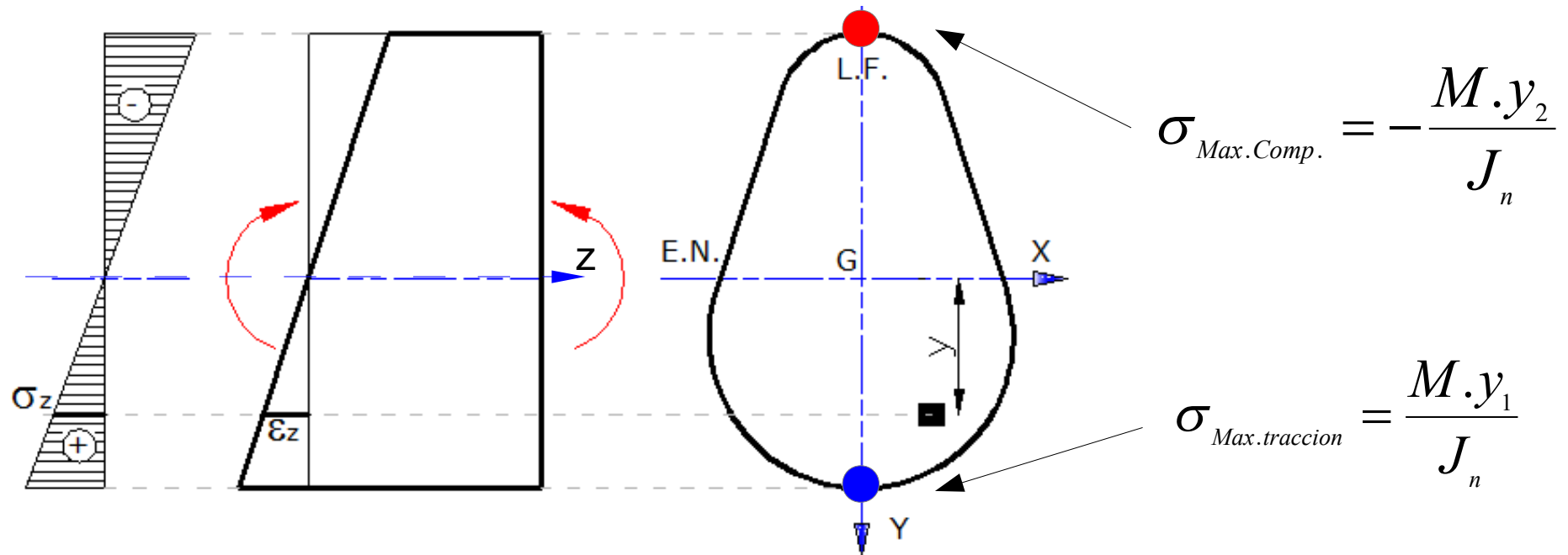
► Trabajando con la 5ª de las EE

$$M = \int_F \sigma_z \cdot y \cdot dF = \bar{\sigma} \int_F y^2 \cdot dF \Rightarrow \sigma_z = \frac{M \cdot y}{J_n}$$

$$\sigma_z = \frac{M \cdot y}{J_n}$$

$$\sigma_{Max} = \frac{M}{J_n} \cdot y_{Max} \leq \sigma_{Adm}$$

► Estamos ante la siguiente situación



Flexión pura normal

Módulo resistente

Si el eje neutro es de simetría $y_1=y_2$

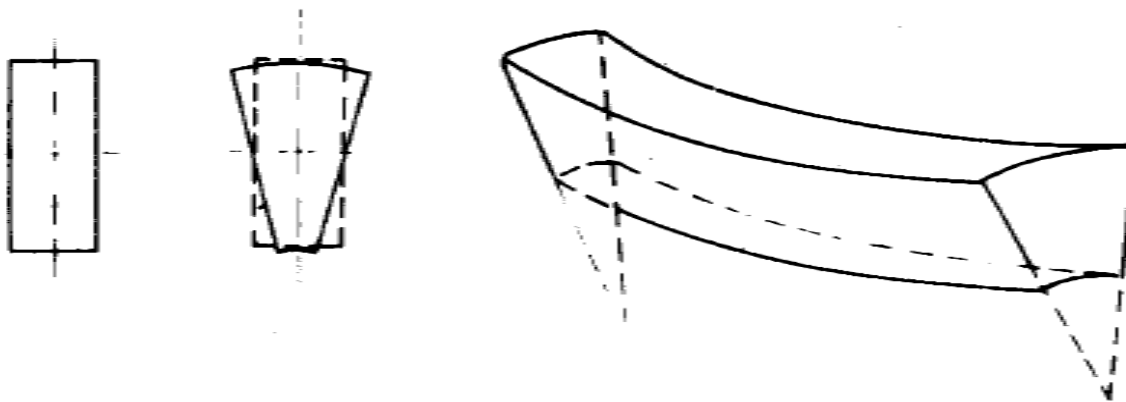
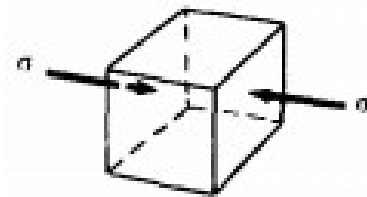
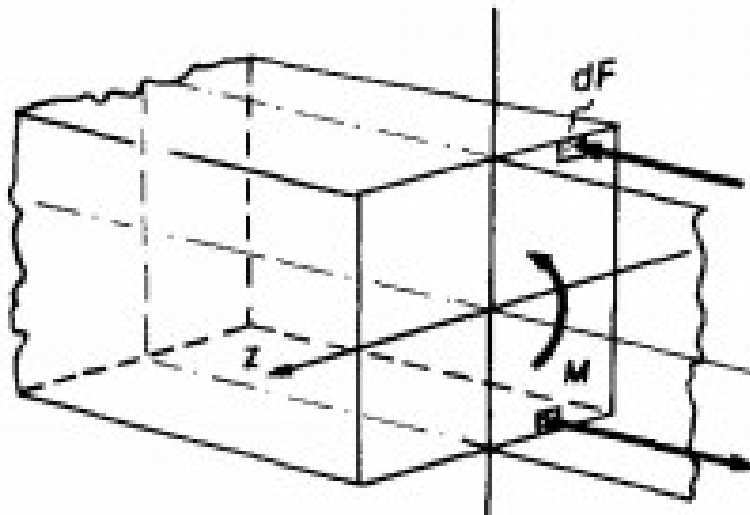
$$\sigma_{Max} = \pm \frac{M \cdot y_{Max}}{J_n}$$

Modulo resistente

$$W = \frac{J_n}{y_{max}}$$

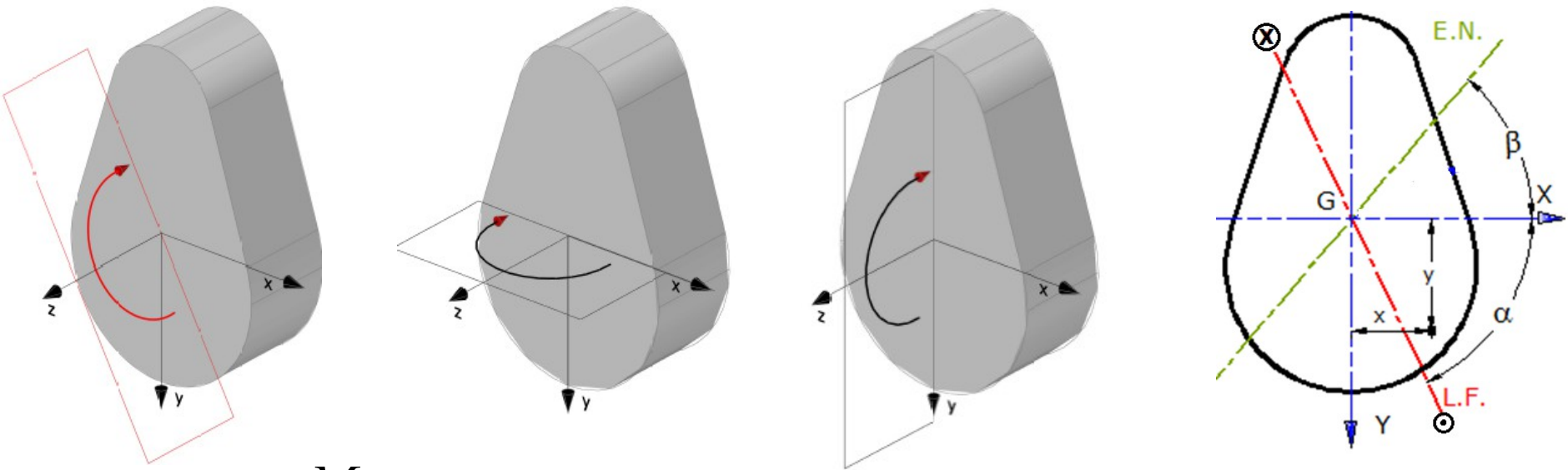
$$\sigma_{Max} = \frac{M}{W}$$

Cambio de forma de la sección



Flexión oblicua

Descomposición en dos flexiones normales (signo por inspección):
Otra forma de resolver la F.S.O. es como la suma de dos flexiones normales, sobre los **ejes x e y** (que son principales de inercia).



$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y}$$

Los signos de los dos términos se deducen considerando los efectos que producen ***Mx*** y ***My***

Determinación del eje neutro

$$M_x = M \cdot \sin \alpha$$

$$M_y = M \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot y}{J_x} = - \frac{\cos \alpha \cdot x}{J_y}$$

$$y = - \frac{J_x}{J_y} \cot \alpha \cdot x$$

Verificación y proyecto a Flexión Oblicua

Pueden presentarse 2 problemas

- **Verificación:** se pueden utilizar ambas expresiones vistas.

Usando L.F./E.N. como ejes de referencia

Usando **x** e **y** (ppales) como ejes de referencia

$$\sigma = \pm \frac{M \cdot \sin \varphi \cdot n}{J_n}$$

$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y}$$

- **Dimensionar la sección:** conviene aplicar la resolución por superposición de efectos y especialmente cuando la sección es simétrica. Por ejemplo, en secciones rectangulares y doble T se puede aplicar el siguiente procedimiento:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_x}{W_x} \left(1 + \frac{W_x}{M_x} \frac{M_y}{W_y} \right) \quad \text{llamando} \quad \frac{W_x}{W_y} = k$$

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \left(1 + k \frac{M_y}{M_x} \right)$$

NOTAS: El k se fija entre 6,5 y 10,67
En IPN lo recomendable es comenzar con k=8 y se dimensiona x aproximaciones sucesivas

Comparación de Solicitaciones

AXIL

$$\sigma_z = N_z / F$$

$$\Delta l = \frac{l \cdot N_z}{E \cdot F}$$

TORSIÓN

$$\tau_{zt} = \frac{M_T \cdot R}{J_P}$$

$$\Theta = \theta \cdot l = \frac{l \cdot M_T}{J_P \cdot G}$$

FLEXIÓN (FSO)

$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y}$$

$$\text{ó} \quad \sigma = \pm \frac{M \cdot \text{sen} \varphi \cdot n}{J_n}$$

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{M}{J_n E} \quad \textbf{(FSN)}$$

Fórmulas y Gráficos de Tensiones

- Tensiones generadas (FSO):

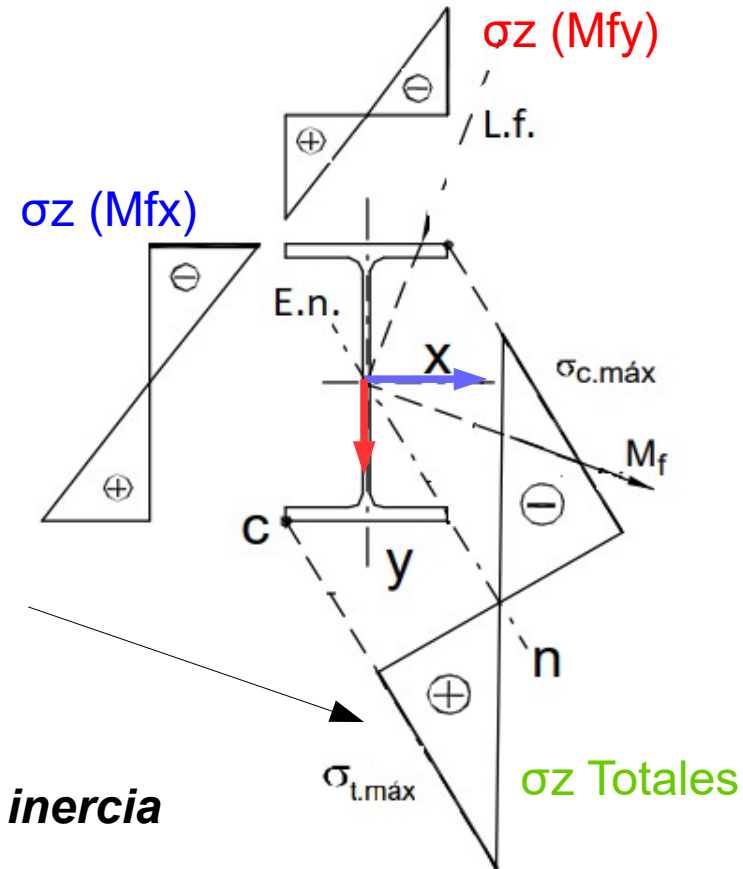
$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot y}{J_x} + \frac{M_y \cdot x}{J_y}$$

Utilizando el principio de superposición de los efectos para ejes principales: FSO como suma de 2 FSN

$$\sigma = \pm \frac{M \cdot \sin \varphi \cdot n}{J_n}$$

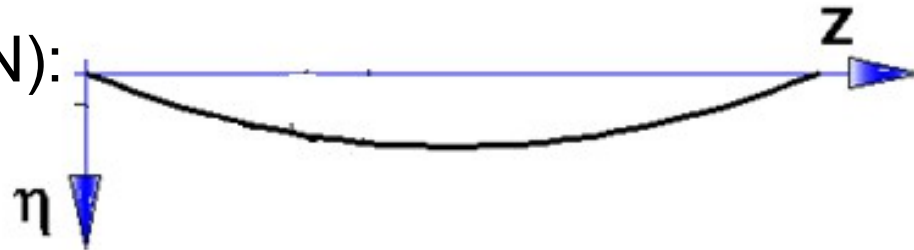
Utilizando la línea de fuerzas (L.f.) y el eje neutro (E.n.) como referencias

NOTA: E.n. y L.f. son ejes conjugados de inercia



- Deformaciones producidas (FSN):

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{M}{J_n E}$$

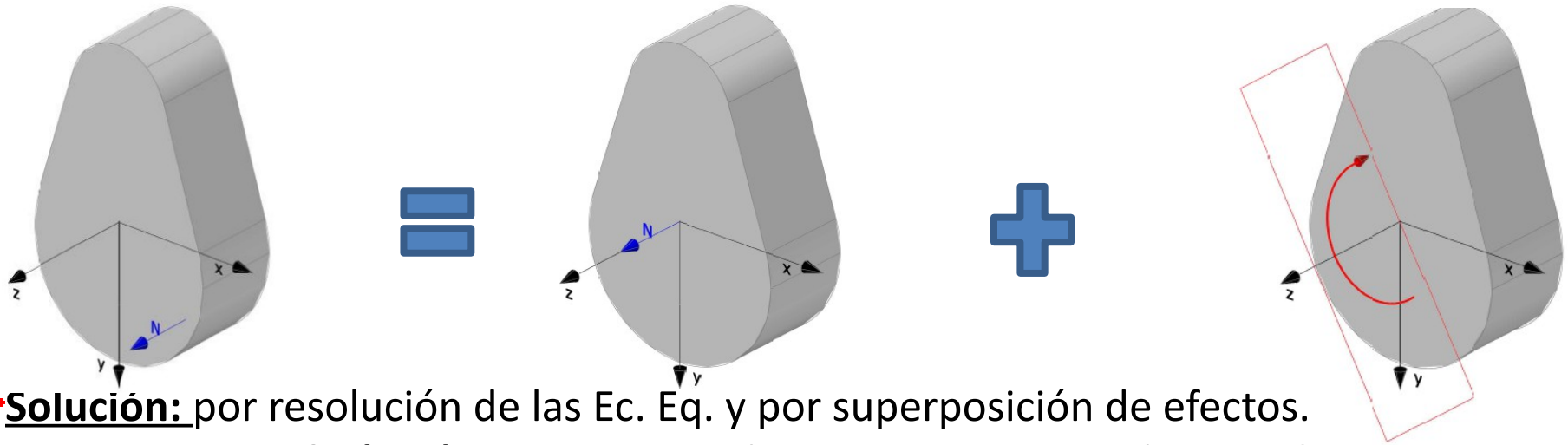


Elástica de deformación para barra simplemente apoyada

Flexión compuesta ó Sollicitación Axil Excéntrica

Conceptos generales

- Sobre la sección actúa una fuerza normal excéntrica.
- La reducción al baricentro origina un par más un esfuerzo axil, de modo que también puede estar dada por un par más una fuerza axil



- **Solución:** por resolución de las Ec. Eq. y por superposición de efectos.
- **Centro de presión (C.P.)** Es la intersección de la recta de acción de la fuerza axil excéntrica con el plano de la sección en estudio.
- **Línea de fuerzas** : Resulta de la unión del C.P y el baricentro G.
- **Excentricidad: (e)** distancia entre el C.P. y G.
- **Hipótesis** ley de Hooke y Bernoulli Navier. Las secciones giran en torno al E.N. y las tensiones siguen una ley de variación lineal; por lo tanto las fibras mas alejadas respecto del E.N. serán la más tensionadas.

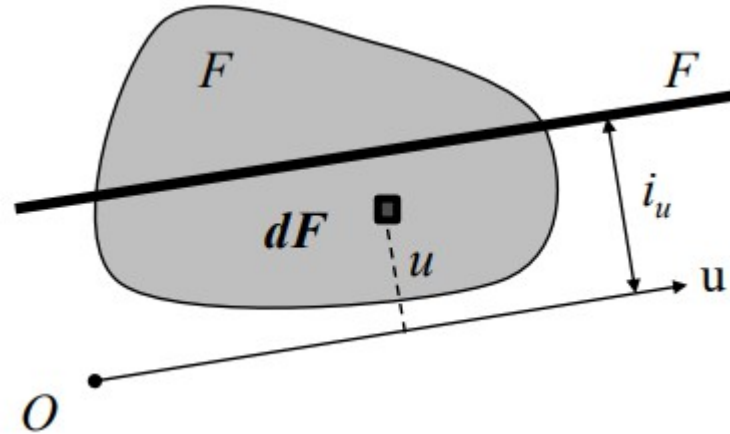
Radio de giro

Concepto

Se define como Radio de Giro Axial i_u de la figura con respecto al eje “u” : $i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}$

Siendo

$$J_u = \iint_F u^2 dF$$



Obsérvese que un fleje de misma área F paralelo al eje u , a una distancia i_u , posee el mismo momento de inercia axial:

$$J_u = \iint_F i_u^2 dF = i_u^2 \iint_F dF = i_u^2 F$$

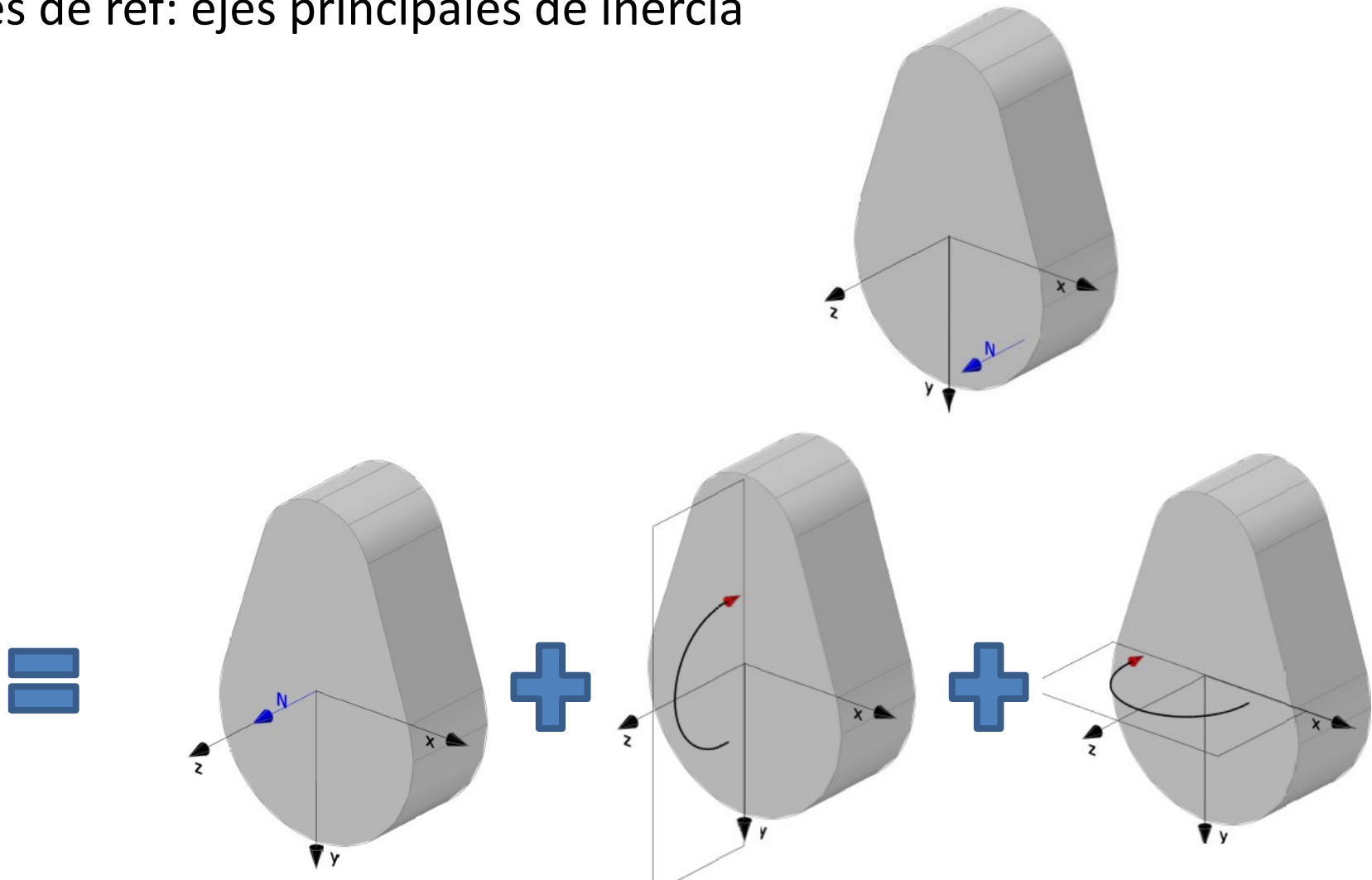
De donde

$$i_u^2 = \frac{J_u}{F}$$

Flexión compuesta oblicua

Resolución como suma de esfuerzo axial y dos flexiones normales

Ejes de ref: ejes principales de inercia



Flexión compuesta

Resolución como suma de esfuerzo axial y dos flexiones normales

Si hacemos coincidir x e y con los ejes principales de inercia

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$$

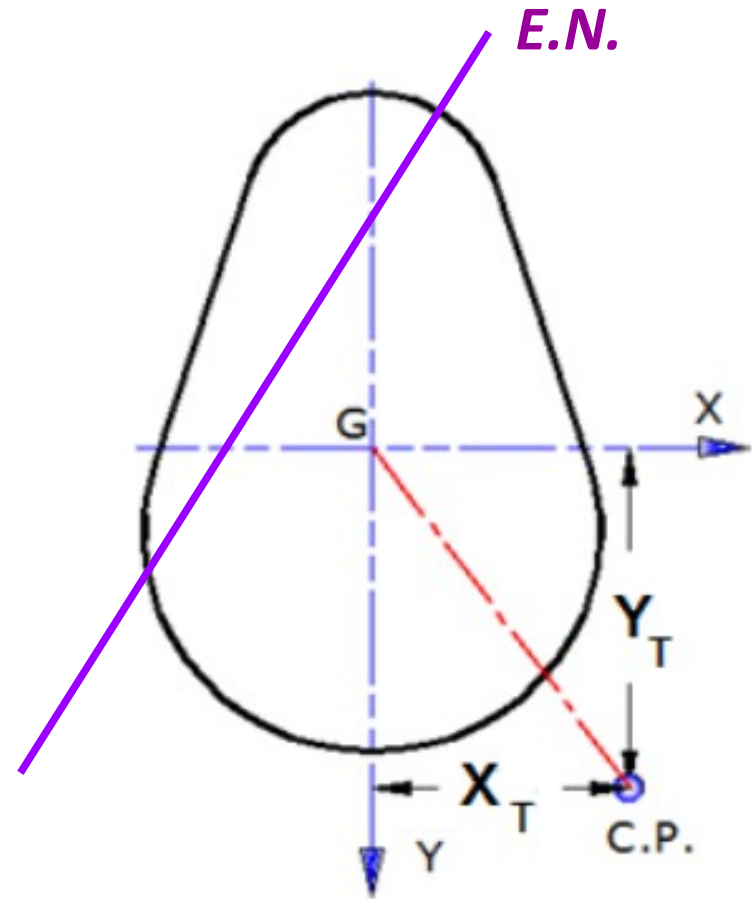
$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{N \cdot y_T}{J_x} y + \frac{N \cdot x_T}{J_y} x$$

Determinación del eje neutro:

$$0 = \frac{N}{F} \left(1 + \frac{e_y}{J_x/F} y_N + \frac{e_x}{J_y/F} x_N \right)$$

$$y_N = 0 \Rightarrow -1 = \frac{e_x}{i_y^2} x_N \Rightarrow x_N = -\frac{i_y^2}{e_x}$$

$$x_N = 0 \Rightarrow -1 = \frac{e_y}{i_x^2} y_N \Rightarrow y_N = -\frac{i_x^2}{e_y}$$



NOTA: los signos de las coordenadas del C.P. y del E.N. son contrarias.

Diagramas de tensiones (parciales y totales)

