



# Problema de la mochila

Modelos y Optimización I

Redactado por Tomás Bruno

Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires

Versión 1.0 - Octubre 2013

# Índice

<b>1. Formulación Lineal</b>	<b>3</b>
<b>2. Aproximaciones</b>	<b>4</b>
2.1. Aproximación a través de coeficiente de rendimiento. . . . .	4
2.2. Evaluación de la heurística . . . . .	4
2.3. Mejoramiento a través de la comparación con el elemento crítico.	6
<b>3. Análisis de cotas.</b>	<b>8</b>
3.1. Relajación lineal. . . . .	8
3.2. Dantzig. . . . .	8
3.3. Martello & Toth . . . . .	9
<b>4. Variantes</b>	<b>12</b>
<b>5. Aplicaciones</b>	<b>14</b>
5.1. Merkle-Hellman: . . . . .	14
5.2. Otras aplicaciones . . . . .	14

## Introducción

El problema de la mochila es un problema *simple* de entender: hay una persona que tiene una mochila con una cierta capacidad y tiene que elegir que elementos pondrá en ella. Cada uno de los elementos tiene un peso y aporta un beneficio. El objetivo de la persona es elegir los elementos que le permitan maximizar el beneficio sin excederse de la capacidad permitida.

A la vez es un problema *complejo*, si por complejidad nos referimos a la computacional. “Un problema se cataloga como *inherentemente difícil* si su solución requiere de una cantidad significativa de recursos computacionales, sin importar el algoritmo utilizado.” [5] El problema de la mochila forma parte de una lista histórica de problemas *NP – Completos* elaborada por Richard Karp en 1972[4].

En el caso del problema de la mochila, si contáramos con 4 productos, para saber cual es la mejor solución podríamos probar las  $2^4 = 16$  posibilidades. El 2 se desprende del hecho de que cada decisión es incluir o no al producto y el 4 de la cantidad de productos. 16 posibilidades es un número manejable, sin embargo, si la cantidad de elementos por ejemplo ascendiera a 20, tendríamos que analizar nada más y nada menos que  $2^{20} = 1,048,576$  posibilidades

El siguiente apunte tiene como objetivo proveer una introducción al problema de la mochila. En la primera sección se analizará como obtener una solución óptima para el problema utilizando la técnica programación lineal. Luego, en la segunda sección, se analizarán alternativas que permiten obtener soluciones aproximadas a través del uso de heurísticas. Para medir el desempeño de las heurísticas, se tiende a utilizar cotas. Algunas de estas cotas serán analizadas en la tercera sección. En la cuarta sección se describen algunas de las variantes al problema de la mochila estándar. Por último, en la quinta sección se presentarán aplicaciones del problema de la mochila.

# 1. Formulación Lineal

Una de las técnicas matemáticas que se puede utilizar para la resolución de este problema es la programación lineal. Definiendo a

- $c$  como la capacidad de la mochila
- $p_i$  como el beneficio unitario obtenido por ingresar el producto  $i$  en la mochila
- $w_i$  como el peso del producto  $i$
- $n$  como la cantidad de productos
- $c$ ,  $p_i$  y  $w_i$  como valores enteros y positivos

se puede plantear el modelo como:

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq c \quad (\text{Capacidad})$$

$$\max \rightarrow z = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (\text{Funcional})$$

No obstante, el problema que tiene esta técnica es que no siempre se puede resolver debido a su complejidad matemática. En esas ocasiones, es necesario recurrir a heurísticas. Una heurística es un procedimiento que en la mayoría de las ocasiones nos permite obtener una *buena* solución pero que no necesariamente es la óptima.

## 2. Aproximaciones

### 2.1. Aproximación a través de coeficiente de rendimiento.

Una solución intuitiva pero que puede no ser óptima podría elaborarse ordenando los productos en forma descendente según la proporción

$$r_i = \frac{p_i}{w_i}$$

y metiendo elementos de esta lista ordenada hasta que no se pueda ingresar el siguiente elemento a la mochila. Desde este punto en adelante, siempre se asumirá que los elementos del conjunto se encuentran ordenados según esta proporción.

**Ejemplo 1.** Considerando la siguiente instancia del problema de la mochila con capacidad  $c = 65$

$N$	$p$	$w$	$r$
A	100	20	5
B	80	20	4
C	30	30	1
D	15	20	0.75
E	10	100	0.1

Aplicando la heurística mencionada, elegiríamos los productos  $A$  y  $B$  ya que al tratar de ingresar el producto  $C$  estaríamos excediendo la capacidad permitida. El resultado obtenido entonces sería

$$Z' = 100 + 80 = 180$$

Es importante notar que los elementos en la tabla están ordenados según la proporción  $r_i$ . Si no estuvieran ordenados, el primer paso consistiría en ordenarlos.

### 2.2. Evaluación de la heurística

Pese a que la heurística propuesta en el punto anterior tiende a funcionar adecuadamente en la mayoría de los casos, existen casos patológicos que pueden tener como consecuencia un rendimiento desastroso.

Definiendo a

- $z$  como el valor de la solución óptima
- $z'$  como el valor de la solución obtenido aplicando la heurística definida en la sección 2.1
- $\frac{z'}{z}$  como índice de performance de la heurística. Se puede observar que si la heurística obtuviera la solución óptima, el rendimiento para esa instancia sería 1.

se puede observar que pueden existir casos en el cual el índice de performance de la heurística sea tan cercano a 0 como se quiera.

**Demostración.** Considerando la siguiente instancia del problema de la mochila con capacidad  $c = k$  (con  $k > 1$ )

$N$	$p$	$w$	$r$
A	$1+\delta$	1	$1+\delta$
B	$k$	$k$	1

Aplicando el algoritmo de la sección 2.1, elegiríamos al producto  $A$  y en consecuencia nuestro funcional sería igual a  $1$ . En cambio, el valor de la solución óptima sería  $k$ .

En este caso, el índice de performance de la heurística en consecuencia sería:

$$cal = \frac{1 + \delta}{k}$$

Para valores elevados de  $k$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} cal = \frac{1 + \delta}{k} = 0$$

**Ejemplo 2.** Considerando la siguiente instancia del problema de la mochila con capacidad  $c = 100$ ,

$N$	$p$	$w$	$r$
A	2	1	2
B	100	100	1

Se puede observar que la solución óptima estaría dada por la selección del elemento  $B$ , en consecuencia  $z = 100$ . En cambio, utilizando la heurística descrita, el valor obtenido es  $z' = 2$ . El índice de performance de la heurística en este caso particular resulta:

$$cal = \frac{2}{100}$$

### 2.3. Mejoramiento a través de la comparación con el elemento crítico.

Se puede realizar una pequeña modificación al algoritmo para asegurar que el índice de calidad de la heurística en ningún caso sea tan pequeño.

En primer lugar es necesario definir al elemento crítico  $s$ . El elemento crítico es el primer elemento que, en caso de incluirlo, se excede la capacidad permitida. La heurística se puede mejorar agregando un paso posterior que consiste en comparar al resultado obtenido con el beneficio del elemento crítico,  $p_s$ . Es decir, en definitiva, el resultado obtenido sería:

$$z'' = \max\left(\sum_{i=1}^{s-1} p_i; p_s\right)$$

Esto permitiría que por ejemplo en el caso descrito en el ejemplo 2, el valor obtenido aplicando esta heurística mejorado sea de  $k$  y en consecuencia, iguale la solución óptima.

**Peor índice de performance de la heurística mejorada** Considerando la siguiente instancia del problema de la mochila con capacidad  $c = 2k$  (con  $k > 1$ )

$N$	$p$	$w$	$r$
A	$1+\delta$	1	$1+\delta$
B	$k$	$k$	1
C	$k$	$k$	1

Aplicando el algoritmo mejorado, elegiríamos a los productos  $A$  y  $B$  obteniendo un valor de funcional  $z'' = 1 + \delta + k$  en comparación a  $z = 2k$

En consecuencia el peor índice de performance sería igual a:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z''}{z} = \frac{1}{2}$$

**Ejemplo 3.** Considerando la siguiente instancia del problema de la mochila con capacidad  $c = 200$ ,

$N$	$p$	$w$	$r$
A	2	1	2
B	100	100	1
C	100	100	1

Se puede observar que la solución óptima estaría dada por la selección de los elementos  $B$  y  $C$ , en consecuencia  $z = 200$ . En cambio, utilizando la heurística descrita, el valor obtenido es  $z' = 102$ . El índice de performance de la heurística en este caso particular resulta:

$$cal = \frac{102}{200}$$

### 3. Análisis de cotas.

En la sección 1 se estableció que no siempre es posible calcular la solución óptima de una instancia del problema de la mochila debido a la complejidad computacional. En consecuencia, en la sección 2 se buscó una alternativa a través del planteo de heurísticas. No obstante, todavía no se estableció como determinar si una heurística es buena o no.

Para determinar el desempeño de una heurística en una instancia en particular, resulta útil poder acotar el problema. Si se supiera cual es el máximo valor que podría valer la solución óptima, se contaría con más información para saber si es buena la solución que se obtuvo con la heurística.

A continuación se analizará una serie de cotas superiores desarrolladas para el problema de la mochila. Se debe tener en cuenta que siempre la solución óptima,  $z$ , es menor o igual que una cota superior,  $U$ . Una cota es superior a otra si se encuentra más cerca de la solución óptima.

#### 3.1. Relajación lineal.

Una primera cota que se puede obtener es realizando una corrida definiendo como variables continuas a las variables de decisión,  $x_i$ . Definiendo a  $\bar{c}$  como la capacidad restante luego de ingresar los elementos que se encuentran en el intervalo  $[0;s-1]$  a la mochila, es decir

$$\bar{c} = c - \sum_{i=1}^{s-1} w_i$$

El resultado que se obtendría en la corrida utilizando variables continuas sería:

$$U_0 = CP(KP) = \sum_{i=1}^{s-1} p_i + \bar{c} \frac{p_s}{w_s}$$

El primer término corresponde a la selección de todos los términos con mejor rendimiento que el elemento crítico  $s$ . El segundo término representa la aplicación del rendimiento del elemento crítico a la capacidad restante. Es decir, como no se puede ingresar todo el elemento crítico plantea la idea de fraccionarlo e ingresar todo lo que pueda del producto.

#### 3.2. Dantzig.

A la solución óptima considerando a las variables de decisión como continuas, Dantzig aplico una condición de integralidad. Denominando al operador

$\lfloor a \rfloor$  como el operador *piso*, es decir, que devuelve el mayor entero no es superior que  $a$ , obtenemos

$$U_1 = \lfloor CP(KP) \rfloor = \left\lfloor \sum_{i=1}^{s-1} p_i \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\bar{c} p_s}{w_s} \right\rfloor$$

Considerando la integralidad de  $p_i$  y de  $x_i$ , se obtiene la cota de Dantzig:

$$U_1 = \sum_{i=1}^{s-1} p_i + \left\lfloor \frac{\bar{c} p_s}{w_s} \right\rfloor$$

### 3.3. Martello & Toth

Martello & Toth superaron la cota de Dantzig estableciendo la integridad del elemento crítico. Es decir, pidiendo que el elemento crítico sea ingresado o no, pero dejando de aplicar la capacidad remanente al rendimiento asociado al elemento crítico.

La primera parte del análisis consiste en ver cuál es el mayor resultado posible considerando que no se ingresa el elemento crítico en la mochila. Al no ingresarlo, existe la posibilidad de que se pueda ingresar un elemento posterior; uno con peor rendimiento pero que permita no exceder la capacidad disponible. En consecuencia,

$$W_0 = \sum_{i=1}^{s-1} p_i + \left\lfloor \frac{\bar{c} p_{s+1}}{w_{s+1}} \right\rfloor$$

Notar que ahora el rendimiento al que se aplica la capacidad restante no es el rendimiento del elemento crítico sino el del elemento siguiente.

La segunda parte del análisis consiste en ver cuál es el mayor resultado posible considerando que ahora sí se ingresa el elemento crítico en la mochila. Como justamente por definición del elemento crítico, no se lo podía ingresar a la mochila si se habían metido los elementos en el intervalo  $[0; s-1]$ , la única posibilidad de ingresar al elemento crítico es sacando a uno de los elementos en este intervalo.

$$W_1 = \sum_{i=1}^{s-1} p_i + \left\lfloor p_s - (w_s - \bar{c}) \frac{p_{s-1}}{w_{s-1}} \right\rfloor$$

La cota final se desprende de considerar ambos casos y ver cual tiene el mayor valor.

$$U_2 = \max(W_1; W_2)$$

Se puede demostrar que la cota de Martello & Toth es mejor a la planteada por Dantzig [1]. En consecuencia:

$$U_2 \leq U_1$$

**Ejemplo.** Cálculo de cotas para el ejemplo 1. Capacidad:  $c=65$

$N$	$p$	$w$	$r$
A	100	20	5
B	80	20	4
C	30	30	1
D	15	20	0.75
E	10	100	0.1

**Relajación lineal**

$$\begin{aligned} CP(KP) &= \sum_{i=1}^{s-1} p_i + \bar{c} \frac{p_s}{w_s} \\ &= 100 + 80 + 25 \frac{30}{30} = 205 \end{aligned}$$

**Dantzig**

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{i=1}^{s-1} p_i + \left\lfloor \bar{c} \frac{p_s}{w_s} \right\rfloor \\ &= 100 + 80 + \left\lfloor 25 \frac{30}{30} \right\rfloor = 205 \end{aligned}$$

**Martello & Toth**

Sin ingresar al elemento crítico:

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{i=1}^{s-1} p_i + \left\lfloor \bar{c} \frac{p_{s+1}}{w_{s+1}} \right\rfloor \\ &= 100 + 80 + \left\lfloor 25 \frac{15}{20} \right\rfloor \\ &= 180 + \lfloor 18,75 \rfloor \\ &= 180 + 18 = 198 \end{aligned}$$

Ingresando al elemento crítico:

$$\begin{aligned} W_2 &= \sum_{i=1}^{s-1} p_i + \left[ p_s - (w_s - \bar{c}) \frac{p_{s-1}}{w_{s-1}} \right] \\ &= 100 + 80 + \left[ 30 - (30 - 25) \frac{80}{20} \right] \\ &= 180 + 10 = 190 \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$U_2 = \max(W_1; W_2) = \max(198; 190) = 198$$

## 4. Variantes

Existen distintas variaciones que se han realizado al problema de la mochila estándar. A continuación se presenta una breve introducción a algunas de ellas.

**Acotado:** En esta variante, en vez de contar con solamente un elemento de cada tipo, se tiene una cantidad limitada y conocida de cada uno de los elementos (que no necesariamente es la misma). Es decir, el modelo pasa a ser:

$$\begin{aligned}x_i &\leq b_i && (\forall i = 1..n) \\ \sum_{i=1}^n w_i x_i &\leq c \\ \max \rightarrow z &= \sum_{i=1}^n p_i x_i\end{aligned}$$

**No acotado:** El problema de la mochila no acotado es una instancia particular del problema de la mochila acotado en el cual cada  $b_i = \infty$

**Suma de subconjuntos:** Existe una variante en la cual el beneficio es igual al peso para cada uno de los elementos. Esto no implica que el beneficio (o peso) sea el mismo para cada uno de los elementos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n w_i x_i &\leq c \\ \max \rightarrow z &= \sum_{i=1}^n w_i x_i\end{aligned}$$

**Problema del cambio:** Hay un caso particular que aparece cuando se exige cumplir exactamente con la restricción de capacidad. En este caso además se plantea que  $p_i = 1$  ya que se intenta reconstruir la situación de un cajero que debe maximizar o minimizar la cantidad de monedas que entrega de cambio.

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i = c$$

$$\max \rightarrow z = \sum_{i=1}^n x_i$$

**Múltiples mochilas:** Otra de las variantes conocidas surge de la generalización del problema estándar, cuando en vez de tener un solo contenedor(mochila), se tienen varios.

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 1 \quad (\forall i)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i x_{ij} \leq c_j \quad (\forall j)$$

$$\max \rightarrow z = \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^n p_i x_{ij}$$

## 5. Aplicaciones

### 5.1. Merkle-Hellman:

Una de las aplicaciones más importantes del problema de la mochila fue en el área de la criptografía. En 1976, Ralph Merkle y Martin Hellman idearon un sistema muy sencillo de implementar cuya fortaleza se basaba en la dificultad de resolver el problema de la mochila.

En particular, aplicaba este problema en la generación de claves de un sistema criptográfico simétrico. El algoritmo se basa en la idea de que dado un número  $k$  y conjunto de números  $C$ , el costo en términos computacionales de saber cuáles números de  $C$  se utilizaron para sumar  $k$  es tan alto que la comunicación es segura.

Este sistema criptográfico fue utilizado durante años especialmente debido a su simplicidad. Sin embargo, en 1982 se descubrió un algoritmo que permite romper este sistema criptográfico en tiempo polinomial y en consecuencia, dejó de ser utilizado[3].

### 5.2. Otras aplicaciones

Existen otras aplicaciones en distintas áreas y que tienen distintos tipos de recurso limitante. Algunos ejemplos son:

- *Selección de oportunidades de inversión:* presupuesto como limitante. Un estudio interesante[6] se puede encontrar que analiza situaciones en las cuales los elementos que se pueden incluir en la mochila se van recibiendo en forma continua y se debe tomar una decisión de que elementos elegir sin haber recibido todos (Problema de la secretaria[7])
- *Desperdiciar la menor cantidad de tela :* material como limitante.
- *Aprovechar al máximo el uso de máquinas:* tiempo como limitante.

## Referencias

- [1] MARTELLO, S. and TOTH, P. *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementation*. 1990.
- [2] BARTHOLDI, J. *Building Intuition: Insights From Basic Operations Management Models and Principles*. 2008.
- [3] SHAMIR, Adi. *A polynomial time algorithm for breaking the basic Merkle-Hellman cryptosystem*. 1982.
- [4] KARP, Richard. *Reducibility Among Combinatorial Problems*. 1972.
- [5] *Teoría de la complejidad computacional*. Wikipedia.  
[http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa\\_de\\_la\\_complejidad\\_computacional](http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_la_complejidad_computacional)
- [6] BABAIOFF, Richard et Al. *A Knapsack Secretary Problem with Applications*. 2007.
- [7] FREEMAN, P.R. *The Secretary Problem and Its Extensions: A Review*. 1983.