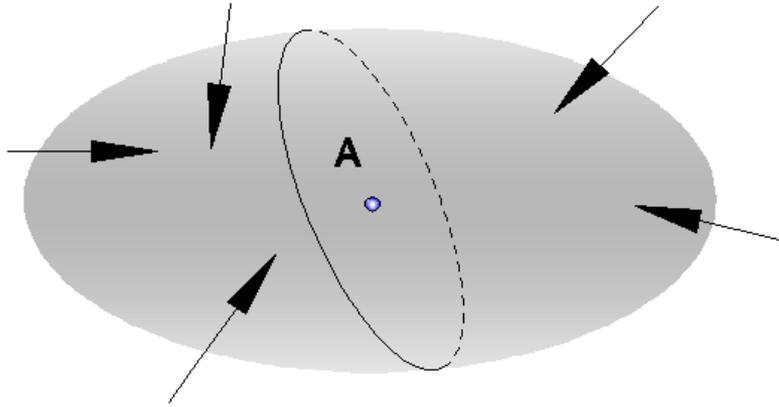


# Cambio de modelo

1. Dentro del campo de la Estática:  
Sólido indeformable
2. Dentro del campo de la Resistencia de Materiales:  
***Sólido elástico*** (tensiones y deformaciones sufridas ante las cargas)  
Distintos materiales se comportarán en forma diferente ante iguales cargas.

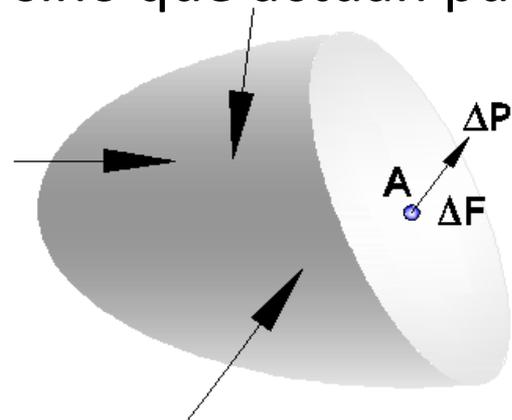
# Concepto de tensión

Consideremos un sólido homogéneo e isótropo que suponemos sujeto a la acción de un sistema de fuerzas exteriores en equilibrio.



Además consideremos un punto A y un plano cualquiera que lo contenga quedando el cuerpo dividido en dos partes. Para que se mantenga el equilibrio debo reemplazar la parte suprimida por su correspondiente binomio de reducción.

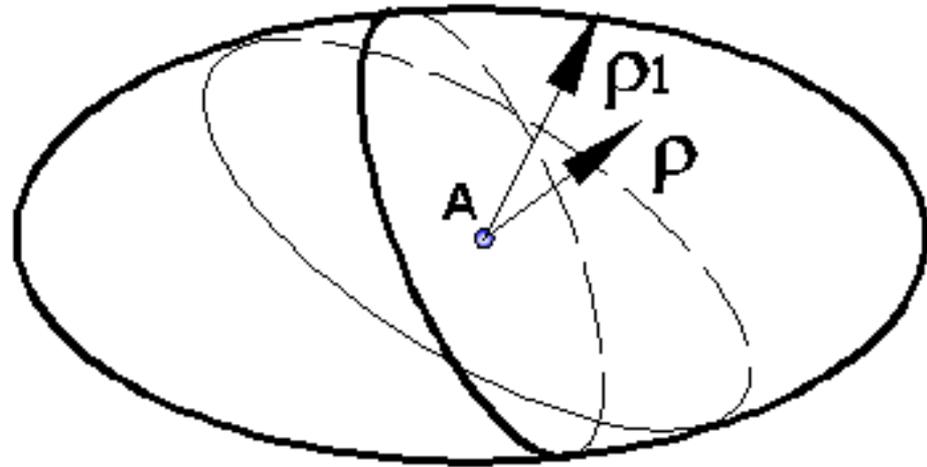
Estas acciones no se ejercen de una parte a otra como concentradas, sino que actúan punto a punto.



Considerando en el punto A un entorno de superficie y una fuerza elemental, definiremos como tensión:

$$\rho = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}$$

# Estado de tensión en un punto



Al variar el plano que pasa por A la tensión va a ir cambiando también. Por lo que aparecen infinitas tensiones. A dicho conjunto se lo denomina estado de tensión.

## Clasificación:

- Estado simple o axial: los infinitos vectores tensión son paralelos a una dirección.
- Estado doble o biaxial: Los infinitos vectores están contenidos en un plano.
- Estado triple o espacial: Los infinitos vectores tienen cualquier orientación en el espacio.

# Magnitudes tensoriales

Las magnitudes **escalares** son aquellas que quedan completamente definidas por un número y las unidades utilizadas para su medida. Las magnitudes escalares están representadas por el ente matemático más simple, por un número. Podríamos decir que poseen un módulo, pero que carecen de dirección. Su valor puede ser independiente del observador (masa, temperatura, densidad, etc.) o depender de la posición o estado de movimiento del observador (energía cinética).

Las magnitudes **vectoriales** son aquellas que quedan caracterizadas por una cantidad (intensidad o módulo), una dirección y un sentido. En un espacio euclidiano, de no más de tres dimensiones, un vector se representa mediante un segmento orientado. Ejemplos de estas magnitudes son: la velocidad, la aceleración, la fuerza, el campo eléctrico, etc.

Además, al considerar otro sistema de coordenadas asociado a un observador con diferente estado de movimiento o de orientación, las magnitudes vectoriales no presentan variancia de cada uno de los componentes del vector y, por tanto, para relacionar las medidas de diferentes observadores se necesitan relaciones de transformación vectorial.

Las magnitudes **tensoriales** son las que caracterizan propiedades o comportamientos físicos modelizables mediante un conjunto de números que cambian al elegir otro sistema de coordenadas asociado a un observador con diferente estado de movimiento o de orientación.

De acuerdo con el tipo de magnitud, debemos escoger leyes de transformación de las componentes físicas de las magnitudes medidas, para poder ver si diferentes observadores hicieron la misma medida o para saber qué medidas obtendrá un observador, conocidas las de otro cuya orientación y estado de movimiento respecto al primero sean conocidos.

Un **tensor** es una clase de entidad algebraica de varios componentes que generaliza los conceptos de escalar, vector y matriz, de una manera que sea independiente de cualquier sistema de coordenadas elegido.

Una vez elegida una base vectorial, los componentes de un tensor en una base vendrán dadas por una multimatriz. El orden de un tensor será el número de índices necesario para especificar sin ambigüedad un componente de un tensor: un escalar será considerado como un tensor de orden 0; un vector, un tensor de orden 1; y, dada una base vectorial, los tensores de segundo orden pueden ser representados por una matriz, como los tensores de Tensión y de Deformación.

# Estado de Deformación

Hasta el momento hemos visto todos los conceptos aplicados a cuerpos idealmente rígidos (campo de la Estática). Estos conceptos se aplican a los cuerpos reales que en rigor sufren deformaciones, por lo que deberemos realizar algunas simplificaciones:

Se parte de la hipótesis de que las deformaciones son muy pequeñas (infinitésimos físicos). El objetivo, para un punto material cualquiera de la estructura, es estudiar los desplazamientos relativos (respecto de dicho punto) de los infinitos puntos materiales que pertenecen a su entorno.

Debe pensarse que, si bien el cuerpo vinculado configura un sistema que no se mueve, ante la acción de las cargas el mismo **se deforma**.

Si consideramos un cubo elemental del cuerpo en estudio, antes y después de sufrir la deformación por el efecto del sistema de cargas a que se lo somete, podríamos ejemplificarlo así:

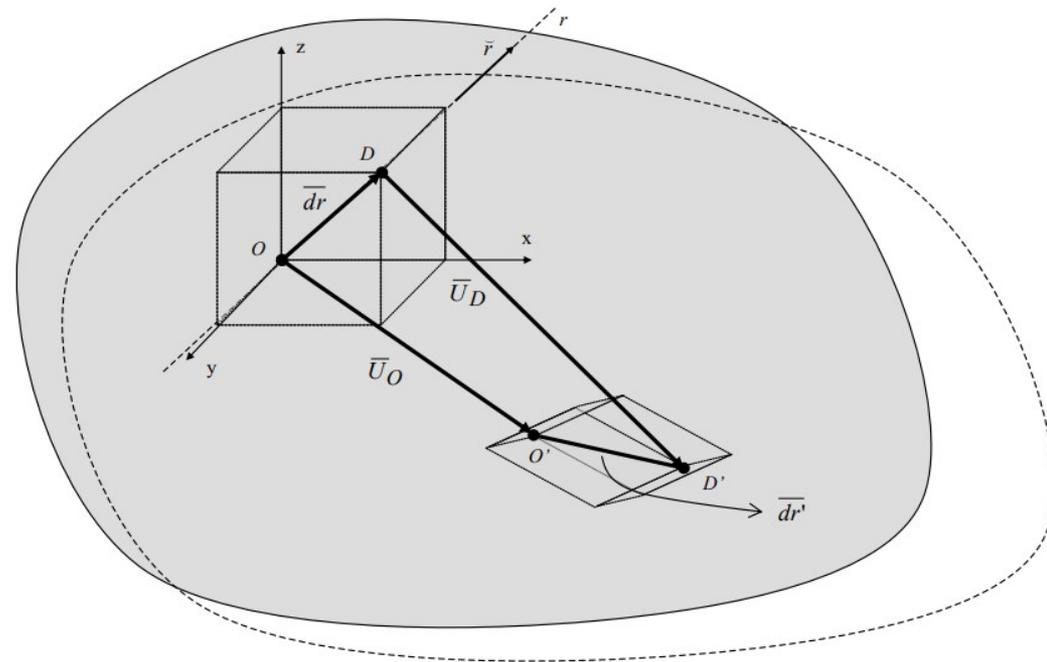
En él podríamos considerar la deformación a que se ve sometido como suma de 4 componentes:

***Traslación***

***Rotación***

***Deformaciones lineales***

***Deformaciones angulares simétricas***



# Estado de Deformación

Podríamos considerar la deformación a que se ve sometido como suma de 4 componentes:

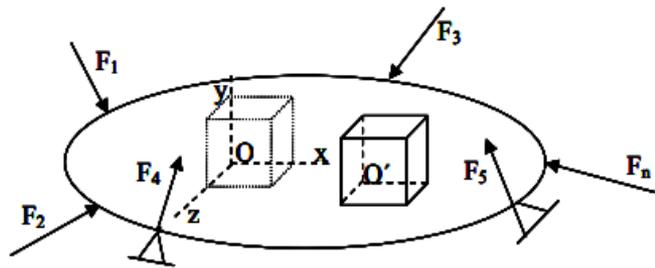
**Traslación**

**Rotación**

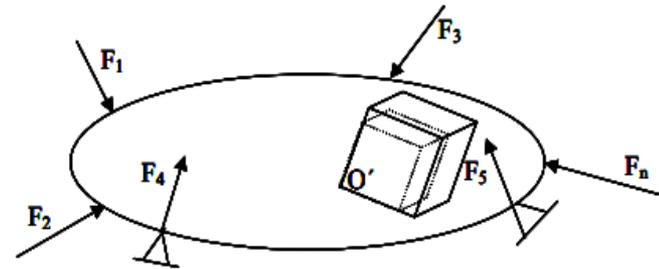
**Deformaciones lineales**

**Deformaciones angulares simétricas**

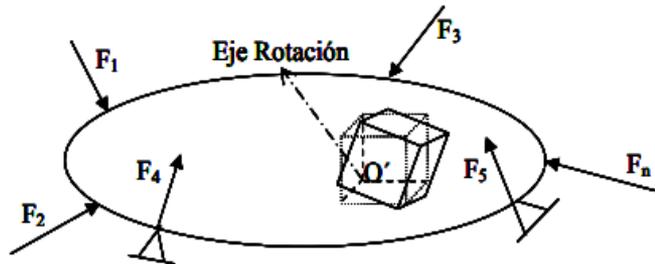
1°.- Una **TRASLACIÓN** que lleva el origen del paralelepípedo del punto O al punto O'



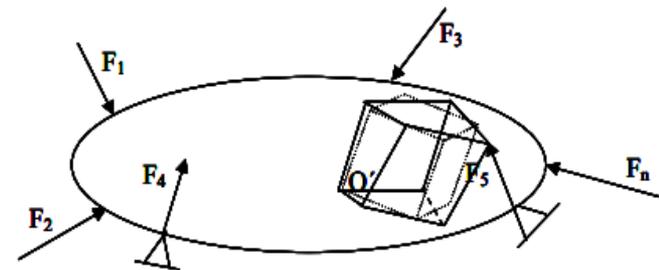
3°.- Unas **DEFORMACIONES LINEALES** de las aristas del paralelepípedo



2°.- Una **ROTACIÓN** del paralelepípedo alrededor de un eje que pasa por O'



4°.- Unas **DEFORMACIONES ANGULARES "SIMÉTRICAS"** de los ángulos que forman las aristas del paralelepípedo, inicialmente a 90°.



*Estas dos últimas partes son las que originan la deformación propiamente dicha del paralelepípedo.*

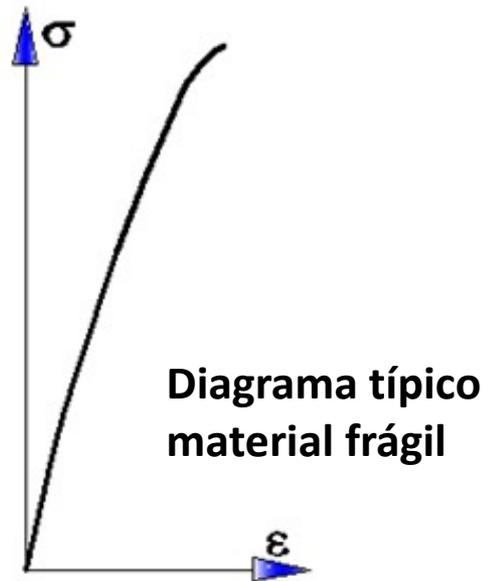
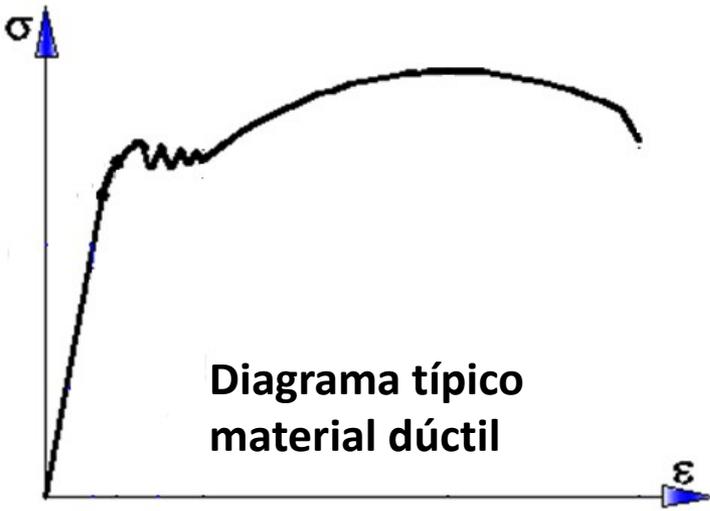
# PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

## Introducción

La determinación de las constantes elásticas se efectúa mediante ensayos que permiten conocer el comportamiento del material.

Un ensayo muy utilizado es el de tracción simple que nos permite conocer, a través de pares de valores  $\sigma$ - $\varepsilon$  obtenidos del ensayo de probetas normalizadas, las constantes elásticas propias del material ensayado. Luego de representados los valores  $\sigma$ - $\varepsilon$  (que definen el diagrama tensión deformación) se puede visualizar gráficamente el comportamiento del material sujeto a tensiones, hasta la rotura.

# PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

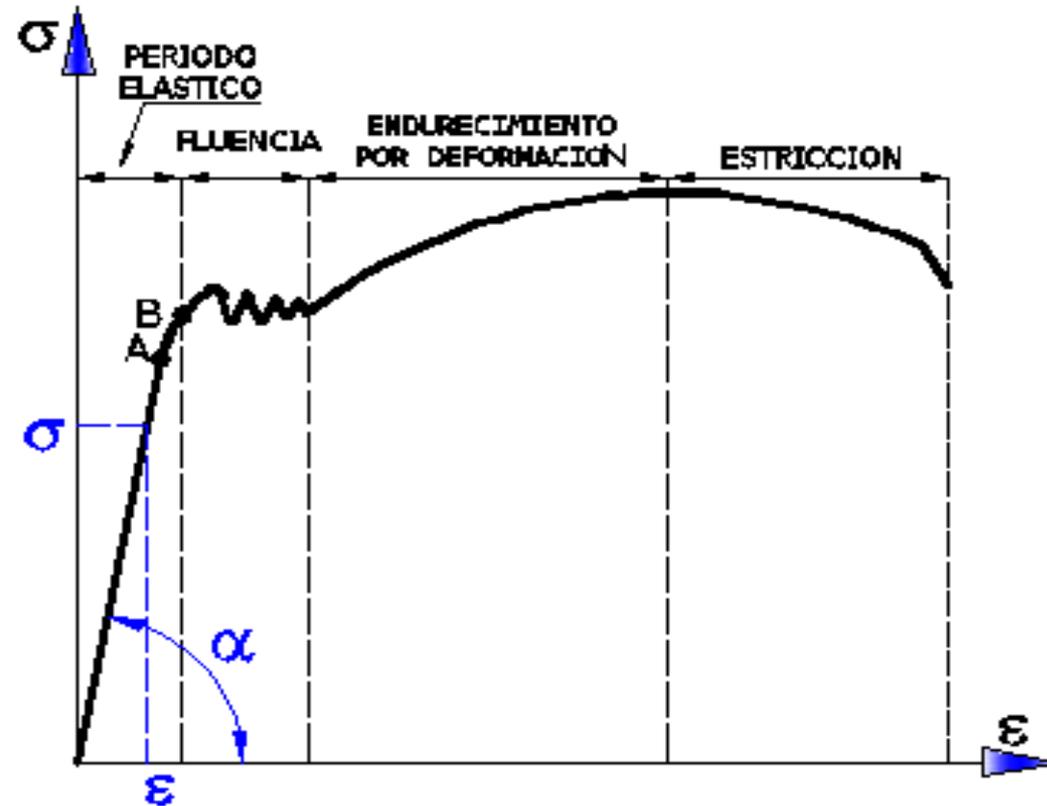


Es posible dividir a los materiales en dúctiles y frágiles. En los primeros hay una marcada deformación antes de la rotura, mientras que en los últimos la rotura se produce en forma repentina sin un cambio notable en el alargamiento.

También es importante mencionar que materiales frágiles (como por ejemplo el hormigón) tienen mayor resistencia a la compresión que a la tracción.

# El diagrama tensión deformación

## Diagrama típico de material dúctil



### Periodo elástico

A: límite de proporcionalidad

B: Límite de elasticidad

$$E = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

### Zona de fluencia

Límite superior e inferior de fluencia: valores entre los que oscila la tensión durante la fluencia.

### Periodo de grandes deformaciones

Una vez finalizada la fluencia, la tensión aumenta hasta alcanzar un valor máximo. A partir de éste comienza la **estricción**. En este periodo se reduce la sección de la probeta hasta alcanzar la deformación por rotura

# Objeto de la resistencia de materiales

La resistencia de materiales tiene por fin la elaboración de métodos relativamente simples de cálculo, aceptables desde un punto de vista práctico. Para ello se utilizan métodos aproximados, recurriendo a hipótesis simplificadoras que deben ser justificadas comparando los resultados con ensayos.

La resistencia de materiales estudia **las relaciones entre las cargas externas aplicadas a un cuerpo deformable y las tensiones que se desarrollan**. Esta disciplina estudia también las deformaciones ocurridas.

Es importante tener en cuenta que hay que recurrir a los códigos y normas existentes para el dimensionamiento final de cualquier estructura.

# Principios generales

- **Materiales:** se consideran homogéneos, isotrópicos, continuos, elásticos y se cumple la proporcionalidad entre tensiones y deformaciones, siendo las deformaciones muy pequeñas.
- **Principio de las dimensiones iniciales (o rigidez relativa):** es una hipótesis simplificativa que considera al cuerpo indeformable al plantear las ecuaciones de equilibrio, solo es posible cuando los desplazamientos son pequeños y no se ve afectada la posición de la carga.
- **Principio de superposición de efectos:** el efecto producido por varias cargas que actúan simultáneamente es igual a la suma de los efectos que produce cada una actuando por separado, es aplicable en ciertos casos a los sistemas elásticos en los que se verifica la ley de Hooke y la sollicitación que actúa produce pequeñas deformaciones tal que no se vean afectadas las condiciones de aplicación de la cargas.
- **Principio de Saint Venant:** el modo de aplicación de la carga no influye a distancias suficientemente alejadas al punto de aplicación.

# El coeficiente de seguridad. Tensiones admisibles

Uno de los objetivos de la resistencia de materiales es determinar las dimensiones de un elemento estructural para que en ningún punto de la misma las tensiones superen valores de referencia determinados (denominados tensiones admisibles), de forma que su comportamiento quede dentro de márgenes de seguridad y no falle en su aplicación.

Una forma posible es trabajar con una tensión admisible que es la máxima tensión permitida en el cálculo .

El factor de seguridad es la relación entre la tensión que produce la falla y la tensión admisible del material.

Lo mas común es: para materiales frágiles se utiliza como tensión de falla la de rotura mientras que en materiales dúctiles se utiliza la de fluencia.

La elección del coeficiente de seguridad apropiado depende de un acertado juicio por parte del ingeniero. Si bien no es tema de esta materia, daremos algunos puntos a tener en cuenta para su elección.

# El coeficiente de seguridad

## Algunos factores a tener en cuenta que influyen en la determinación del coeficiente de seguridad

- ➔ Uniformidad y calidad de los materiales
- ➔ Material dúctil o frágil
- ➔ La adecuada elección de las hipótesis y métodos de cálculo, así como también de la estructura ideal que reemplaza a la real.
- ➔ Aproximaciones numéricas en el cálculo
- ➔ Estimación de cargas
- ➔ Destino
- ➔ Permanencia o vida útil de la estructura
- ➔ Defectos del proceso de fabricación y ejecución de la estructura
- ➔ Otros

# Ecuaciones de equivalencia

Al calcular los esfuerzos característicos en una sección de una estructura en equilibrio, sometida a un sistema de cargas exteriores, lo que hacemos es reducir al baricentro de la sección los esfuerzos actuantes en toda la estructura. Los mismos pueden existir solos o combinados. Por ejemplo, cuando sólo existe una resultante normal al plano de la sección, será de compresión o de tracción o también conocida como sollicitación axial.

Las distintas formas de sollicitación dan origen en el plano de la sección a tensiones tangenciales y normales.

Como vimos, las acciones que se transmiten de uno a otro lado de la estructura no lo hacen en forma de fuerzas o pares concentrados, sino como acciones mutuas de punto a punto, denominadas tensiones. En consecuencia, tendremos actuando sobre cada elemento de superficie, fuerzas elementales. Considerando que existen infinitas fuerzas elementales, las mismas deben ser equivalentes a los esfuerzos característicos que les dan origen.

Ésto nos permite plantear las ecuaciones de equivalencia.

# Ecuaciones de equivalencia

Considerando el eje de la barra como el eje z:

$$N = \int_F \sigma_z . dF$$

$$M_T = \int_F (\tau_{zx} y + \tau_{zy} x) . dF$$

$$Q_y = \int_F \tau_{zy} . dF$$

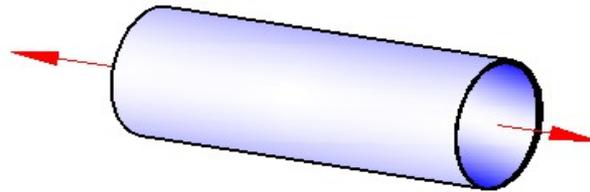
$$M_x = \int_F \sigma_z . y . dF$$

$$Q_x = \int_F \tau_{zx} . dF$$

$$M_y = \int_F \sigma_z . x . dF$$

En las unidades siguientes analizaremos las distintas sollicitaciones utilizando las ecuaciones de equivalencia y planteado distintas hipótesis, dando solución al problema generado por las cargas, en cada caso.

# Solicitación AXIL



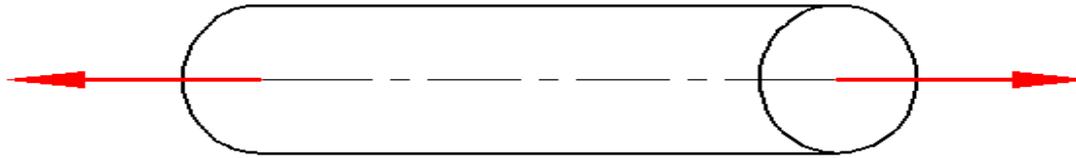
1. Planteo y solución del problema
2. Régimen de tensiones en solicitación axial
3. Deformación en solicitación axial
4. Influencia del peso propio
5. Tensiones por variación de temperatura

# Planteo del problema

La sollicitación axil corresponde al caso en que solo existe una resultante de reducción normal al plano de la sección.

Por ejemplo, es el caso de una barra de eje recto sollicitada por fuerzas opuestas de intensidad  $P$  aplicada en los baricentros de las secciones extremas, en consecuencia el esfuerzo normal es igual a  $P$ .

Los demás esfuerzos característicos serán iguales a 0.



Por lo tanto las ecuaciones de equivalencia:

$$(1) \quad N = \int_F \sigma_z . dF$$

$$(2) \quad 0 = \int_F \tau_{zy} . dF$$

$$(3) \quad 0 = \int_F \tau_{zx} . dF$$

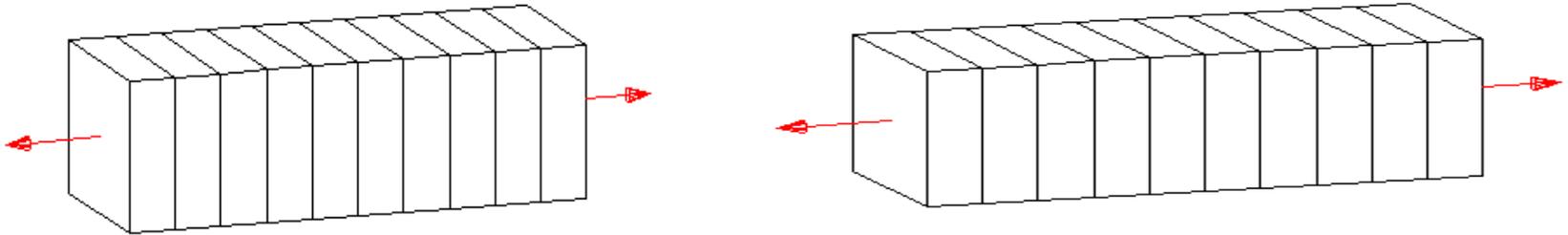
$$(4) \quad 0 = \int_F (\tau_{zx} y + \tau_{zy} x) . dF$$

$$(5) \quad 0 = \int_F \sigma_z . y . dF$$

$$(6) \quad 0 = \int_F \sigma_z . x . dF$$

# Hipótesis a utilizar

- ➡ Material Isótropo, homogéneo y continuo.
- ➡ Ley de Hooke: proporcionalidad entre tensiones y deformación
- ➡ Mantenimiento de las secciones planas y paralelas a si mismas( Hipótesis de Bernoulli-Navier)



- ➡ Principio de Saint Venant: el modo de aplicación de la carga no influye a distancias suficientemente alejadas al punto de aplicación.

# Solución del problema

1) Según la hipótesis de Bernoulli, al mantenerse planas las secciones, y paralelas a sí mismas, los elementos diferenciales de volumen no pueden sufrir distorsión, lo cual indica que las tensiones tangenciales son nulas. Entonces 2 - 3 y 4 de las ecuaciones de equivalencia son idénticamente nulas.

2) Al mantenerse planas las secciones, las deformaciones se mantienen constantes en la sección; y de acuerdo a la ley de Hooke las tensiones normales también son constantes, y teniendo en cuenta la (1) de las EE:

$$N = \sigma_z \cdot \int_F dF \quad \sigma = \frac{N}{F} \quad (7.1)$$

3) Por ser  $\sigma$  constante, de las últimas 2 Ecuaciones de equivalencia:

$$0 = \sigma_z \cdot \int_F y \cdot dF \quad 0 = \sigma_z \cdot \int_F x \cdot dF$$

Nos indican que los ejes x e y son baricéntricos

$$(1) \quad > \quad N = \int_F \sigma_z \cdot dF$$

$$(2) \quad > \quad 0 = \int_F \tau_{zy} \cdot dF$$

$$(3) \quad > \quad 0 = \int_F \tau_{zx} \cdot dF$$

$$(4) \quad > \quad 0 = \int_F (\tau_{zx} \cdot y + \tau_{zy} \cdot x) \cdot dF$$

$$(5) \quad > \quad 0 = \int_F \sigma_z \cdot y \cdot dF$$

$$(6) \quad > \quad 0 = \int_F \sigma_z \cdot x \cdot dF$$

# Las deformaciones en sollicitación axial

## Deformación longitudinal

Considérese una barra de longitud  $L$  y sección transversal uniforme de área  $F$ , de acuerdo a las hipótesis planteadas :



$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \Delta L = \frac{\sigma}{E} L$$

Y teniendo en cuenta la ecuación (7.1)

$$\Delta L = \frac{L \cdot N}{E \cdot F} \quad (7.2)$$

Para barras de secciones escalonadas con saltos discretos:

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{L_i \cdot N_i}{E_i \cdot F_i} \quad (7.3)$$

# Las deformaciones en sollicitación axial

## Deformación específica transversal



Siendo  $z$  la dirección que tienen el eje de la barra la deformación específica transversal ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ) será :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \cdot \varepsilon_z$$

Recordando que  $\mu$  es el coeficiente de Poisson

# Solicitudión Axil

- Tensiones generadas:

$$\sigma_z = N_z / F$$

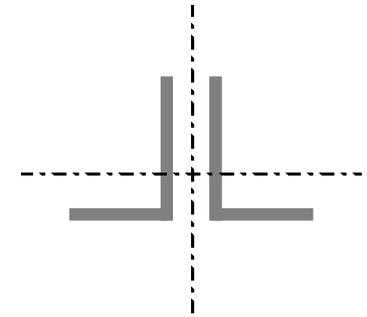
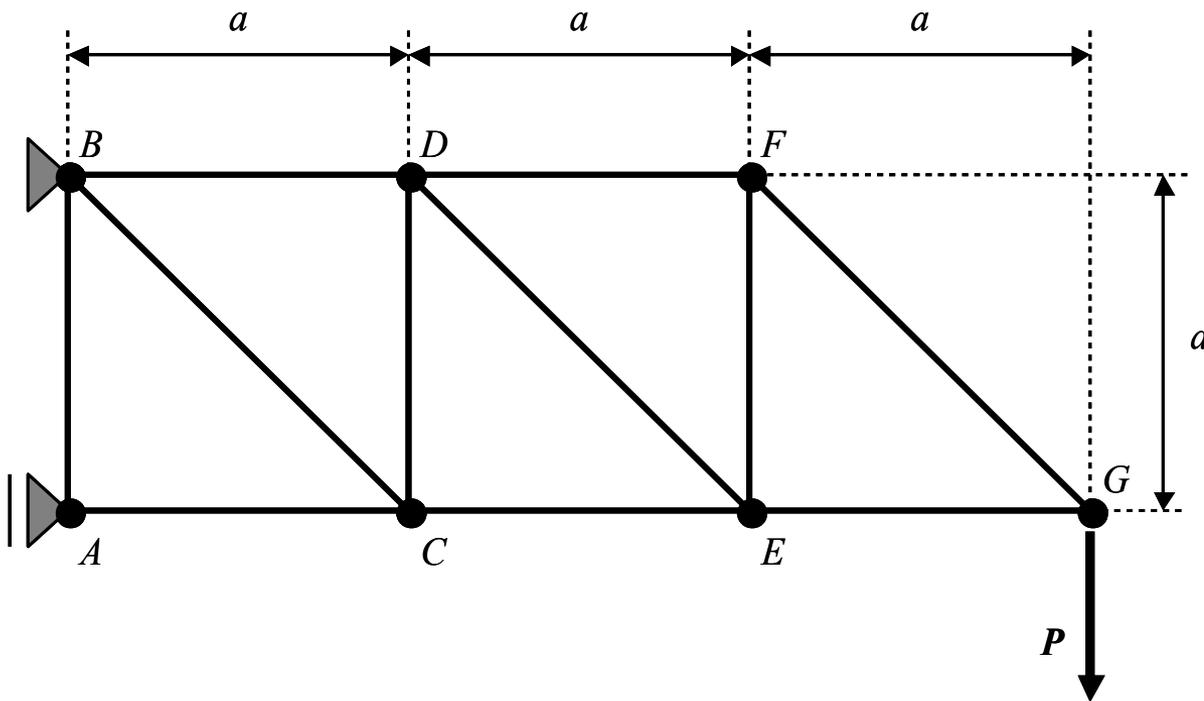
- Deformaciones producidas:

$$\Delta l = \frac{L \cdot N_z}{E \cdot F}$$

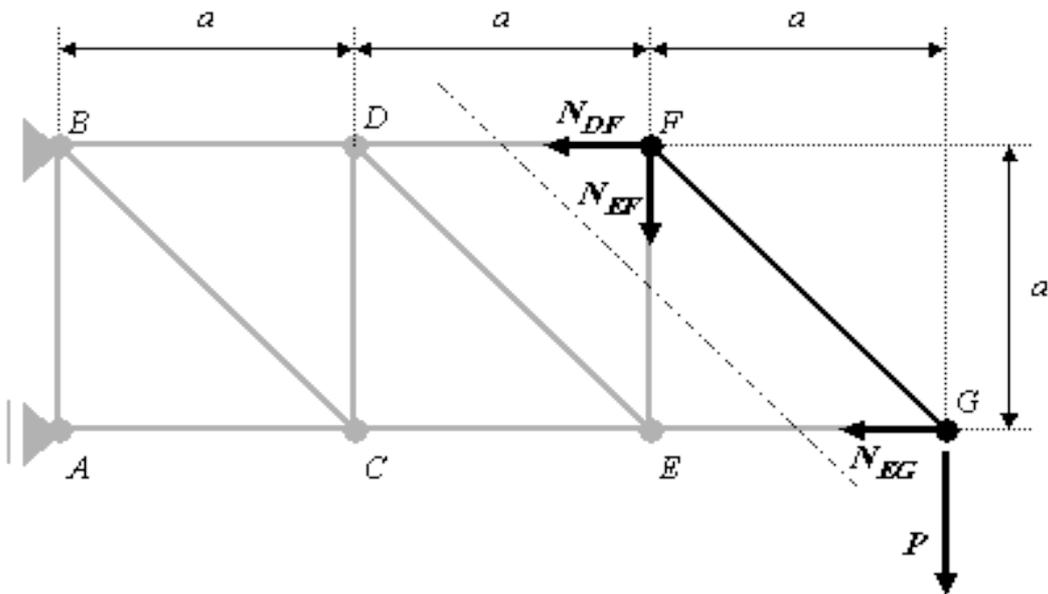
# Ejercicio ejemplo N° 1 (reticulado)

Dado el reticulado plano que se indica en la figura, cuyas barras serán construidas por dos perfiles ángulo de alas desiguales (LD), y teniendo en cuenta los datos indicados en la tabla, se solicita dimensionar las barras  $BD$  y  $DF$

$a$	$P$	$\sigma_{adm}$
$m$	$kN$	$kN/cm^2$
3	120	16



Usaremos el método de Ritter o de las secciones para calcular los esfuerzos normales en las barras deseadas:



$a$	$P$	$\sigma_{adm}$
$m$	$kN$	$kN/cm^2$
3	120	16

1°) Verificamos el reticulado:  
Condición de rigidez ( $b = 2n - 3$ ) y constructiva (triángulo base).

2°) Planteamos ecuaciones del lado derecho del seccionamiento:

$$N_{DF} = P = 120 \text{ KN} \quad \leftarrow \quad \sum_i M_x^E = -a \cdot N_{DF} + P \cdot a = 0$$

3°) Elección del perfil en función de Solicitación AXIL:

Como la sección está formada x 2 perfiles de acero con la tensión de referencia dato, el esfuerzo normal  $N_z$  en cada caso provocaría la necesidad de una  $F_{\min}$

$$F_{BD\min} = \frac{N_{BD}}{\sigma_{ADM}}$$

$$F_{DF\min} = \frac{N_{DF}}{\sigma_{ADM}}$$



Barra DF			
$N_{DF}$	$F_{DF\min}$	2 Perfiles LD	$F_{DF}$
$kN$	$cm^2$		$cm^2$
120	7,50	<b>60x30x5</b>	8,58

# Influencia del peso propio

Si la magnitud del peso propio ( $W$ ) se torna importante, como es el caso de cables muy largos dispuestos verticalmente o de pilares de mucha altura, entonces en la deformación debe ser considerado el peso propio en base al siguiente razonamiento: Sea la barra de sección cte  $F$  y de longitud importante " $l$ " sometida a la acción de la fuerza externa de superficie  $P$ , para la que se considerará además su propio peso  $W$ , Si  $\gamma$  el peso específico del material (fuerza externa de volumen), en una sección cualquiera de coordenada " $z$ " la fuerza normal resultará:

$$N = P + \gamma \cdot F \cdot z$$

$$\sigma_z = \frac{N}{F}$$

$$\sigma_z = \frac{P}{F} + \gamma \cdot z$$

$$\text{Con } W = \gamma \cdot F \cdot l \quad (1)$$

Para 2 secciones separadas un  $dz$ :

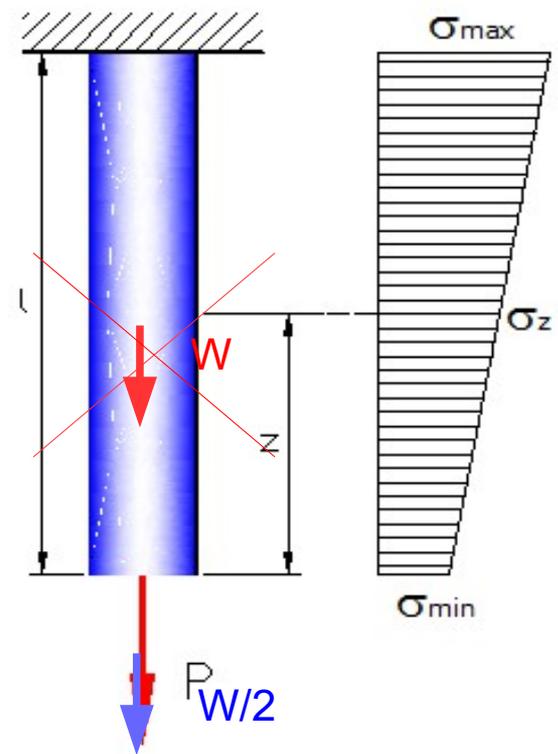
$$\varepsilon = \frac{d\Delta l}{dz} = \frac{\sigma_z}{E}$$

Integrando (2) a lo largo de la longitud " $l$ ":

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} + \frac{\gamma \cdot F \cdot l^2}{E \cdot F \cdot 2} \quad (3)$$

Reemplazando (1) en (3):

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} + \frac{W \cdot l}{2 E \cdot F}$$



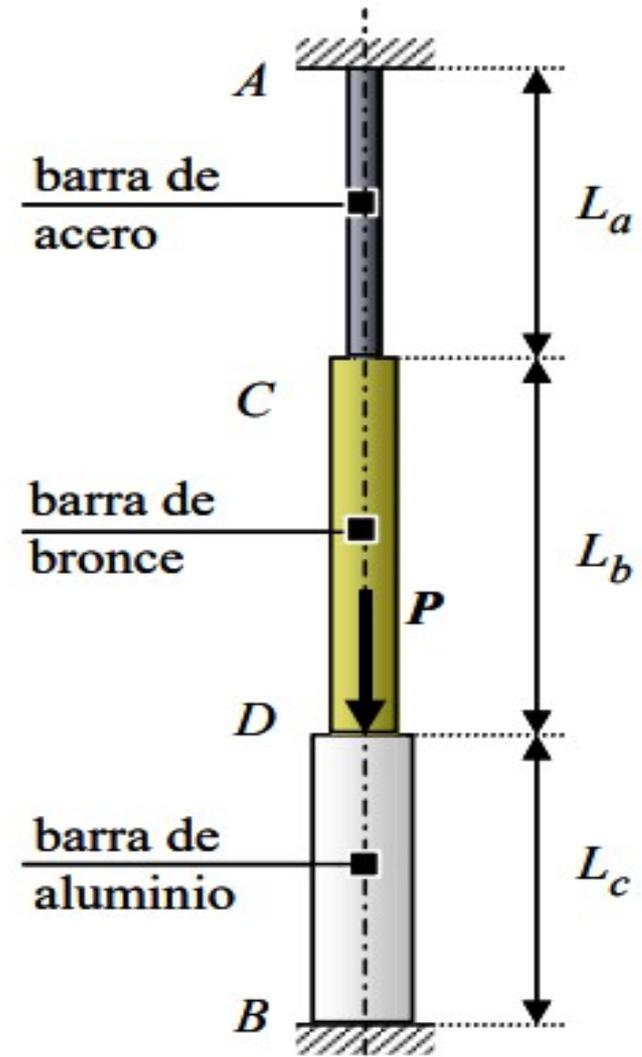
$$d\Delta l = \frac{(P + \gamma \cdot F \cdot z) dz}{E \cdot F} \quad (2)$$

**La  $\Delta l$  producida por efecto del peso propio es la misma que provocaría una carga puntual de la mitad de su magnitud ( $W/2$ ) aplicada en el extremo de la barra**

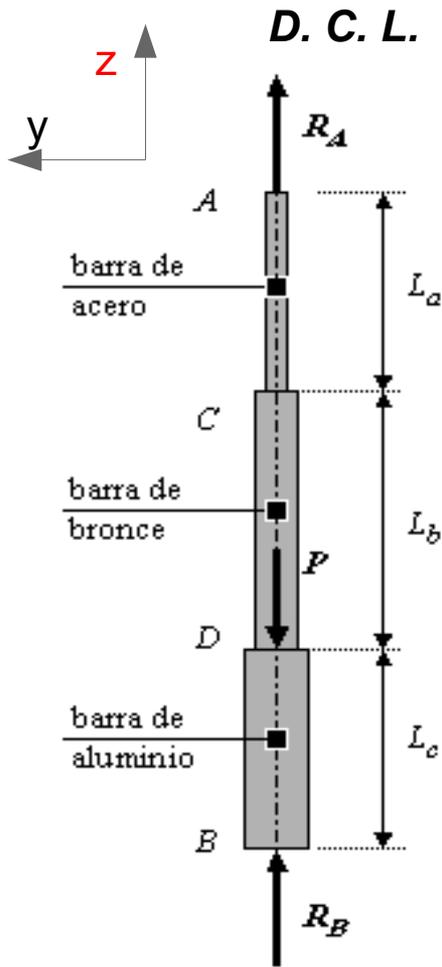
# Ejercicio ejemplo N° 2

Las barras de acero, bronce y aluminio que se observan en la figura están unidas entre sí en forma rígida y empotradas en ambos extremos A y B. Incluyendo los pesos propios de las mismas, y de acuerdo con los datos indicados se solicita:

- Calcular las reacciones de vínculo en A y B.
- Trazar los diagramas de esfuerzos normales  $N_z$  y tensiones normales  $\sigma_z$ .
- Calcular los corrimientos de las secciones C y D.



$L_a$	$L_b$	$L_c$	$F_a$	$F_b$	$F_c$	$\gamma_a$	$\gamma_b$	$\gamma_c$	$E_a$	$E_b$	$E_c$	P
cm	cm	cm	cm <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	kN/m <sup>3</sup>	kN/m <sup>3</sup>	kN/m <sup>3</sup>	kN/cm <sup>2</sup>	kN/cm <sup>2</sup>	kN/cm <sup>2</sup>	kN
500	400	300	12,57	19,64	28,28	78	80	26	21000	9000	8000	8



## Calcular las reacciones de vínculo en A y B.

1) Equilibrio Estático:

La única ecuación que permite plantear la estática es:

$$R_A + R_B = P + W_{\text{acero}} + W_{\text{bronce}} + W_{\text{aluminio}} \quad (1)$$

2) Equilibrio Elástico:

Ecuación de compatibilidad geométrica o de deformaciones:

$$\Delta l_{\text{total}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta L_a(\text{acero}) + \Delta L_b(\text{bronce}) + \Delta L_c(\text{aluminio}) = 0 \quad (2)$$

Cálculo de cada  $\Delta l$  (ingresando a la barra siempre contrario a “z +“):

$$\Delta L_a = \left( R_A - \frac{1}{2} \cdot W_a \right) \cdot \frac{L_a}{E_a \cdot F_a}$$

$$\Delta L_b = \left( R_A - W_a - \frac{1}{2} \cdot W_b \right) \cdot \frac{L_b}{E_b \cdot F_b}$$

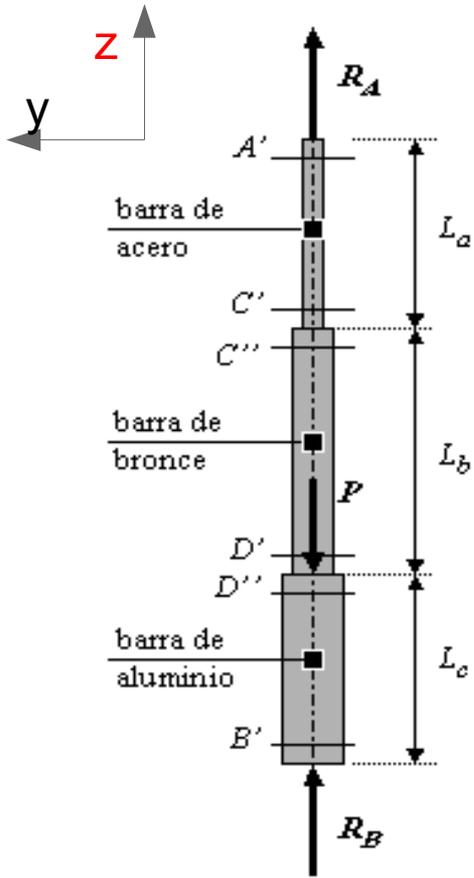
$$\Delta L_c = \left( R_A - W_a - W_b - P - \frac{1}{2} \cdot W_c \right) \cdot \frac{L_c}{E_c \cdot F_c}$$

(1) y (2) configuran un sistema de 2 ec x 2 ?

$W_a$	$W_b$	$W_c$	$R_A$	$R_B$
<i>kN</i>	<i>kN</i>	<i>kN</i>	<i>kN</i>	<i>kN</i>
0,49	0,63	0,22	2,65	6,69

# Trazar los diagramas de esfuerzos normales $N_z$ y tensiones $\sigma_z$

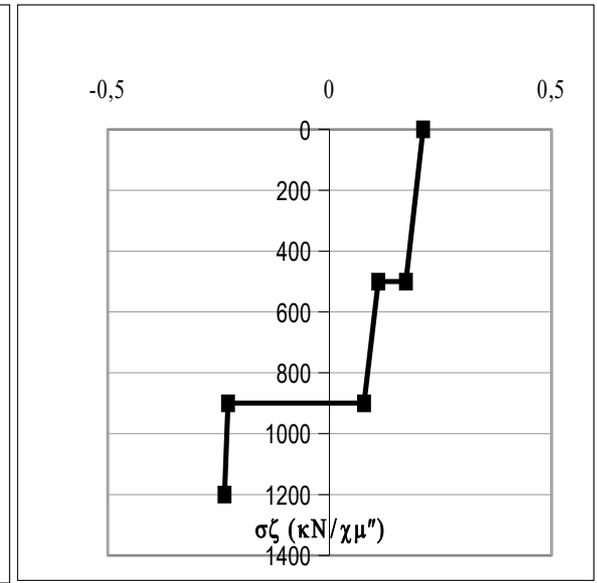
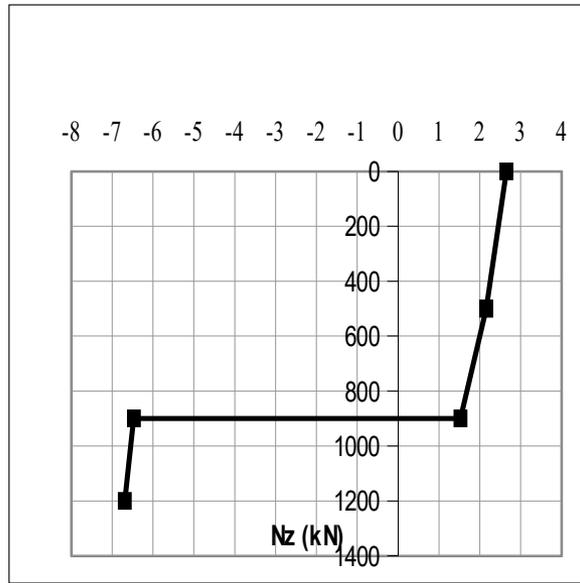
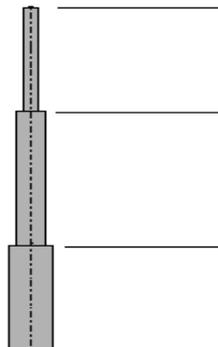
Hay que calcular esfuerzos normales y tensiones en los puntos singulares:



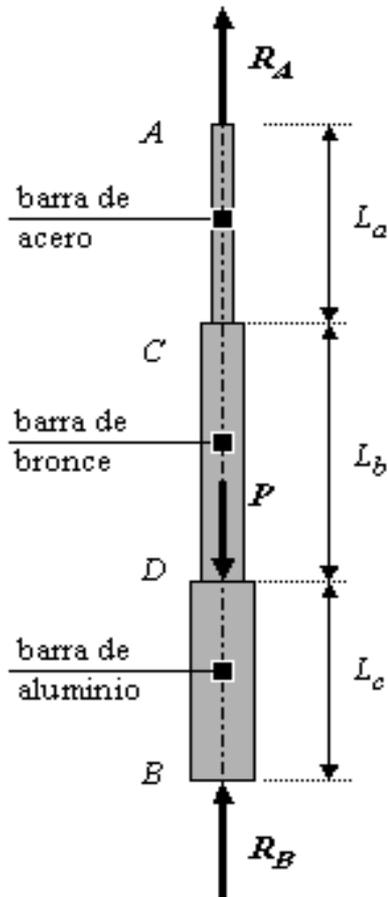
$$\begin{aligned}
 N_{z(A')} &= R_A \\
 N_{z(C')} &= R_A - W_a \\
 N_{z(C'')} &= R_A - W_a \\
 N_{z(D')} &= R_A - W_a - W_b \\
 N_{z(D'')} &= R_A - W_a - W_b - P \\
 N_{z(B')} &= -R_B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z(A')} &= \frac{N_{z(A')}}{F_a} & \sigma_{z(A')} &= \frac{N_{z(C')}}{F_b} & \sigma_{z(A')} &= \frac{N_{z(D')}}{F_c} \\
 \sigma_{z(A')} &= \frac{N_{z(C')}}{F_a} & \sigma_{z(A')} &= \frac{N_{z(D')}}{F_b} & \sigma_{z(A')} &= \frac{N_{z(B')}}{F_c}
 \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, el tramo de aluminio se comprime, mientras que los otros dos se traccionan



## Calcular los corrimientos de las secciones C y D



Ya hemos usado los cálculos para  $\Delta L_a$ (acero);  $\Delta L_b$ (bronce);  $\Delta L_c$ (aluminio)

El corrimiento de "C" es el  $|\Delta l_a(\text{acero})|$ : |ALARGAMIENTO|

El corrimiento de "D" es el  $|\Delta l_c(\text{aluminio})|$ : |ACORTAMIENTO|

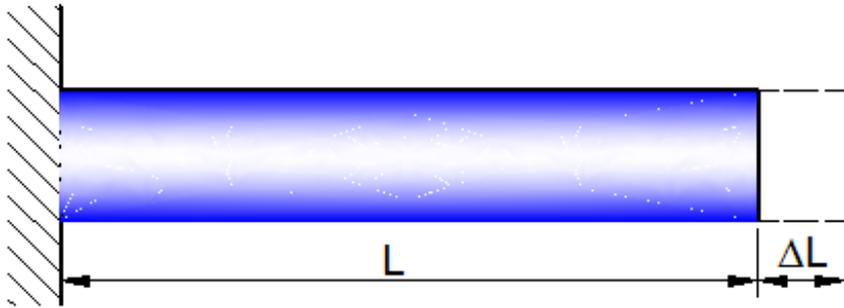
$$w_C = \Delta l_a = \left( R_A - \frac{1}{2} \cdot W_a \right) \cdot \frac{L_a}{E_a \cdot F_a}$$

$$w_D = -\Delta l_c = - \left[ \left( R_A - W_a - W_b - P - \frac{1}{2} \cdot W_c \right) \cdot \frac{L_c}{E_c \cdot F_c} \right]$$

$w_C$	$w_D$
<i>cm</i>	<i>cm</i>
0,0046	0,0087

# Influencia de la temperatura

Sea una barra de sección constante  $F$  y de longitud  $L$ . Supongamos que se somete la barra a un aumento uniforme de la temperatura. Se observa, entonces, un aumento de la longitud :

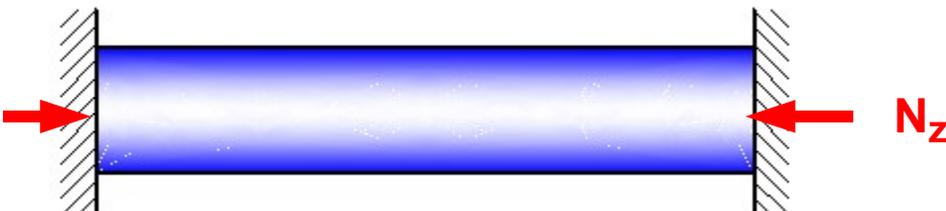


$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta t$$

$\alpha$ : coeficiente de dilatación lineal

En el caso que la barra esté impedida de desplazamiento longitudinal, dicho alargamiento no puede producirse. Éste se anula debido a la fuerza axial que aparece en la reacción del empotramiento.

De esa manera, compatibilizando deformaciones:



$$\Delta l + \Delta l' = 0 \Rightarrow \alpha \cdot l \cdot \Delta t + \sigma \frac{l}{E} = 0$$

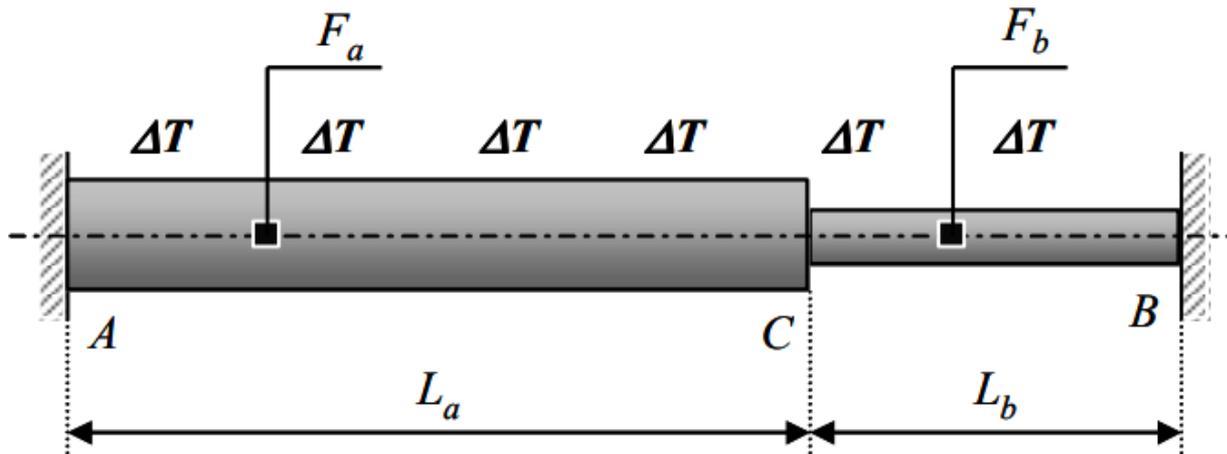
$$\sigma = -\alpha \cdot \Delta t \cdot E$$

$\frac{N_z}{F}$

# Ejercicio ejemplo N° 3

El sistema mostrado en la figura se encuentra sometido a la acción de una variación uniforme de temperatura  $\Delta T$ . Basándose en los datos indicados en la tabla se solicita:

- Trazar el diagrama de tensiones normales  $\sigma_z$  que produce dicho cambio de temperatura
- Calcular el corrimiento de la sección C



$\Delta T$	$\alpha$	$E$	$F_a$	$F_b$	$L_a$	$L_b$
$^{\circ}\text{C}$	$1/^{\circ}\text{C}$	$\text{kN}/\text{cm}^2$	$\text{cm}^2$	$\text{cm}^2$	$\text{m}$	$\text{m}$
50	1,20E-005	21000	30	20	3	2

$\alpha$  : Coeficiente de dilatación térmica lineal

# Trazar el diagrama de tensiones normales $\sigma_z$ que produce el cambio de temperatura

1) Equilibrio Estático:

La única ecuación que permite plantear la estática es:

$$R_B - R_A = 0 \quad (1)$$

2) Equilibrio Elástico:

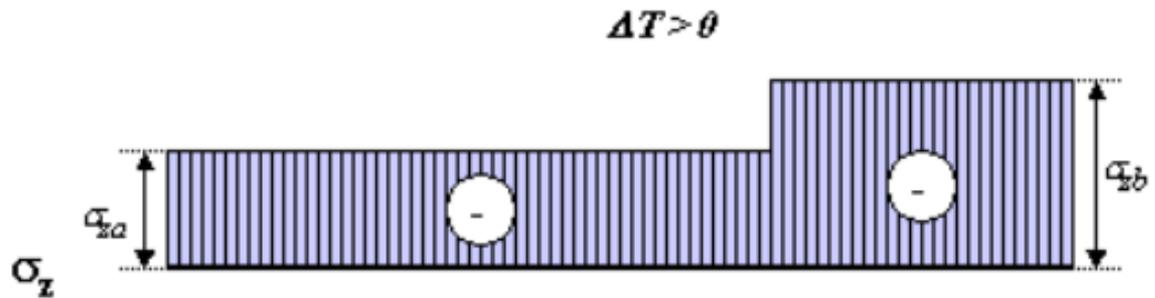
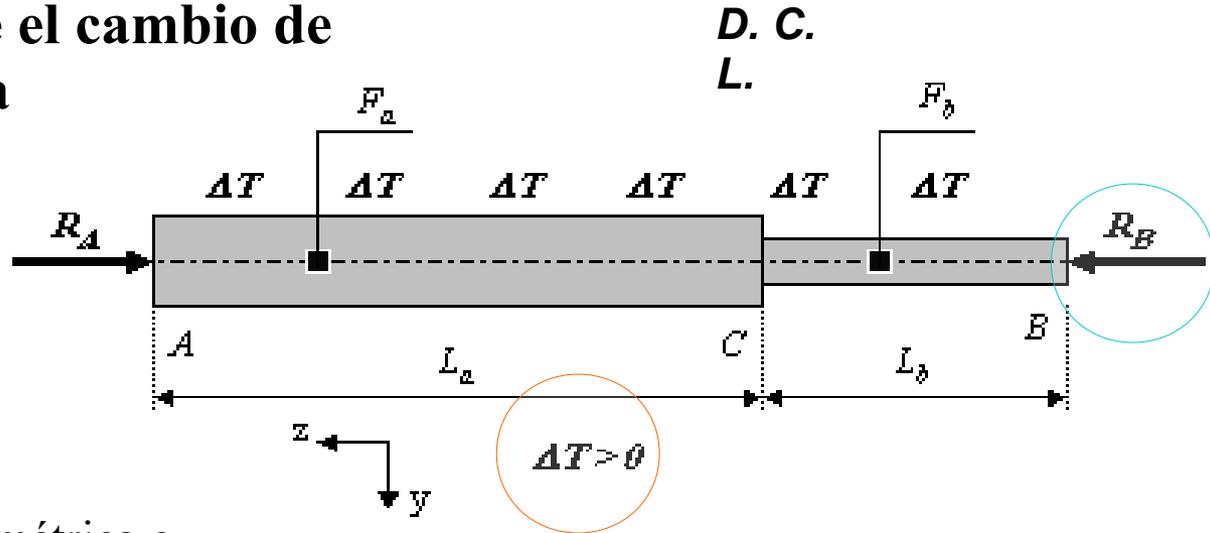
Ecuación de compatibilidad geométrica o de deformaciones:  $\Delta l_{total} = 0$

$$\Delta L_a + \Delta L_b = 0 \quad (2)$$

$$\Delta L_a = -\frac{R_A \cdot L_a}{E \cdot F_a} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L_a$$

$$\Delta L_b = -\frac{R_A \cdot L_b}{E \cdot F_b} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L_b$$

$$R_A = R_B = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot \left( \frac{L_a + L_b}{\frac{L_a}{F_a} + \frac{L_b}{F_b}} \right)$$



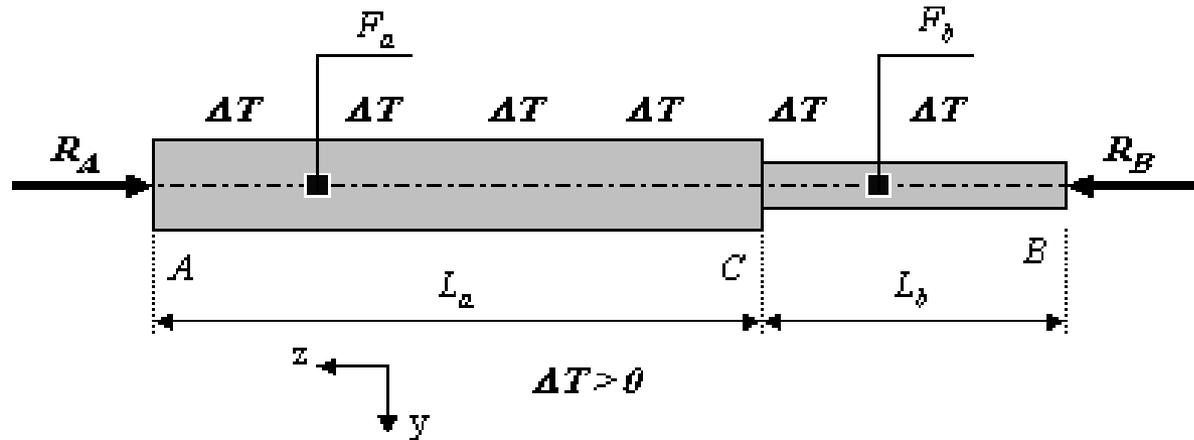
$$\sigma_{za} = \frac{R_A}{F_a}$$

$$\sigma_{zb} = \frac{R_A}{F_b}$$

$R_A$	$R_B$	$\sigma_{za}$	$\sigma_{zb}$
kN	kN	kN/cm <sup>2</sup>	kN/cm <sup>2</sup>
-315	-315	-10,5	-15,75

# Calcular el corrimiento de la sección "C"

**D. C. L.**



El corrimiento de la sección C es simplemente el alargamiento de la parte  $L_a$  que coincide con el acortamiento de la otra  $L_b$  (ya que por la hipótesis de Bernoulli-Navier no hay distorsiones)

$$|\Delta L_b| = \left| -\frac{R_A \cdot L_b}{E \cdot F_b} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L_b \right|$$

$w_C$
[cm]
0,0003