Probabilidad y Estadística A
(61.06 No Ind - 81.03)

Guía de ejercicios

Facultad de ingeniería, UBA

rev01 - agosto de 2022

Glosario de símbolos

: Alto. Estos ejercicios son importantes, pudiendo ser o no difíciles de resolver. Se recomienda fuertemente resolverlos.

: Curva peligrosa. Estos ejercicios pueden ser más difíciles de lo que parecen a simple vista, o por el contrario, si se miran bien resultan más fáciles de lo que parecen. Ante la duda, consulte a los docentes del curso o en clases de consultas.

$\triangle$: En blanco. Se deja así para compatibilizar la numeración de esta guía con la de otras materias.

Ⓟ : Optativo. Algunos requieren ver temas que no entran estrictamente en el programa (se aclaran entre corchetes); otros tienen un grado excesivo de dificultad. No es necesario hacerlos a fines de aprobar la materia.

: Ejercicios muy difíciles.

: Ayuda para resolver el ejercicio.

Notas

Basada en: *Probabilidad y Estadística, Guía de Ejercicios, Primer Cuatrimestre del 2021, Versión 1.4*

1. Guía 1

1.1. $\triangle$

1.2 (*DeGroot, pp. 38-42*)**.** En un grupo de 200 estudiantes de Ingeniería Industrial, 137 cursan Álgebra II, 60 Probabilidad y 124 Materiales Industriales. Además, 33 cursan Álgebra II y Probabilidad; 29 Probabilidad y Materiales Industriales; y 92 Álgebra II y Materiales industriales. Finalmente, 18 cursan las tres materias. Se elige un estudiante al azar en ese grupo. Calcular la probabilidad de que

(a) curse Álgebra II o Probabilidad.

(b) no curse ni Álgebra II ni Probabilidad.

(c) curse alguna de las tres materias.

(d) curse solo una de las tres materias.

(e) no curse ninguna de las tres materias.

Para cada caso representar los eventos en un diagrama de Venn.

1.3. STOP Sea $\Omega = \{a, b, c\}$. Definimos en los subconjuntos $A \subset \Omega$ una probabilidad $\mathbf{P}$ mediante $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, donde $p(a) = \frac{1}{2}, p(b) = \frac{1}{3}, p(c) = \frac{1}{6}$. Calcular las probabilidades de los 8 subconjuntos de Ω.

1.4. Un dado equilibrado se arroja dos veces. Hallar la probabilidad de que

(a) la suma de los resultados sea 7.

(b) el primer resultado sea mayor que el segundo.

(c) los dos resultados sean distintos y su suma no supere 7.

(d) el módulo de la diferencia de los resultados sea mayor que 1.

1.5. Se tienen dos urnas a y b. En a hay 5 bolas rojas y 3 blancas, y en b hay 2 rojas y 3 blancas. Si se extraen al azar una bola de cada urna, hallar la probabilidad de que

(a) ambas sean rojas.

(b) ambas sean del mismo color.

(c) sean de distinto color.

(d) la bola extraída de la urna b sea blanca.

1.6. Cada noche, después de cenar, el matrimonio Galíndez tira 4 dados. Si no sale ningún 1, le toca al Sr. Galíndez lavar los platos. En caso contrario, a su esposo. En promedio, ¿quién lava los platos más seguido?

1.7. △

1.8. Sea $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Definimos en los subconjuntos $A \subset \Omega$ una probabilidad $\mathbf{P}$ mediante $\mathbf{P}(A) = \sum_{n \in A} p(n)$, donde $p(n) = c/n!$. Hallar el valor de c y calcular $\mathbf{P}(\{0, 2, 4, 6, \dots\})$.

1.9. △

1.10. △

1.11. △

1.12. △

1.13. Una urna contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9.

Se extraen al azar *con reposición* cinco bolas. Calcular la probabilidad de que

1. las cinco sean iguales.
2. según el orden de extracción se observen los números 1,3,5,7,9.
3. se observen los cinco números impares.
4. las cinco sean distintas.

Calcular las probabilidades del inciso anterior, suponiendo que las extracciones se hacen *sin reposición.*

1.14 (*Feller, pág. 56*)**.** La encargada del edificio donde viven otras 29 personas echa a rodar un rumor. A la mañana temprano se lo dice a una vecina, quien a su vez lo repite a una tercera, etcétera. En cada paso el emisor del rumor elige al azar al receptor entre los restantes 29 habitantes del edificio.

Hallar la probabilidad de que el rumor se transmita 12 veces sin retornar a la encargada que lo originó.

Hallar la probabilidad de que el rumor se transmita 12 veces sin que ninguna persona lo reciba más de una vez.

1.15. Una fragata parte de Jamaica con 13 piratas para atacar 3 puertos. Cada pirata elige al azar el puerto en que desembarcará.

1. Calcular la probabilidad de que cuatro piratas desembarquen en Portobelo, cuatro en Maracaibo y cinco en Gibraltar.
2. Calcular la probabilidad de que exactamente 6 piratas desembarquen en Portobelo y seis o más desembarquen en Maracaibo.

3. Calcular la probabilidad de que en algún puerto desembarquen exactamente cinco piratas y en algún otro exactamente cuatro.

1.16. △

1.17. Ⓟ Una planta de ensamblaje recibe una partida de 25 piezas de precisión que incluye exactamente k defectuosas. La división de control de calidad elige 5 piezas al azar para controlarlas y rechaza la partida si encuentra al menos 1 defectuosa.

(a) Si $k = 3$, ¿cuál es la probabilidad de que la partida pase la inspección?

(b) ¿Cómo se comporta la probabilidad $P_k(A)$ de que la partida pase la inspección?

(c) ¿Cuál es la máxima probabilidad de aceptar una partida que contenga más de 5 piezas defectuosas?

1.18. Se elige al azar una permutación de las letras A, T, C, G. Mostrar que

Los eventos "A precede a T" y "C precede a G" son independientes.

Los eventos "A precede *inmediatamente* a T" y "C precede *inmediatamente* a G" *no* son independientes.

1.19. △

1.20. STOP Un dado equilibrado se arroja dos veces.

Sea A el evento "el primer resultado es par", B el evento "el segundo resultado es par" y C el evento "la suma de los resultados es par". Mostrar que los eventos A, B, C son dos a dos independientes, pero los eventos A, B, C no son independientes.

Sea A el evento "el primer resultado es 1,2 o 3", B el evento "el primer resultado es 3,4 o 5" y C el evento "la suma de los resultados es 9". Mostrar que aunque $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$, los eventos A, B, C no son independientes.

1.21. △

1.22. STOP Se tienen 3 urnas a, b, c. En a hay dos bolas rojas y una blanca, en b tres rojas y dos blancas, en c cinco rojas y tres blancas. Se extrae una bola de a: si es roja, se extrae una bola de b, en caso contrario se extrae una bola de c. Indiquemos $R_i, i = 1, 2$ el evento de que la bola en la extracción i fue roja, y $B_i, i = 1, 2$ el evento de que la bola en la extracción i fue blanca.

(a) Calcular $\mathbf{P}(B_1)$.

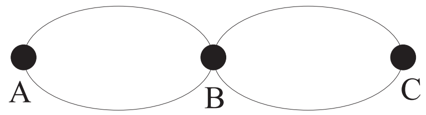
(b) Calcular $\mathbf{P}(B_2)$.

(c) Describir mediante la notación detallada antes y calcular la probabilidad de que la primer bola extraída haya sido blanca sabiendo que la segunda fue roja.

(d) Calcular la probabilidad de que alguna de las bolas extraídas sea roja.

(e) Suponiendo ahora que en a hay 200 bolas rojas y 100 blancas, en b 150 rojas y 100 blancas, y en c 125 rojas y 75 blancas, resolver en estas nuevas condiciones los incisos anteriores. Si se obtienen los mismos resultados, explicar por qué.

1.23. Existen dos caminos de A hasta B y dos caminos de B hasta C.



Cada uno de estos caminos está bloqueado con probabilidad 0.25 independientemente de los demás. Hallar la probabilidad de que exista un camino abierto desde B hasta C sabiendo que no hay ninguna trayectoria abierta desde A hasta C.

: Numerar los cuatro caminos y definir C_i: el camino i está abierto, $i = 1 \ldots 4$.

1.24. Un canal de comunicación binario simple transporta mensajes usando sólo dos señales (bits): 0 y 1. Supongamos que en un canal de comunicación binario dado el 55 % de las señales emitidas son 1, que si se emitió un 0 la probabilidad de que se reciba un 0 es 0.95, y que si se emitió un 1 la probabilidad de que se reciba un 1 es 0.99. Calcular

(a) la probabilidad de que una señal recibida sea 1.

(b) dado que se recibió un 1, la probabilidad de que la señal correspondiente emitida haya sido un 1.

1.25. El 5 % de los bits transmitidos por un canal de comunicación binario es 0. El programa receptor indica que hay un 0 en el mensaje cuando efectivamente el 0 ha sido emitido, con probabilidad 0.9. ¿Cuál debe ser la probabilidad de que el receptor indique que hay un 1 cuando efectivamente el 1 ha sido emitido, para que la probabilidad de que haya sido emitido un 0 cuando el receptor indica que hay un 0 sea 0.99?

1.26. Harvey "*dos caras*" tiene una moneda de dos caras y dos monedas con cara y ceca equilibradas.

(a) Elige una moneda al azar y la arroja al aire dos veces consecutivas. Si el primer resultado fue cara, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo también sea cara?

(b) Elige una moneda al azar, la arroja al aire y sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

(c) Harvey arroja la misma moneda por segunda vez y de nuevo sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

(d) Harvey arroja la misma moneda por tercera vez y de nuevo sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de las monedas que tiene ceca?

1.27. La urna a contiene 3 bolas blancas y 7 rojas. La urna b contiene 12 blancas y 8 rojas. Se elige una urna al azar y se extrae una bola; esta bola se reintegra a la misma urna y se vuelve a extraer una bola de ella.

(a) Si la primer bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda también lo sea?

(b) ¿Son independientes los sucesos "primera bola es blanca" y "segunda bola es blanca"?

1.28. Ⓟ

(a) Se tienen dos monedas, a y b, de probabilidades $1/2$ y $1/3$ de cara, respectivamente (cada vez que se lanza la moneda la probabilidad de observar cara es la indicada, independientemente del resto de los lanzamientos). Se elige una moneda al azar y se la tira dos veces. Considere los eventos $A_i =$"salió cara en el i-ésimo tiro", $i = 1, 2$, y $B =$ "se eligió la moneda a". ¿Dado B, A_1 y A_2 son independientes? ¿A_1 y A_2 son independientes?

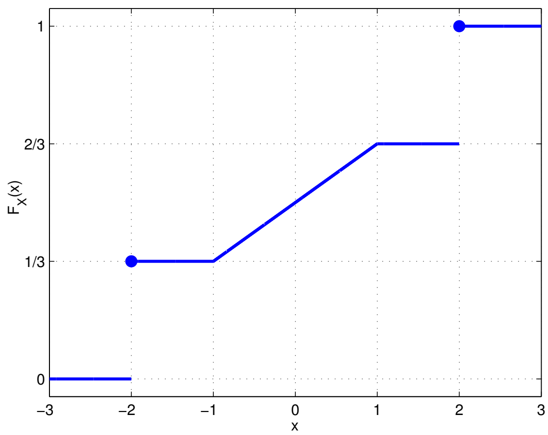
(b) Se tira una moneda equilibrada dos veces. Considere los eventos $A_i =$ "salió cara en el i-ésimo tiro", $i = 1, 2$, y $B =$ "salió al menos una ceca". Dado B, A_1 y A_2 son independientes?

---

2. Guía 2

2.1. △

2.2. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ tiene gráfico de forma



(a) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}$ la variable X concentra masa positiva?

(b) Calcular $\mathbf{P}(-2 < X \leq 2)$, $\mathbf{P}(-2 \leq X \leq 2)$, $\mathbf{P}(-2 \leq X < 2)$ y $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$.

(c) Calcular $\mathbf{P}(X \in (-2, -1))$, $\mathbf{P}(|X| \leq 1)$ y $\mathbf{P}(X \in (1, 2))$.

(d) Calcular $\mathbf{P}(X \leq 1.5 | X < 2)$ y $\mathbf{P}(X \leq 1.5 | X \leq 2)$.

(e) Calcular $\mathbf{P}(X = -2 |\ |X| = 2)$.

2.3. En una urna hay 3 bolas verdes y 5 bolas rojas.

(a) Se realizan 4 extracciones con reposición. Hallar y graficar la función de probabilidad de la cantidad de bolas verdes observadas.

(b) Se realizan 4 extracciones sin reposición. Hallar y graficar la función de probabilidad de la cantidad de bolas verdes observadas.

2.4. Se tiene una moneda cargada con probabilidad $p = 5/8$ de salir "cara".

(a) Hallar, para cada $k \in \mathbb{N}$, la función de probabilidad de la cantidad N_k de lanzamientos necesarios de dicha moneda hasta observar k-ésima cara.

(b) Calcular la probabilidad de que N_1 sea par.

(c) Calcular $\mathbf{P}(N_1 = 3)$ y $\mathbf{P}(N_2 = 5 | N_1 = 2)$.

(d) Calcular $\mathbf{P}(N_1 > 3)$ y $\mathbf{P}(N_1 > 5 | N_1 > 2)$.

(e) Calcular $\mathbf{P}(N_2 > 3)$ y $\mathbf{P}(N_2 > 5 | N_2 > 2)$.

: Notar que N_k tiene distribución $\text{Pas}(k, 5/8)$

2.5. La cantidad N de partículas alfa emitidas (por segundo) por una fuente de polonio es una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro $1/2$. Calcular la probabilidad de que la fuente

(a) Emita más de tres partículas alfa en un segundo.

(b) Emita una cantidad impar de partículas en un segundo.

2.6. $\triangle$

2.7. Sea X una variable aleatoria con función densidad

$$f_X(x) = 2x\mathbf{1}\{0 \leq x \leq 1\}.$$

Sabiendo que la suma de los primeros dos dígitos decimales de X es 3, calcular la probabilidad de que el primer dígito de X sea 2.

2.8. [*ver* 2.4] El tiempo en segundos que tarda una fuente de polonio en emitir k partículas alfa es una variable aleatoria T_k con función densidad

$$f_{T_k}(t) = \frac{(1/2)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-t/2} \mathbf{1}\{t > 0\}.$$

(a) Calcular $\mathbf{P}(T_1 > 3)$ y $\mathbf{P}(T_1 > 5 | T_1 > 2)$.

(b) Calcular $\mathbf{P}(T_3 > 3)$ y $\mathbf{P}(T_3 > 5 | T_3 > 2)$.

: Notar que T_k tiene distribución $\Gamma(k, 1/2)$

2.9. Ⓟ Mostrar que existe una variable aleatoria Z tal que su función de distribución es de la forma

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Usando la tabla de distribución normal (o un software adecuado):

(a) calcular los valores de $\Phi(z)$ para $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(b) para cada $\alpha \in \{0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.99, 0.995, 0.999\}$ hallar los cuantiles $z_\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\Phi(z_\alpha) = \alpha$.

(c) calcular $\mathbf{P}(-0.43 < Z < 1.32)$, $\mathbf{P}(1.28 < Z < 1.64)$ y $\mathbf{P}(|Z| < 1.64)$.

(d) hallar las constantes que satisfacen las siguientes ecuaciones $\mathbf{P}(Z < a) = 0.05$, $\mathbf{P}(Z > b) = 0.1$, $\mathbf{P}(|Z| < c) = 0.95$.

2.10. Ⓟ Sea Z una variable normal estándar y sea $X = Z^2$.

(a) Expresar la función de distribución de X usando la función Φ.

(b) Hallar la función densidad de X.

2.11. △

2.12. △

2.13. △

2.14. △

2.15. △

2.16. △

2.17. Ⓟ [*ver definición de función intensidad de fallas*] Sea T el tiempo hasta que ocurre la primera falla en un producto industrial, con función intensidad de fallas $\lambda(t)$ de la forma

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \mathbf{1}\{t > 0\},$$

donde $\alpha, \beta > 0$.

Hallar la función de distribución y la función densidad de T.

Si $\beta < 1$ se dice que el producto tiene *fallas tempranas*, si $\beta = 1$ se dice que tiene *fallas casuales o con falta de memoria*, y si $\beta > 1$ se dice que tiene *fallas por desgaste*. Indicar en cuál de estas tres categorías clasificaría usted a los siguientes productos según su modo de falla

- Producto: un neumático; T: tiempo hasta una pinchadura causada por objetos punzantes en las calles.
- Producto: un neumático; T: tiempo hasta que se desgasta el surco y pierde agarre.
- Producto: un neumático; T: tiempo hasta que revienta como consecuencia de una falla de fábrica.
- Producto: una heladera; T: tiempo hasta que el usuario se da cuenta que salió fallada de fábrica.
- Producto: una heladera; T: tiempo hasta que falla el sistema de enfriamiento.
- Producto: una heladera; T: tiempo hasta que el motor se quema por un brusco cambio de tensión.

(a) Comparar e interpretar probabilísticamente los gráficos de las densidades que se obtienen cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0.5, 1, 1.5$.

(b) Para cada caso calcular $\mathbf{P}(T > 1)$ y $\mathbf{P}(T > 4|T > 3)$.

: notar que en todos los casos T tiene distribución Weibull.

2.18. La función de distribución del tiempo T (en días) hasta que ocurre la primera falla en un producto industrial es

$$F_T(t) = \left(1 - e^{-\sqrt{t/60}}\right)\mathbf{1}\{t > 0\}.$$

El producto tiene una garantía de 30 días. Debido a la gran cantidad de reclamos se decidió someter todos los productos a una prueba de 30 días y descartar los que fallan. Hallar la probabilidad de que un producto no descartado falle antes de otros 30 días (inmediatamente posteriores a los de la prueba).

2.19. El diámetro X (en mm.) de las arandelas fabricadas por una máquina tiene como función de densidad a

$$f_X(x) = \frac{2x}{225}\mathbf{1}\{0 < x < 15\}.$$

Un sistema de control descarta las arandelas cuyo diámetro es inferior a 3 o superior a 12.

(a) Hallar la densidad del diámetro de las arandelas no descartadas.

(b) Hallar la densidad del diámetro de las arandelas descartadas.

2.20. Sea X, la distancia (en decímetros) del punto de impacto al centro de un blanco circular, una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{2}{7}\mathbf{1}\{0 \leq x < 2\} + \frac{10 - 2x}{21}\mathbf{1}\{2 \leq x < 5\}.$$

(a) Hallar la función de densidad de las distancias de impacto menores que 30 cm.

(b) Hallar la función de densidad de las distancias de impacto mayores que 30 cm.

2.21. Una urna contiene 3 bolas verdes, 2 amarillas y 3 rojas.

(a) Se seleccionan 4 bolas al azar (sin reposición). Sean X la cantidad de bolas verdes observadas e Y la cantidad de bolas amarillas observadas. Hallar la función de probabilidad conjunta y las funciones de probabilidad marginales. ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad total de bolas verdes o amarillas observadas no supere a 2?

(b) Repetir el inciso anterior para extracciones con reposición.

: Representar todos los resultados posibles para el par (X, Y) en una grilla de puntos en el plano.

2.22. Sea (X, Y) un punto con distribución uniforme sobre el semicírculo $\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\, x \geq 0\}$.

(a) Calcular $\mathbf{P}(|Y| < X)$.

(b) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(c) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.23. Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = 8xy\mathbf{1}\{0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

(a) Calcular $\mathbf{P}(X + 1 > 2Y)$.

(b) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(c) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.24. Ⓟ [*Ver variable aleatoria normal bivariada en la bibliografía y en la tabla de distribuciones*] Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}\left(x^2 - xy + y^2\right)}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

(b) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

2.25. Una fábrica textil produce rollos de tela con dos tipos de fallas: de tejido y de teñido. En cada rollo, la cantidad de fallas de tejido tiene distribución Poisson de parámetro 2 y la cantidad de fallas de teñido tiene distribución Poisson de parámetro 4. Ambas cantidades son independientes.

(a) Calcular la probabilidad de que un rollo de tela no tenga fallas.

(b) Calcular la probabilidad de que un rollo de tela tenga exactamente una falla.

(c) Dado que un rollo de tela tiene exactamente una falla, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea una falla de tejido?

2.26. Lucas y Monk quedaron en encontrarse en el bar del CEI a las 18:00. El horario de llegada de Lucas, L, es uniforme entre las 18:00 y las 18:15. Lucas espera 15 min. a Monk y si no llega se va. El horario de llegada de Monk, M, es independiente del de Lucas y se distribuye uniformemente entre las 18:05 y 18:20. Monk es más impaciente que Lucas y espera como máximo 5 min. antes de irse. Calcular la probabilidad de que Lucas y Monk se encuentren.

---

3. Guía 3

3.1. Sea X un variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = \frac{x^3}{3}\mathbf{1}\{0 \leq x < 1\} + \frac{2x+1}{6}\mathbf{1}\{1 \leq x < 2\} + \mathbf{1}\{x \geq 2\}.$$

(a) Calcular $\mathbf{E}[X]$.

(b) Calcular $\mathbf{E}[X|X < 1]$ y $\mathbf{E}[X|X \leq 1]$.

3.2. Sea X una variable aleatoria con la función de distribución definida en el ejercicio 2.2.

(a) Calcular $\mathbf{E}[X]$.

(b) Calcular $\mathbf{E}[X|\,|X| = 2]$.

3.3. Hallar la media de las variables aleatorias definidas en el ejercicio 2.4.

3.4. $\triangle$

3.5. La cantidad de moscas que arriban a la mesa de un asado tiene una distribución Poisson de media 10. Calcular la media de la cantidad de moscas que podrán arribar a la mesa del asado si se sabe que no podrán arribar más de 4.

3.6. Sea T una variable aleatoria con distribución exponencial de media 3. Calcular $\mathbf{E}[T|T \leq 2]$.

3.7. Sea X un variable aleatoria con función de densidad $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Si $f_X(x) = \frac{9!}{3!5!}x^3(1-x)^5\,\mathbf{1}\{0 < x < 1\}$, calcular $\mathbf{E}[X]$.

(b) Si $f_X(x) = \frac{1}{6}x^3e^{-x}\mathbf{1}\{x > 0\}$, hallar $\mathbf{E}[X]$.

(c) Hallar $\mathbf{E}[X|X > 1/2]$ con los datos del b.

3.8. Sea Z una variable normal estándar, φ su función de densidad, y sea $z_0 > 0$.

(a) Hallar la media de $Z|Z > z_0$ (en función de z_0).

(b) Deducir que $1 - \Phi(z_0) \leq \frac{\varphi(z_0)}{z_0}$.

(c) Comparar la estimación que brinda el inciso anterior para $\mathbf{P}(Z > 3)$ con el valor tabulado.

(d) Si $X = \sigma Z + \mu$ y $x_0 > \mu$, hallar la media de $X|X > x_0$ (en función de x_0, μ y σ).

3.9. Ⓟ Sean Z_1 y Z_2 dos variables aleatorias normales estándar (no necesariamente independientes). Demostrar que

$$\mathbf{P}(\text{máx}(Z_1, Z_2) > 5) \leq \frac{2e^{-\frac{25}{2}}}{5\sqrt{2\pi}}.$$

3.10. Se construye un círculo uniendo los extremos de un alambre.

(a) Si la longitud del alambre L es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 60 cm., calcular la media del área del círculo.

(b) Si el área del círculo A es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 15 cm^2, calcular la media del perímetro del círculo.

3.11. △

3.12. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes uniformes sobre el intervalo $(0, \pi)$. Calcular $\mathbf{E}[X \operatorname{sen}(XY)]$.

3.13. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el triángulo de vértices $(1, 1), (6, 2), (2, 9)$. Calcular $\mathbf{E}[X]$ y $\mathbf{E}[Y]$.

3.14. Sea X una variable aleatoria a valores en $\{2, 3, 4\}$ tal que $\mathbf{P}(X = x) = p_x$, $x \in \{2, 3, 4\}$, de media 3.

(a) Hallar p_2, p_3, p_4 para que $\mathbf{var}[X]$ sea la máxima posible.

(b) Hallar p_2, p_3, p_4 para que $\mathbf{var}[X]$ sea la mínima posible.

3.15. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(8, 10)$.

(a) Calcular la media y la varianza de $Y = 2(X - 1)$.

(b) Calcular la media de $Y = 2X^2 + 1$.

(c) Calcular la media de $Y = 2(X - 1)(X - 3)$.

(d) Ⓟ Hallar $\text{mín}_{c \in \mathbb{R}} \mathbf{E}[(X - c)^2]$.

(e) Ⓟ Hallar a y b tales que $aX + b$ tenga media 0 y desvío 1.

3.16. La potencia W disipada por una resistencia es proporcional al cuadrado del voltaje V (*i.e.*, $W = rV^2$, donde r es una constante). Calcular $\mathbf{E}[W]$ cuando $r = 3$ y el voltaje tiene distribución normal de media 6 y varianza 1.

3.17. Sean X_1 y X_2 variables de Bernoulli, de parámetros p_1 y p_2.

(a) Mostrar que si $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0$, entonces X_1 y X_2 son independientes.

(b) Si $p_1 = p_2 = 0.7$ y $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0.1$, hallar $\rho(Y_1, Y_2)$, siendo $Y_1 = X_1(1 - X_2)$, $Y_2 = X_2(1 - X_1)$.

3.18. Se colocan 3 bolas en 3 urnas c_1, c_2, c_3 eligiendo al azar, para cada bola, la urna en que se coloca. Sea X_i la cantidad de bolas en c_i y sea N la cantidad de urnas que contienen alguna bola.

(a) Calcular $\mathbf{E}[N]$, $\mathbf{var}[N]$ y $\mathbf{cov}(N, X_1)$.

(b) Mostrar que N y X_1 no son independientes.

(c) Calcular $\mathbf{cov}(X_i, X_j)$, $1 \leq i \leq j \leq 3$.

: Notar que (X_1, X_2, X_3) es una variable multinomial. Buscarla en tabla de distribuciones.

3.19. △

3.20. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el triángulo de vértices $(0, 0), (2, 2), (0, 2)$.

(a) Calcular $\mathbf{cov}(X, Y)$.

(b) Calcular $\mathbf{var}[X + Y]$

(c) Calcular $\mathbf{cov}(3X - Y + 2, X + Y)$.

3.21. △

3.22. Ⓟ [*Ver variable normal bivariada y recta de regresión en bibliografía*] Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{5}{8\pi} e^{-\frac{25}{32}\left(x^2 - \frac{6}{5}xy + y^2\right)}.$$

Hallar la ecuación de la recta de regresión de Y dada X.

---

4. Guía 4

4.1. Sea X una variable aleatoria discreta a valores $\left\{\frac{k}{8} : k = 0, 1, \ldots, 8\right\}$ con función de probabilidad $p_X(x) = \frac{2}{9}x$. Hallar y graficar:

(a) la función de probabilidad de $Y = 2X - 1$,

(b) la función de probabilidad de $Y = 128X^2$,

(c) la función de probabilidad de $Y = -64X^2 + 64X + 2$,

(d) la función de probabilidad de $Y = 64X^2 - 96X + 128$.

4.2. [*ver* 2.5] Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de media 2. Hallar la función de probabilidad de $Y = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi X\right)\right|$.

4.3. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad

$$f_X(x) = \frac{x}{2}\mathbf{1}\{0 < x < 2\}.$$

Hallar y graficar:

(a) la densidad de $Y = aX + b$ ($a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$),

(b) la densidad de $Y = -X^3$,

(c) la densidad de $Y = X + X^{-1}$,

(d) la densidad de $Y = X^2 - 3X$.

4.4. La fase ϕ de un generador eléctrico es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$.

(a) Hallar la función de densidad del factor de potencia del generador $C = \cos\phi$ (recordar que $\arccos(x)' = -1/\sqrt{1 - x^2}$).

(b) Calcular $\mathbf{P}(|C| < 0.5)$.

4.5. Todas las mañanas Lucas llega a la estación del subte entre las 7:05 y las 7:50, con distribución uniforme en dicho intervalo. El subte llega a la estación cada quince minutos comenzando a las 6:00. Hallar la función densidad del tiempo que tiene que esperar Lucas hasta subirse al subte.

4.6. Un voltaje aleatorio V_1 –medido en voltios– con distribución uniforme sobre el intervalo $[180, 220]$ pasa por un limitador no lineal de la forma

$$g(v_1) = \frac{v_1 - 190}{20}\mathbf{1}\{190 \leq v_1 \leq 210\} + \mathbf{1}\{210 < v_1\}.$$

Hallar la función de distribución del voltaje de salida $V_2 = g(V_1)$.

4.7. La duración de una llamada telefónica es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 8 minutos. Si se factura un pulso cada dos minutos o fracción, hallar la función de probabilidad de la cantidad de pulsos facturados por la llamada.

4.8. $\triangle$

4.9. $\triangle$

4.10. $\triangle$

4.11. $\triangle$

4.12. $\triangle$

4.13. $\triangle$

4.14. Ⓟ [*Se sugiere leer la resolución de Grynberg, Transformaciones de variables aleatorias, teorema 3.1*] Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribuciones exponenciales de intensidades λ_1 y λ_2, respectivamente. Sean $U = \text{mín}(X_1, X_2)$, $V = \text{máx}(X_1, X_2)$, $W = V - U$ y $J = \mathbf{1}\{U = X_1\} + 2\,\mathbf{1}\{U = X_2\}$,

(a) Hallar la densidad de U.

(b) Hallar la función de probabilidad de J.

(c) Hallar la densidad de W.

(d) Mostrar que U y J son independientes.

(e) Mostrar que U y W son independientes.

4.15. $\triangle$

4.16. $\triangle$

4.17. $\triangle$

4.18. Sean X, Y dos variables aleatorias independientes uniformes sobre los conjuntos $\{1, 2, \dots, 35, 36\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, respectivamente. Hallar la función de probabilidad de $X + Y$.

4.19. STOP La cantidad L de langostas que arriban a la mesa de un asado tiene una distribución Poisson de media 2 y la cantidad M de moscas tiene una distribución Poisson de media 8. L y M son independientes.

(a) Hallar la función de probabilidad de $L + M$.

(b) Hallar la función de probabilidad de $M|(L + M = 10)$.

(c) Calcular $\mathbf{P}(M > 2|L + M = 10)$.

4.20. Los lados de un rectángulo son variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 1)$.

(a) Hallar la función densidad del área del rectángulo.

(b) Calcular la probabilidad de que el área del rectángulo sea mayor que $1/4$.

4.21. Ⓟ Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución uniforme sobre el intervalo $(5, 10)$.

(a) $\triangle$

(b) Sea $V = \mathbf{1}\{X + Y \leq 10\}$. Hallar la función de probabilidad de V.

(c) Hallar la función de densidad de X_1+Y_1 para $(X_1, Y_1) = (X, Y)|X-Y < 0$.

(d) Hallar la función densidad de $W = (X-6)^2+(Y-7)^2$ dado que $W < 9/16$.

---

5. Guía 5

5.1. En una urna hay 4 bolas verdes, 3 amarillas y 3 rojas. Se extraen tres. Sean X la cantidad de bolas verdes extraídas e Y la cantidad de rojas. Hallar las funciones de probabilidad de las variables condicionales $Y|X = x$.

5.2. Sea (X, Y) un vector aleatorio continuo. Hallar la densidad condicional de $Y|X = x$ y la densidad marginal de X cuando

(a) (X, Y) tiene distribución uniforme sobre el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1.

(b) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2x+1} e^{-\left(2x + \frac{y}{4x+2}\right)} \mathbf{1}\{x > 0, y > 0\}$.

(c) $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x} \mathbf{1}\{0 < y < x\}$.

(d) $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{6} x^4 y^3 e^{-xy} \mathbf{1}\{1 < x < 2, y > 0\}$.

5.3. Al comenzar el día un tanque contiene una cantidad aleatoria Y de miles de litros de leche. Durante el día se vende una cantidad aleatoria X de la leche contenida en el tanque en forma tal que la de densidad conjunta es $f_{X,Y}(x, y) = 0.5\, \mathbf{1}\{0 < x < y < 2\}$.

(a) Hallar $f_{Y|X=1.5}(y)$ y $f_{X|Y=0.8}(x)$.

(b) Calcular $\mathbf{P}(1.75 < Y < 2|X = 1.5)$ y $\mathbf{P}(0.5 < X < 0.75|Y = 0.8)$.

(c) X e Y, ¿son independientes?

5.4. Ⓟ Sea (X, Y) un vector aleatorio con la densidad conjunta del ejercicio 3.22.

(a) Hallar $f_Y(y)$ y $f_{Y|X=x}(y)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Qué se puede decir respecto a la independencia de X e Y?

(b) Calcular $\mathbf{P}(1 < XY < 5|X = \sqrt{5})$.

5.5. Sean X e Y dos variables aleatorias tales que X tiene distribución uniforme sobre el intervalo $(3, 4)$ y para cada $x \in (3, 4)$, $Y|X = x$ tiene distribución normal de media x y varianza 1. Calcular $f_Y(5)$ y $\mathbf{P}(X > 3.5|Y = 5)$.

5.6. $\triangle$

5.7. Un viajante tiene tres alternativas de viaje a su trabajo: A, B y C. Se sabe que la proporción de veces que usa estos medios es respectivamente: 0.5, 0.3 y 0.2. El tiempo (en horas) de viaje con el transporte i es una variable aleatoria T_i con densidad: $f_{T_A}(t) = 2t\, \mathbf{1}\{0 \leq t \leq 1\}$ para el medio A, $f_{T_B}(t) = 0.5t\, \mathbf{1}\{0 \leq t \leq 2\}$ para el medio B, y $f_{T_C}(t) = 0.125t\, \mathbf{1}\{0 \leq t \leq 4\}$ para el medio C.

(a) Si ha transcurrido media hora de viaje y aun no ha llegado al trabajo, calcular la probabilidad de que llegue por el medio de transporte A.

(b) Si tardó exactamente media hora en llegar al trabajo, calcular la probabilidad de que lo haya hecho por el medio de transporte A.

5.8. △

5.9. 🛑 Un receptor recibe una señal de amplitud aleatoria $X = S + N$, donde S es una señal equiprobable sobre el *alfabeto* $\{0.1, 0.2, 0.3\}$ y N es un ruido con distribución normal estándar independiente de S. Si se recibe una señal de amplitud 0.87 ¿cuál es la probabilidad de que contenga la *letra* 0.2?

5.10. Ⓟ La corporación *Cobani Products* produjo 6 RoboCops, cada uno de los cuales está fallado con probabilidad 1/4. Cada RoboCop es sometido a una prueba tal que si el Robocop está fallado se detecta la falla con probabilidad 4/5. Sea X la cantidad de RoboCops fallados y sea Y la cantidad detectada de RoboCops fallados.

(a) Hallar una expresión de la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$.

(b) ☣ Hallar una expresión de la función de regresión $\varphi(y) = \mathbf{E}[X|Y = y]$.

5.11. △

5.12. △

5.13. Ⓟ☣ Una rata está atrapada en un laberinto. Inicialmente puede elegir una de tres sendas. Si elige la primera se perderá en el laberinto y luego de 12 minutos volverá a su posición inicial; si elige la segunda volverá a su posición inicial luego de 14 minutos; si elige la tercera saldrá del laberinto luego de 9 minutos. En cada intento, la rata elige con igual probabilidad cualquiera de las tres sendas. Calcular la esperanza del tiempo que demora en salir del laberinto.

5.14. △

5.15. △

5.16. △

5.17. En el contexto del ejercicio 5.1, hallar y graficar la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$ y la función varianza de regresión $\psi(x) = \mathbf{var}[Y|X = x]$.

5.18. 🛑 Sea (X, Y) el vector aleatorio considerado en el inciso (a) del ejercicio 5.2.

(a) Hallar la distribución de las variables condicionales $Y|X = x$.

(b) Hallar y graficar la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}[Y|X = x]$.

(c) Hallar y graficar la "varianza de regresión" $\psi(x) = \mathbf{var}(Y|X = x)$.
Repetir para los otros incisos del ejercicio 5.2.

5.19. Ⓟ [*Ver variable aleatoria normal bivariada en la bibliografía y en la tabla de distribuciones*] Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{13}{48\pi} \exp\left(-\frac{169}{288}\left(\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{5(x-1)y}{13} + y^2\right)\right).$$

(a) Hallar $\mathbf{E}[Y|X = x]$.

(b) Hallar la ecuación de la recta de regresión de Y dada X.

---

6. Guía 6

6.1. Una empresa produce discos que son defectuosos con probabilidad 0.01 y los vende en paquetes de 10. Ofrece una garantía de que como máximo 1 de los 10 discos del paquete es defectuoso, en caso contrario devolverá el dinero de la compra. ¿Qué proporción de los paquetes no satisface la garantía? Si Lucas compra tres paquetes, ¿cuál es la probabilidad de que le devuelvan el dinero de la compra de exactamente uno de ellos?

6.2. $\triangle$

6.3. Se arroja una moneda equilibrada 18 veces.

(a) Calcular la probabilidad de obtener exactamente 13 caras.

(b) Hallar el número más probable de caras y calcular la probabilidad de que se obtenga ese número.

6.4. La probabilidad de que un pasajero que reserva un asiento no se presente al vuelo es 0.04, de manera independiente unos de otros. En consecuencia, la política de una empresa es vender 100 reservas en un avión que tiene solo 98 asientos. Calcular la probabilidad de que todas las personas que se presentan para un vuelo en particular encuentren asientos disponibles.
: Va a requerir algún software de cálculo

6.5. $\triangle$

6.6. Se lanza un dado equilibrado sucesivas veces.

(a) Calcular la probabilidad de que el primer 2 ocurra después del tercer lanzamiento.

(b) Calcular la probabilidad de que el primer 2 ocurra después del sexto lanzamiento, dado que no ocurrió en los primeros 3 lanzamientos.

6.7. ¿Cuán larga debe ser una sucesión de dígitos decimales equiprobables para que la probabilidad de que aparezca el dígito 6 sea por lo menos 0.99?

6.8. $\triangle$

6.9. $\triangle$

6.10. $\triangle$

6.11. $\triangle$

6.12. Un estacionamiento, al abrir, tiene capacidad para tres coches. Cada minuto pasa un coche por allí y la probabilidad de que quiera estacionarse es 0.8. Calcular la probabilidad de que se llene en exactamente 10 minutos.

6.13. $\triangle$

6.14. En una fábrica hay cuatro máquinas A, B, C y D que producen el 40 %, 30 %, 20 % y 10 % de la producción total, respectivamente.

(a) Se eligen al azar 14 artículos de la producción. Calcular la probabilidad de que exactamente 5 provengan de la máquina A, 4 de la máquina B, 3 de la máquina C y 2 de la máquina D.

(b) Si se sabe que en 14 artículos tomados al azar de la producción, exactamente 5 provienen de la máquina A, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente tres provenientes de la máquina C?

: ver variable multinomial en tabla de distribuiciones.

6.15. Un proceso de producción produce piezas con dos tipos de defectos independientes: por rotura con probabilidad 0.1 y por abolladura con probabilidad 0.2. Calcular la probabilidad de que al elegir 8 piezas,

(a) 1 tenga ambos defectos, 2 estén abolladas solamente, 3 estén rotas solamente, y el resto sean buenas.

(b) a lo sumo 1 tenga ambos defectos.

(c) menos de 5 tengan algún defecto.

(d) por lo menos 3 no tengan defectos.

: de nuevo, ver variable multinomial en tabla de distribuiciones.

6.16. $\triangle$

6.17. Se arroja un dado piramidal 144 veces. El dado tiene las caras numeradas $1, 2, 3, 4$ y están cargadas con probabilidades $0.4, 0.3, 0.2, 0.1$, respectivamente. Sean X_1, X_2, X_3, X_4 la cantidad de lanzamientos en los que el dado cae en la cara $1, 2, 3, 4$, respectivamente. Hallar la matriz de covarianzas $(\mathbf{cov}(X_i, X_j))$.
: insisto por última vez, ver variable multinomial en tabla de distribuiciones.

---

7. Guía 7

7.1. Sea $\{N(t),\, t \geq 0\}$ el proceso de conteo asociado a un proceso de Poisson de intensidad 2, sean $N(a,b) = N(b) - N(a)$ el incremento del proceso en el intervalo $(a,b]$, y sea S_3 el tiempo de espera hasta que ocurre el tercer evento del proceso. Calcular:

(a) $\mathbf{P}(N(1) = 0)$.

(b) $\mathbf{P}(N(1,2) = 1)$.

(c) $\mathbf{P}(N(1) = 0, N(1,2) = 1, N(2,4) = 2)$.

(d) $\mathbf{cov}\,(N(1,3), N(2,4)\,)$.

(e) $\mathbf{P}(S_3 > 1/2)$.

(f) $\triangle$

(g) $\mathbf{P}(S_3 > 1/2 | N(1/4) = 1)$.

7.2. En la Ciudad de Buenos Aires ocurren accidentes de tránsito de acuerdo con un proceso de Poisson con intensidad 2 por hora.

(a) Calcular la probabilidad de que el tercer accidente después de las 0:00 ocurra después de las 0:30.

(b) Calcular la probabilidad de que entre la una y las dos de la mañana ocurra exactamente un accidente.

7.3. Un radioisótopo emite partículas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 10 por hora. Las partículas emitidas se registran con un contador. Cuando el contador registra una partícula tarda dos minutos en reacondicionarse y no registra ninguna partícula emitida durante ese intervalo de tiempo. Calcular la probabilidad de que las primeras 5 partículas emitidas sean registradas por el contador.

7.4. $\triangle$

7.5. $\triangle$

7.6. El peso de ciertas bolsas de naranjas es una variable aleatoria exponencial de media 3 kilos. Se van agregando bolsas en una balanza hasta que el peso supera 5 kilos. Calcular la probabilidad de que el peso final en la balanza supere los 7 kilos.

7.7. Llamadas arriban a una central telefónica de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. Sabiendo que entre las 9:00 y las 10:00 arribaron exactamente 3 llamadas, calcular la probabilidad de que:

(a) la primera llamada después de las 9:00 haya arribado antes de las 9:15.

(b) la segunda llamada después de las 9:00 haya arribado antes de las 9:30.

7.8. △

7.9. Un radioisótopo emite partículas de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 6 por hora. Sabiendo que entre las 0:00 y las 0:30 el radioisótopo emitió exactamente 3 partículas calcular la probabilidad de que la primera partícula emitida después de las 0:00 se haya emitido después de las 0:10 y la cuarta se haya emitido después de las 0:40.

7.10. Una máquina produce rollos de alambre. El alambre tiene fallas distribuidas como un proceso de Poisson de intensidad 1 cada 20 metros. La máquina detecta cada falla con probabilidad 0.75 y corta el alambre en la primer falla detectada.

(a) Hallar la media y la varianza de la longitud de los rollos de alambre.

(b) Hallar la cantidad media de fallas en los rollos.

7.11. △

7.12. Lucas emite señales de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 3 por minuto, mientras que Monk las emite de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 5 por minuto. Los dos procesos de Poisson son independientes.

(a) Hallar la probabilidad de que la primera señal emitida después de las 0:00 haya sido emitida después de las 0:10.

(b) Hallar la probabilidad de que la primera señal emitida haya sido emitida por Lucas.

(c) Hallar la probabilidad de que la primera señal emitida después de las 0:00 haya sido emitida después de las 0:10 y que haya sido emitida por Lucas.

7.13.

(a) Sean Π_1 y Π_2 dos procesos de Poisson independientes de intensidad 2. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros eventos provengan del proceso Π_1?

(b) Sean T_1, T_2, T_3 variables aleatorias independientes exponenciales de media $1/2$. Calcular la probabilidad de que T_1 supere a $T_2 + T_3$ (*sugerencia: no es necesario hacer ninguna cuenta si ya realizó el inciso anterior*).

7.14. $\triangle$

7.15. Ⓟ [*Buscar proceso de Poisson compuesto en bibliografía*] Clientes arriban a un servidor de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 4 por hora. El tiempo de trabajo consumido en cada servicio tiene distribución normal de media 5 minutos y desvío estándar $1/2$. Calcular la media y la varianza del tiempo de trabajo consumido por el servidor entre las 11:00 y las 12:00.

7.16. Ⓟ [*Buscar proceso de Poisson compuesto en bibliografía*] Familias de africanos migran a la Unión Europea de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa 3.000 por semana. Si el número de integrantes de cada familia es independiente y puede ser $5, 4, 3$ con probabilidades respectivas 0.1, 0.4, 0.5, calcular la media y la varianza de la cantidad de africanos que migran a la Unión Europea durante un período de 4 semanas.

7.17. Vehículos arriban a un puesto de peaje de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad 10 por minuto de acuerdo con los siguientes porcentajes: 70 % de autos, 10 % de motos, y 20 % de camiones. Los autos transportan en promedio una carga de 400 kg., las motos de 120 kg., y los camiones de 1300 kg.

(a) Hallar la probabilidad de que en media hora crucen por el peaje a lo sumo 2 autos.

(b) Hallar la probabilidad de que en 1 minuto pasen 7 autos, 1 moto y 2 camiones.

(c) Hallar la carga media que transporta un vehículo que pasa por el peaje.

(d) Hallar la carga media total que atraviesa el peaje durante 1 hora.

8. Guía 8

8.1. Para modelar el precio del kilo de asado se propone una variable aleatoria con distribución normal de media 3 dólares y varianza 4. A la luz de que los precios suelen ser positivos: ¿qué puede decirse de semejante modelo?; ¿y si la media fuese 8 dólares?; ¿y si la media fuese 14 dólares?

8.2. Un receptor recibe una señal de amplitud aleatoria $X = S + N$, donde S es una variable Bernoulli de parámetro 3/4 y N es un ruido con distribución normal de media 0 y desvío estándar 1/2 independiente de S. Cuando S vale 1 la señal contiene información útil y cuando vale 0 no. El detector deja pasar la señal si $X > c$ y no la deja pasar si $X \leq c$. Se incurre en error cuando no se deja pasar una señal con información útil o cuando se deja pasar una señal sin información. Determinar el valor de c que garantice la probabilidad mínima de error.

8.3. La duración de cierto tipo de lámparas tiene distribución normal de media 100 horas. Si un comprador exige que por lo menos el 90 % de ellas tenga una duración superior a las 80 horas, ¿cuál es el valor máximo que puede tomar la varianza manteniendo siempre satisfecho al cliente?

8.4. En un establecimiento agropecuario, el 10 % de los novillos que salen a venta pesan más de 500 kg. y el 7 % pesa menos de 410 kg. Si la distribución es normal, hallar

(a) a y b tales que $\mathbf{P}(a < X < b) = 0.95$.

(b) la probabilidad de que en un potrero de 25 novillos haya alguno con un peso inferior a 400 kg.

8.5. Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes con distribución normal de medias 1,2 y 3, respectivamente, y varianzas 1/9, 1/3 y 1/2, respectivamente. Calcular $\mathbf{P}\left(X_1 - \frac{1}{2}X_2 > 2 - \frac{1}{3}X_3\right)$.

8.6. $\triangle$

8.7. Los pesos de ciertos paquetes de café son variables aleatorias independientes con distribución normal de media 500 gr. y desvío estándar σ. ¿Cómo deben ser los valores de σ para tener una seguridad del 99 % de que el peso promedio de 12 paquetes no se desviará en más de 10 gr. de 500 gr.?

8.8. Ⓟ Sea S_n una variable aleatoria con distribución Binomial(n, p). Calcular $\mathbf{P}(S_n = k)$, $k = 1, 2, \ldots, 25$ con la fórmula exacta y con las siguientes aproximaciones:

1. *Aproximación por la densidad normal:*

$$\mathbf{P}(S_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\,\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

2. *Corrección por continuidad:*

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \mathbf{P}\left(k - \frac{1}{2} < S_n < k + \frac{1}{2}\right) \approx \Phi\left(\frac{k-np+1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-np-1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

en los siguientes casos $n = 5, 8, 10, 15, 20, 25, 50, 100, 200$ y $p = (0.05)m$, $m = 1, 2, \ldots, 10$. Comparar (por gráficos) cuán buenas son las aproximaciones y cuán necesaria es la corrección por continuidad de acuerdo con los valores de n y p.

8.9. $\triangle$

8.10. Usar la *corrección por continuidad* del ejeciccio 8.8 para calcular aproximadamente la probabilidad de que entre los primeros 10.000 dígitos decimales de un número escogido al azar del intervalo $(0, 1)$ el 7 aparezca no más que 968 veces. Compare con el resultado exacto usando software.

8.11. Ciertas partículas llegan a un contador según un proceso de Poisson de intensidad 3000 por hora. Sabiendo que entre las 9:00 y las 9:30 llegaron 1500 partículas, estimar la probabilidad de que más de 450 hayan llegado entre las 9:00 y las 9:10.

8.12. Una excursión dispone de 100 plazas. La experiencia indica que cada reserva tiene una probabilidad 0.1 de ser cancelada a último momento. No hay lista de espera. Se supone que los pasajeros hacen sus reservas individualmente, en forma independiente. Se desea que la probabilidad de que queden clientes indignados por haber hecho su reserva y no poder viajar sea ≤ 0.01. Calcular el número máximo de reservas que se pueden aceptar.

8.13. Se quiere saber la proporción de fumadores en una población. Para ello se eligen n individuos al azar y se halla la proporción de los que fuman. ¿Qué valor debe tener n para que esta proporción no difiera de la real en más de 0.01, con probabilidad mayor o igual que 0.95?

8.14. Ⓟ Usando el Teorema Central del Límite demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

(*sugerencia:* considere una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Poisson de media 1.)

8.15. La longitud de ciertas varillas es una variable aleatoria de media 30 cm. y desvío estándar 2. El precio de venta en $ de cada varilla es igual a su longitud medida en cm. El costo de producción de cada varilla es constante e igual a $20. Calcular aproximadamente la probabilidad de que la ganancia total por vender 50 varillas sea mayor que $460.

8.16. La duración (en minutos) de cada llamada telefónica efectuada por Alucard es una variable aleatoria de media μ y desvío estándar 0.2. Le facturan $2 por minuto. ¿Cómo debe ser μ para que el costo de 100 llamadas de Alucard sea inferior a los $190 con probabilidad mayor o igual que 0.99?

8.17. $\triangle$

8.18. El peso W (en toneladas) que puede resistir un puente sin sufrir daños estructurales es una variable aleatoria con distribución normal de media 1.400 y desvío 100. El peso (en toneladas) de cada camión de arena es una variable aleatoria de media 20 y desvío 0.25. ¿Cuántos camiones de arena debe haber, como mínimo, sobre el tablero del puente para que la probabilidad de que ocurran daños estructurales supere 0.1?

8.19. En un sistema electrónico se producen fallas de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa 2.5 por mes. Por motivos de seguridad se ha decidido cambiarlo cuando ocurran 196 fallas. Calcular (aproximadamente) la probabilidad de que el sistema sea cambiado antes de los 67.2 meses.

8.20. $\triangle$

8.21. $\triangle$

8.22. Lucas y Monk palean arena cargando un volquete. La probabilidad de que una palada sea de Monk es 0.7 y la probabilidad de que sea de Lucas es 0.3. El volumen en decímetros cúbicos de la palada de Lucas es una variable aleatoria uniforme entre 2 y 4, y el de la palada de Monk es una variable aleatoria uniforme entre 1 y 3. ¿Cuántas paladas son necesarias para que la probabilidad de que el volquete tenga más de 4 metros cúbicos de arena supere 0.95?

Referencias

[1] Grynberg, S. *Borradores, Curso 23.* Buenos Aires: [digital], marzo a junio de 2013.

[2] Maronna, R. *Probabilidad y Estadística Elementales para Estudiantes de Ciencia.* 1ra ed. La Plata: [digital], 1995.

[3] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I.* 2da ed. New York: John Wiley & Sons, 1957.

[4] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II.* 2da ed. New York: John Wiley & Sons, 1971.

[5] Grimmet, G., Stirzaker, D. *Probability and Random Processes.* 3ra. ed. Gran Bretaña: Oxford University Press, 2001.

[6] DeGroot, M. H. *Probability and Statistics.* 2nd. ed. EE.UU.: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.