

Facultad de Ingeniería U.B.A – Departamento de Física

Mecanica II (62.07)

Vibraciones en estructuras:

Rigidez y masa efectiva

Ing. Fernando Sánchez Sarmiento

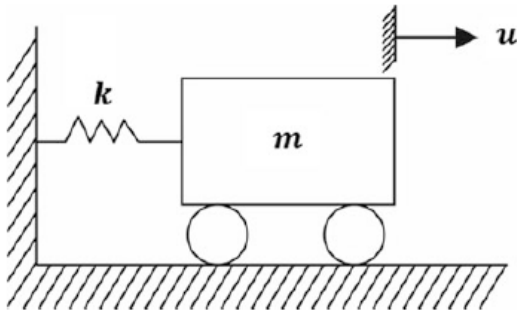
Septiembre 2022

Mef Método analítico: M. Rayleigh

- Basado en la conservación de energía.
- Sin fuerzas exteriores, ni amortiguamientos.

M_{ef}: Método analítico - M. Rayleigh

- Resorte sin masa:



Energía cinética

$$E_C = \frac{1}{2} m \dot{u}^2$$

Energía Potencial

$$E_P = \frac{1}{2} k u^2$$

Energía mecánica

$$E_M = E_C + E_P = cte$$

$$\frac{dE_M}{dt} = m \ddot{u} \dot{u} + k u \dot{u} = 0$$

Solución armónica ya conocida

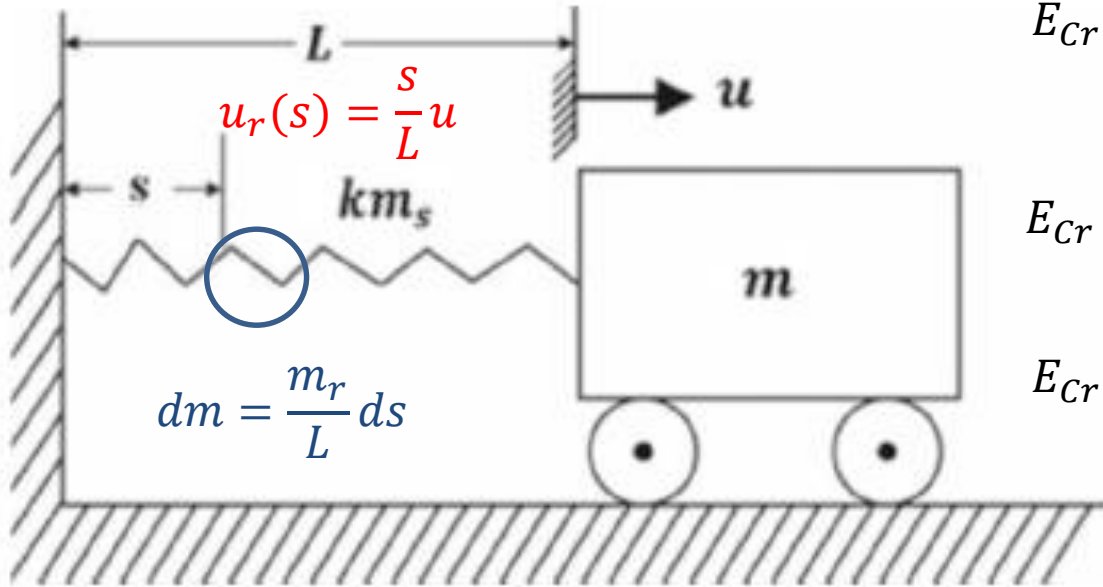
$$m \ddot{u} + k u = 0$$

$$u = \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Mef: Método analítico - M. Rayleigh

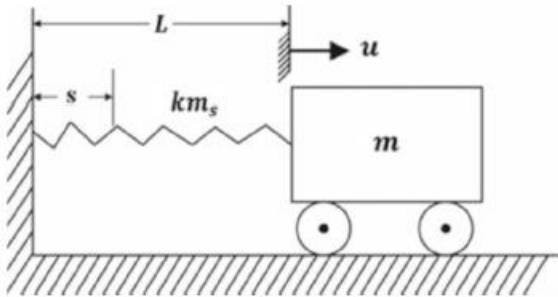
- Resorte con masa:



$$u_r = \frac{s}{L}\dot{u}$$
$$E_{Cr} = \int_{\text{resorte}} \frac{\dot{u}_r^2}{2} dm$$
$$E_{Cr} = \int_0^L \frac{\left(\frac{s}{L}\dot{u}\right)^2}{2} \frac{m_r}{L} ds = \frac{m_r \dot{u}^2}{L^3 2} \int_0^L s^2 ds$$
$$E_{Cr} = \frac{m_r \dot{u}^2}{L^3 6} L^3 = \frac{m_r \dot{u}^2}{6}$$

M_{ef}: Método analítico - M. Rayleigh

- Resorte con masa:



Energía cinética

$$E_C = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{m_r \dot{u}^2}{6} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_r}{3} \right) \dot{u}^2$$

Energía Potencial

$$E_P = \frac{1}{2} k u^2$$

Energía mecánica

$$E_M = E_C + E_P = cte$$

$$\frac{dE_M}{dt} = \left(m + \frac{m_r}{3} \right) \ddot{u} \dot{u} + k u \dot{u} = 0$$

Solución armónica

$$\left(m + \frac{m_r}{3} \right) \ddot{u} + k u = 0$$

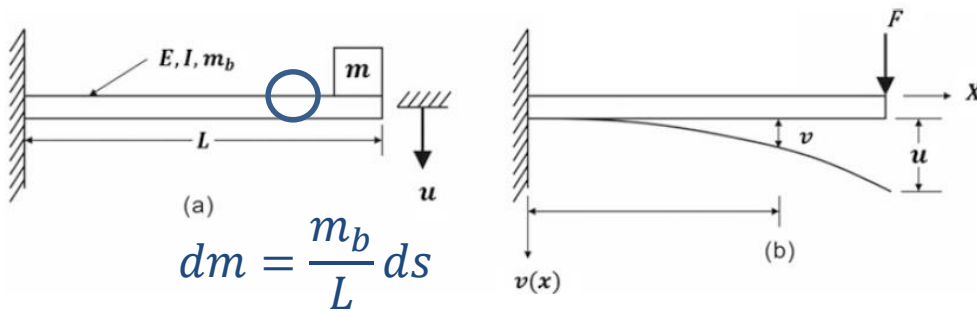
$$u = \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_r}{3}}}$$

Masa efectiva: Masa de la estructura asociada al modo de vibración

M_{ef}: Método analítico - M. Rayleigh

- Viga empotrada



$$v = \frac{PL^3}{3EJ} \left(\frac{3x^2}{2L^2} - \frac{x^3}{2L^3} \right)$$

$$v = u \left(\frac{3x^2}{2L^2} - \frac{x^3}{2L^3} \right)$$

$\frac{d}{dt}$

$$\dot{v} = \dot{u} \left(\frac{3x^2}{2L^2} - \frac{x^3}{2L^3} \right)$$

$$\dot{v}^2 = \dot{u}^2 \left(\frac{3x^2}{2L^2} - \frac{x^3}{2L^3} \right)^2$$

Deformada

$$v = \frac{Px^2}{6EJ} (3L - x)$$

Flecha

$$f = \frac{PL^3}{3EJ} = u$$

Mef: Método analítico - M. Rayleigh

- Viga empotrada

$$E_{Cv} = \int_{\text{resorte}} \frac{\dot{v}^2}{2} dm$$

$$dm = \frac{m_b}{L} dx$$

$$E_{Cv} = \int_0^L \frac{\dot{u}^2 \left(\frac{3x^2}{2L^2} - \frac{x^3}{2L^3} \right)^2}{2} \frac{m_b}{L} dx$$

$$E_{Cv} = \frac{1}{2} \dot{u}^2 m_b \frac{33}{140}$$

Masa efectiva

Energía cinética

$$E_C = \frac{1}{2} \left(m + \frac{33m_b}{140} \right) \dot{u}^2$$

Energía Potencial

$$E_P = \frac{1}{2} ku^2$$

$$\frac{dE_M}{dt} = \left(m + \frac{33m_b}{140} \right) \ddot{u}\dot{u} + ku\dot{u} = 0$$

Solución armónica ya conocida

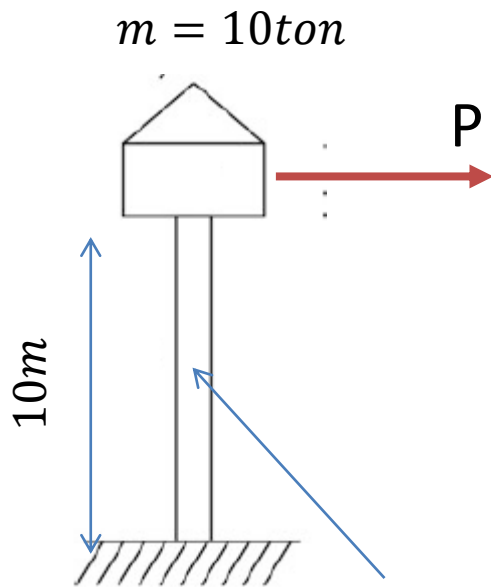
$$\left(m + \frac{33m_b}{140} \right) \ddot{u} + ku = 0$$

$$u = \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{33m_b}{140}}}$$

M_{ef}: Método analítico - M. Rayleigh

- Volviendo al ejemplo de la 1ra clase



Cilíndrico
Dext=1m
Dint=0,9m
Hormigon $E=32e3\text{ Mpa}$
Dens = 2400kg/m³

$$K = \frac{3EJ}{l^3} = 1620(N/mm)$$

$$m_s = 3.58(\text{ton}) \quad m_{ef} = \frac{33}{140} m_s = 0.844(\text{ton})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_L + m_{ef}}} = 12.2 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

Con la masa efectiva

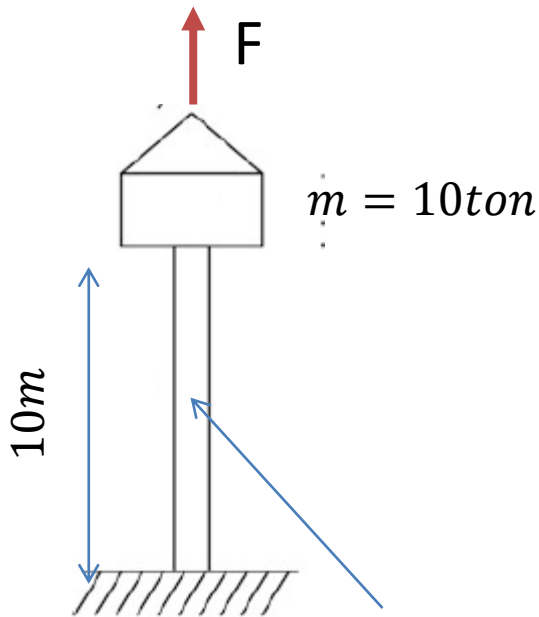
$$\omega = 12.2 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

Sin la masa efectiva

$$\omega = 12,73 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

M_{ef}: Método analítico - M. Rayleigh

- Volviendo al ejemplo de la 1ra clase



Cilíndrico
D_{ext}=1m
D_{int}=0,9m
Hormigon E=32e3 Mpa
Dens = 2400kg/m³

$$K = \frac{AE}{l} = 478000 \frac{N}{mm}$$

$$m_s = 3.58(\text{ton}) \quad m_{ef} = \frac{1}{3} m_s = 1.19(\text{ton})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_L + m_{ef}}} = 206.5 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

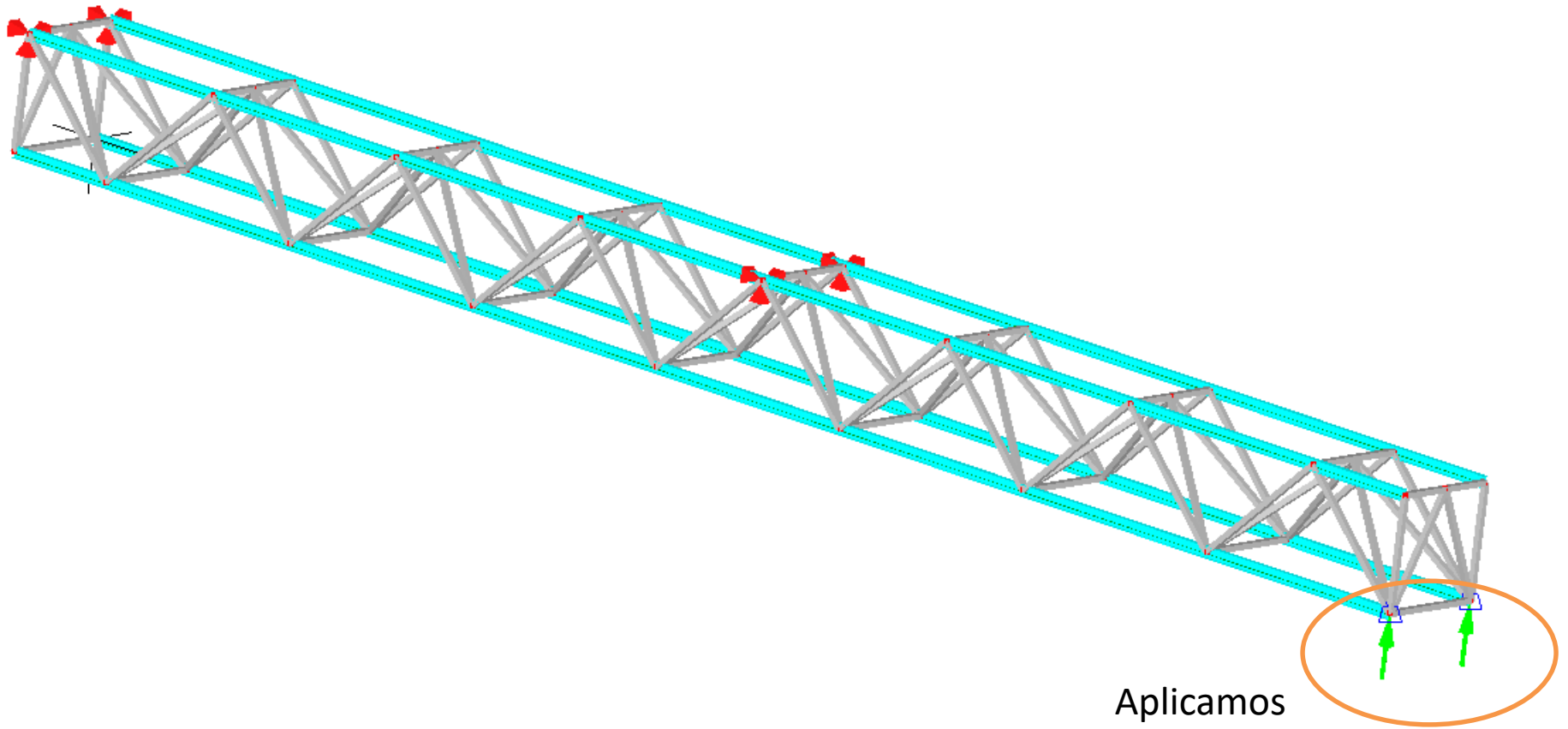
Con la masa efectiva

$$\omega = 206.54 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

Sin la masa efectiva

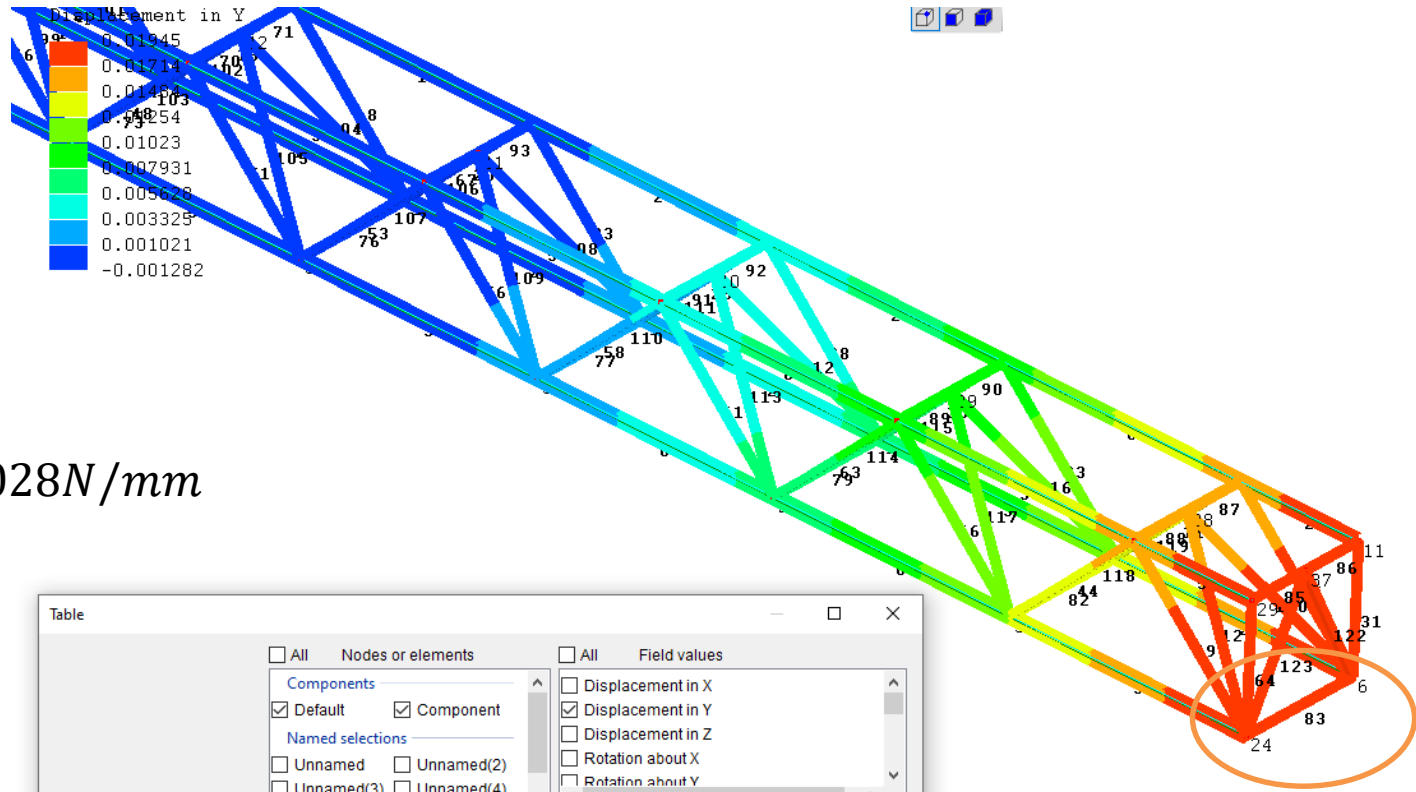
$$\omega = 218,522 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Rigidez de un estructura Real



Aplicamos
una carga
de 20N.

Rigidez de un estructura Real



$$K \cdot U = F$$

$$K = \frac{F}{U} = 1028 \text{ N/mm}$$

Table

All Nodes or elements All Field values

Components

Default Component

Named selections

Unnamed Unnamed(2)

Unnamed(3) Unnamed(4)

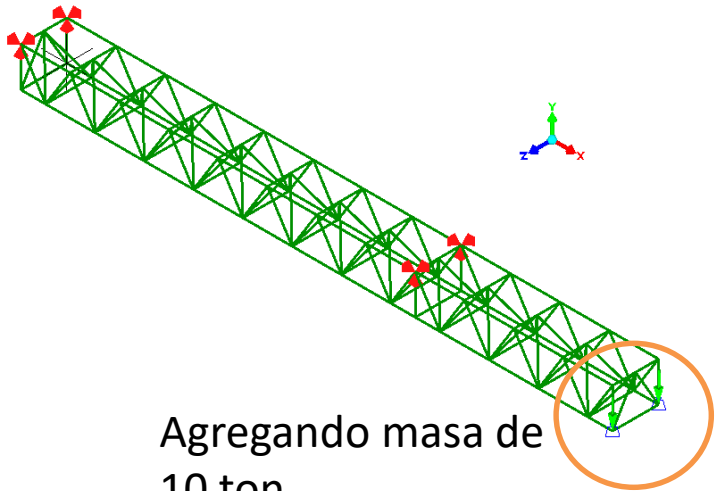
Node coordinates Materials Node values Element values

Node	Displacement in Y
1	-1.26845249627961E-06
2	0
3	-0.000194910685844222
4	-0.000621685831330949
5	-0.000893536399083059
6	0.0194472737494423
7	0.0027050020064407

Write to csv file after solving

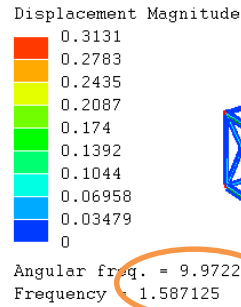
Desplazamiento de
0,019447 mm.

Modos de vibración



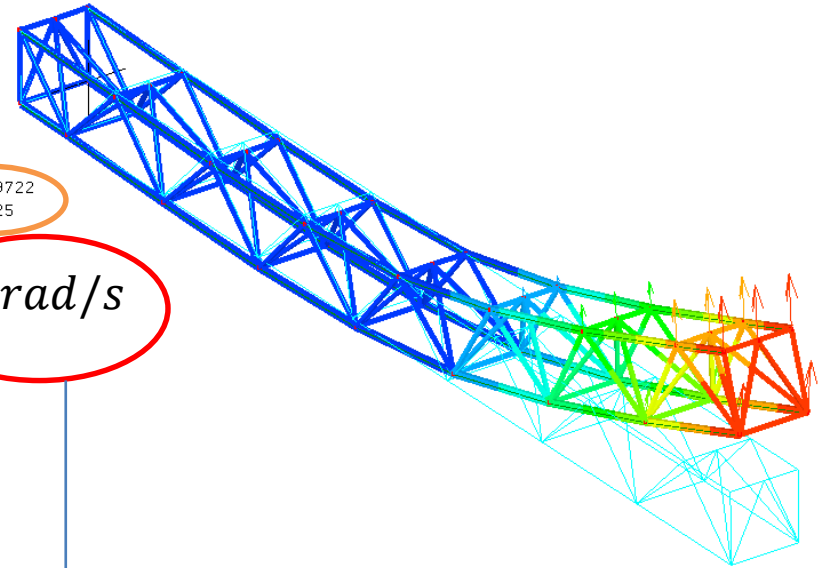
Agregando masa de 10 ton

$$\omega = \sqrt{\frac{1028N/mm}{10ton}} = 10,14rad/s$$



$$\omega = 9,97rad/s$$

Error 2%



Errores variando la masa de carga

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

m	wfem	w resorte	Error %
0,2	50,21	71,71	43
0,5	38,03	45,35	19
2	21,47	22,68	5,6
5	13,97	14,34	2,7
10	9,97	10,14	1,7
20	7,08	7,17	1,2

Errores variando la masa de carga

m	w fem	w resorte	Error %
0,2	50,21	71,71	43
0,5	38,03	45,35	19
2	21,47	22,68	5,6
5	13,97	14,34	2,7
10	9,97	10,14	1,7
20	7,08	7,17	1,2

El error crece cuando disminuye la masa!

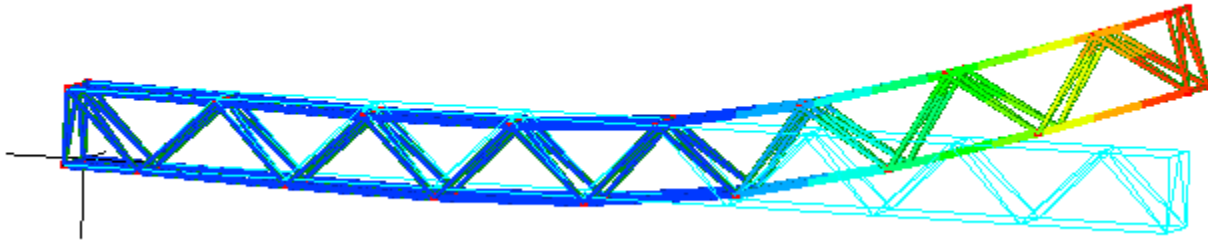
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m_{ef}}}$$

Hay que corregir la masa, agregando la masa de la estructura!

Masa efectiva: Masa de la estructura asociada al modo de vibración

Masa estructural efectiva

- Tiene que ser una fracción de la masa estructural.



- No se mueve toda la estructural igual. Hay zonas que aporta mas masa, y otras no.

Masa estructural efectiva

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m_{ef}}}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m + m_{ef}}$$

$$m + m_{ef} = \frac{k}{\omega^2}$$

Masa efectiva

$$m_{ef} = \frac{k}{\omega^2} - m$$

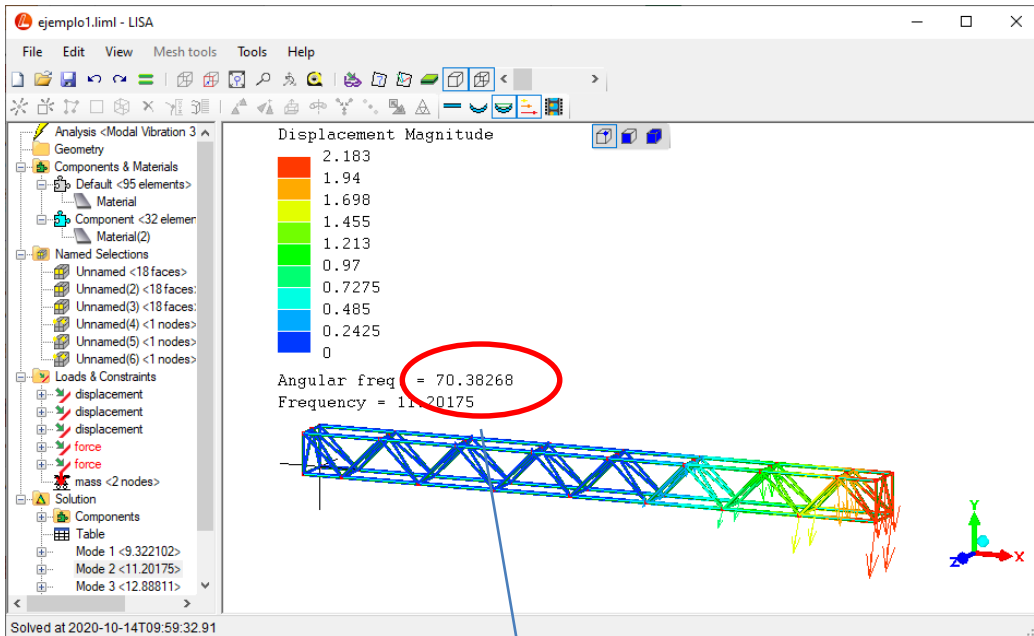
masa suspendida

En la corrida considero una masa suspendida y calculo la frecuencia angular.

Calculada estáticamente
 $K=F/U$

Calculada con FEM

Masa estructural efectiva



$$m_{ef} = \frac{k}{\omega^2} - m = 5,02$$

Masa efectiva: Masa de la estructura asociada al modo de vibración

Masa estructural efectiva

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m_{ef}}}$$

$$\frac{m_{ef}}{m_{es}} < 1$$

Por lo gral este coeficiente es menor que 1.

Masa: Masa de carga, suspendida a la estructura

Masa efectiva: Masa de la estructura asociada al modo de vibración

Errores considerando la m_{ef}

m	m total	wfem	w resorte	Error %	w resorte corregido	Error %
0,2	0,41	50,21	71,71	42,8	50,23	0,03
0,5	0,71	38,03	45,35	19,2	38,12	0,24
2	2,21	21,47	22,68	5,6	21,58	0,53
5	5,21	13,97	14,34	2,7	14,05	0,62
10	10,21	9,97	10,14	1,7	10,04	0,68
20	20,21	7,09	7,17	1,2	7,13	0,67