Tabla de distribuciones utilizadas en el curso

Septiembre de 2021

1. Distribuciones discretas univariadas

Distribución	Notación	$p_X(x)$	Soporte	Parámetros	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{var}(X)$
Bernoulli	$\text{Ber}(p)$	$p^x(1-p)^{1-x}$	$\{0,\, 1\}$	$p \in (0,1)$	p	$p(1-p)$
Binomial	$\mathcal{B}(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$[\![0,n]\!]$	$p \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}$	np	$np(1-p)$
Geométrica	$\mathcal{G}(p)$	$(1-p)^{x-1}p$	$\mathbb{N}$	$p \in (0,1)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Pascal	$\text{Pas}(k,p)$	$\binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$	$\mathbb{Z}_k$	$p \in (0,1),\ k \in \mathbb{N}$	k/p	$k(1-p)/p^2$
Poisson	$\text{Poi}(\mu)$	$(\mu^x e^{-\mu})/x!$	$\mathbb{Z}_0$	$\mu > 0$	μ	μ
Hipergeométrica	$\mathcal{H}(N,d,n)$	$\frac{\binom{d}{x}\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$[\![m,M]\!]^\dagger$	$d \le N,\ n \le N \in \mathbb{N}$	$\frac{nd}{N}$	$\frac{nd(N-d)(N-n)}{N^2(N-1)}$

$^\dagger m = \max\{0, d+n-N\}, M = \min\{n,d\}$

Notación:

$[\![a,b]\!] := \{x \in \mathbb{Z} : a \le x \le b\}$

$\mathbb{Z}_k := \{x \in \mathbb{Z} : x \ge k\}$

1.1. Notas

- La función de probabilidad $p_X(x) = \mathbf{P}(X = x)$ en la tabla vale para x en el soporte indicado, y vale 0 para cualquier otro valor de x.
- La forma de definir los parámetros de las variables aleatorias no tiene una convención universal. En las tablas se intentó respetar el siguiente orden de prioridad: [1], [2], [3]. Al consultar un libro o usar funciones de un software lea atentamente la definición que usa para los parámetros de cada distribución.
- El número combinatorio (*binomial coefficient*) se define como

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad n \in \mathbb{N},\ r = 0,\ 1 \dots n$$

  y el combinatorio generalizado (*multinomial coefficient*):

$$\binom{n}{r_1\, r_2 \dots r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!} \qquad n \in \mathbb{N},\ r_i = 0, 1 \dots n,\ \sum_{i=1}^{k} r_i = n.$$

- Algunos autores llaman "binomial negativa" a la distribución Pascal.

1.2. Algunos modelos

Una variable aleatoria con distribución:

- Bernoulli modela un experimento con dos resultados posibles, asignando el valor 1 a la ocurrencia del evento estudiado (que en general se lo llama *éxito* y tiene probabilidad p) y 0 a la no ocurrencia del mismo (con probabilidad $1 - p$).
- Binomial modela la cantidad de *éxitos* obtenidos al repetir n veces de forma independiente un experimento de Bernoulli con probabilidad p de *éxito*.
- Geométrica modela la cantidad de ensayos necesarios hasta obtener el primer *éxito* si se repite de forma independiente un experimento de Bernoulli con probabilidad p de *éxito*.
- Pascal modela la cantidad de ensayos necesarios hasta obtener k *éxitos* si se repite de forma independiente un experimento de Bernoulli con probabilidad p de *éxito*.
- Hipergeométrica modela la cantidad de *éxitos* en n extracciones sin reposición de una población de tamaño total N, de los cuales d individuos son *éxito* y $N - d$ individuos no lo son.

2. Distribuciones continuas univariadas

Distribución	Notación	$f_X(x)$	Soporte	Parámetros	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{var}(X)$
Uniforme	$\mathcal{U}[a,b]$	$1/(b-a)$	$[a,b]$	$a<b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Exponencial	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$[0,+\infty)$	$\lambda>0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gamma	$\Gamma(\nu,\lambda)$	$\frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-\lambda x}$	$[0,+\infty)$	$\nu>0,\lambda>0$	ν/λ	ν/λ^2
Normal	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathbb{R}$	$\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0$	μ	σ^2
Chi cuadrado	χ^2_k	$\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$	$[0,+\infty)$	$k\in\mathbb{N}$	k	$2k$
t-Student	t_ν	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	$\mathbb{R}$	$\nu>0$	0	$\frac{\nu}{\nu-2}*$
Weibull	$\mathrm{Wei}(c,\alpha)$	$\frac{c}{\alpha}(\frac{x}{\alpha})^{c-1}e^{-(\frac{x}{\alpha})^c}$	$[0,+\infty)$	$c>0,\alpha>0$	$\alpha\Gamma(1+\frac{1}{c})$	$\alpha^2\left[\Gamma(1+\frac{2}{c})-\Gamma^2(1+\frac{1}{c})\right]$
Rayleigh	$\mathrm{Ray}(\sigma)$	$\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)}$	$[0,+\infty)$	$\sigma>0$	$\sigma\sqrt{\pi/2}$	$\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$
Pareto	$\mathrm{Par}(m,\alpha)$	$\frac{\alpha m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$	$[m,+\infty)$	$m>0,\alpha>0$	$\frac{\alpha m}{\alpha-1}$ †	$\frac{m^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ ‡
Beta	$\beta(a,b)$	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$(0,1)$	$a>0,b>0$	$a/(a+b)$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$
Cauchy	$\mathrm{Cau}(x_0,\gamma)$	$\frac{1}{\pi\gamma}\left[\frac{\gamma^2}{(x-x_0)^2+\gamma^2}\right]$	$\mathbb{R}$	$x_0\in\mathbb{R},\gamma>0$	no existe	no existe

† Válida si $\alpha>1$. ‡ Válida si $\alpha>2$. * Válida si $\nu>2$.

2.1. Notas

- La función de densidad $f_X(x)$ en la tabla vale para todo x real en el soporte indicado, y vale 0 para cualquier otro valor de x.
- La forma de definir los parámetros de las variables aleatorias no tiene una convención universal. En las tablas se intentó respetar el siguiente orden de prioridad: [1], [2], [3]. Al consultar un libro o usar funciones de un software lea atentamente la definición que usa para los parámetros de cada distribución.
- La función Gamma se define $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$. Crece muy rápidamente, y para evitar problemas numéricos en algunos algoritmos conviene adaptar las fórmulas para que aparezca el logaritmo de la función $\log|\Gamma(t)|$ (las barras de módulo no molestan pues usaremos habitualmente valores positivos). Algunas propiedades:

$$\Gamma(n)=(n-1)! \quad \text{para } n\in\mathbb{N}$$

$$\Gamma(t+1)=t\Gamma(t) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

2.2. Algunas funciones de supervivencia

Sea T una variable aleatoria continua, $S(t)=\mathbf{P}(T>t)$ (función de supervivencia o *survival function*), vale que:

- si $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ entonces $S(t) = e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$.
- si $T \sim \Gamma(k, \lambda)$ con $k \in \mathbb{N}$ entonces $S(t) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$ para $t > 0$.
- si $T \sim \text{Wei}(c, \alpha)$ entonces $S(t) = e^{-(t/\alpha)^c}$ para $t \geq 0$.
- si $T \sim \text{Ray}(\sigma)$ entonces $S(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}$ para $t \geq 0$.
- si $T \sim \text{Par}(m, \alpha)$ entonces $S(t) = (m/t)^\alpha$ para $t \geq m$.

3. Distribuciones multivariadas

3.1. Variable Multinomial

La variable aleatoria Multinomial $\mathcal{M}(n, p_1, p_2, \ldots p_k)$ modela la cantidad de observaciones de cada resultado posible al repetir n veces de forma independiente un experimento que toma valores en $\{1 \ldots k\}$ (variable categórica o Bernoulli generalizada) con probabilidades p_i para cada resultado $i \in \{1 \ldots k\}$.

Su función de probabilidad es

$$p_{\mathbf{X}}(n, x_1, x_2 \ldots x_k) = \binom{n}{x_1\, x_2 \ldots x_k} p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

con soporte $\{\mathbf{x} \in \{0 \ldots n\}^k, \sum_{i=1}^k x_i = n\}$ y parámetros:

$$0 < p_i < 1, \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Se tiene que para cada una de las variables aleatorias que componen al vector, sus distribuciones marginales estan dadas por

$$X_i \sim \mathcal{B}(n, p_i)$$

.

El vector aleatorio condicionado por $X_1 = x_1$ tiene distribución

$$(X_2, X_3 \ldots, X_k)|X_1 = x_1 \sim \text{Mul}\left(n - x_1, \frac{p_2}{1-p_1}, \frac{p_3}{1-p_1}, \ldots, \frac{p_k}{1-p_1}\right)$$

Además, se tiene que

$$\mathbf{E}(X_i) = np_i, \qquad \mathbf{cov}(X_i, X_j) = \begin{cases} np_i(1-p_i) & i = j \\ -np_ip_j & i \neq j \end{cases}.$$

3.2. Variable Normal bivariada

Se dice que el vector aleatorio (X_1, X_2) tiene distribución normal bivariada $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ si su función de densidad es de la forma

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right)$$

con soporte $\mathbb{R}^2$ y parámetros:

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \sigma_1^2 > 0, \quad \sigma_2^2 > 0, \quad -1 \leq \rho \leq 1.$$

Los parámetros se pueden presentar en forma matricial como el vector μ y la matriz de covarianzas Σ definida positiva, dados por

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Algunas propiedades:

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$X_1|X_2 = x_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \rho\sigma_1\left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right), (1-\rho^2)\sigma_1^2\right)$$

$$X_2|X_1 = x_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_2 + \rho\sigma_2\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right), (1-\rho^2)\sigma_2^2\right)$$

Si el vector aleatorio es de dimensión n, entonces se tendrá la distribución Normal multivariada.

4. Equivalencias

Se usa como notación el signo equivalente $\equiv$ para indicar que dos distribuciones coinciden para determinados parámetros. Se indican sólo algunas equivalencias que se dan en el curso.

4.1. Discretas

- $\mathrm{Ber}(p) \equiv \mathcal{B}(1, p)$
- $\mathcal{G}(p) \equiv \mathrm{Pas}(1, p)$

4.2. Continuas

- $\mathcal{U}(0, 1) \equiv \beta(1, 1)$
- $\mathcal{E}(\lambda) \equiv \Gamma(1, \lambda) \equiv \mathrm{Wei}(1, \frac{1}{\lambda})$
- $\chi_k^2 \equiv \Gamma(\frac{k}{2}, \frac{1}{2})$ con $k \in \mathbb{N}$

Referencias

[1] Grynberg, S. *Variables Aleatorias: momentos (Borradores, Curso 23)*. Buenos Aires: [digital], 27 de marzo de 2013

[2] Maronna, R. *Probabilidad y Estadística Elementales para Estudiantes de Ciencia*. 1ra ed. La Plata: [digital], 1995

[3] Varios artículos [‘· distribution’, ‘Gamma function’]. En *Wikipedia, The Free Encyclopedia.* Consultados en Julio 2016.

[4] DeGroot, M. H. *Probability and Statistics*. 2nd. ed. EE.UU.: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[5] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I.* 2da ed. New York: John Wiley & Sons, 1957.