Método Simplex.
Análisis de la tabla óptima.
Análisis de Sensibilidad.

"No es posible improvisar del todo, siempre debe haber un camino trazado previamente, una norma que cumplir, un límite. Sin la existencia de reglamentos, no llegaríamos a la improvisación, sino al delirio."

Alejandro Dolina, Crónicas del Ángel Gris.

Es un hecho que la modelización es más amena que el análisis de sensibilidad o la parametrización. Pero también es cierto que el análisis de los resultados de nuestro trabajo de modelización (la tabla óptima), es una tarea que puede llegar a resultar muy creativa si se pone la atención en ver relaciones y no sólo números.

En el verano de 1988, cuando empecé a pensar el apunte, sólo tenía el comienzo de la idea que más arriba expuse. No escribí este apunte para llegar a amar el análisis de sensibilidad, sino para entenderlo. Creo que logré ambas cosas. Seguramente, ustedes lo leerán para comprender más acerca del tema. Mi objetivo es que lo entiendan y que también lleguen a quererlo, aunque sea un poquito.

Silvia A. Ramos
Invierno de 1995
(ha pasado mucho tiempo)

Análisis de una tabla de simplex

a) Significado de cada uno de los elementos de la tabla

No es nuestro objetivo explicar el método simplex sino mostrar el significado de cada uno de los elementos de una tabla de simplex cualquiera. Para ello, nos valdremos del siguiente ejemplo:

$$20\,X_1 + 10\,X_2 \leq 100 \qquad X_1, X_2 \geq 0$$
$$10\,X_1 + 30\,X_2 \leq 180$$
$$5\,X_1 + X_2 \leq 40 \qquad Z = 8\,X_1 + 5\,X_2 \quad (\text{máx})$$

Una fábrica produce dos tipos de puertas que identificaremos como puerta modelo 1 y modelo 2. Para hacer una puerta 1 se necesitan 20 horas hombre, en tanto para un tipo 2 se necesitan 10 hh. Por semana se dispone de 100 hh. Las necesidades de materia prima (madera) son de 10 kg. por puerta 1 y 30 kg. por puerta 2, contándose con 180 kg. por semana. En cuanto al consumo de máquina, del cual se disponen 40 horas por semana, es de 5 horas para el primer modelo y de 1 hora para el segundo, por unidad. Las puertas que quedan semiterminadas pueden terminarse la semana siguiente. El beneficio unitario es de 8 $ por puerta modelo 1 y 5 $ por puerta modelo 2.

			8	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	X_3	100	20	10	1	0	0
0	X_4	180	10	30	0	1	0
0	X_5	40	5	1	0	0	1
		0	-8	-5	0	0	0

			8	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
8	X_1	5	1	1/2	1/20	0	0
0	X_4	130	0	25	- 1/2	1	0
0	X_5	15	0	-1 1/2	- 1/4	0	1
		40	0	-1	0,4	0	0

			8	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
8	X_1	2,4	1	0	0,06	-0,02	0
5	X_2	5,2	0	1	-0,02	0,04	0
0	X_5	22,8	0	0	-0,28	0,06	1
		45,2	0	0	0,38	0,04	0

Usaremos la primera tabla (primer paso) para explicar qué significan cada uno de los elementos.

En la columna llamada C cada elemento (c_j) es el coeficiente de costo o coeficiente del funcional de cada X_j que está en la base.

En la columna llamada X figura el símbolo de cada variable que forma parte de la base (X_j). En este caso son X_3, X_4, y X_5.

En la columna llamaba B figura el valor que tienen en cada paso cada una de las X_j (las que están en la base, las que no están valen 0). En este paso X_1 y X_2 valen cero porque no están en la base, X_3 vale 100, X_4 vale 180, X_5 vale 40. En nuestro problema, X_1 indica la cantidad de puertas tipo 1 que se fabrican por semana. Idem X_2 pero para puertas tipo 2, X_3 indica el sobrante de hh. por semana, X_4 el sobrante de materia prima y X_5 el sobrante de horas máquina por semana. Por sobrante entendemos la cantidad disponible de un recurso que no es utilizado para la producción. Las variables son continuas ya que pueden producirse, por ejemplo, 3,5 puertas de uno de los modelos, la que queda sin terminar se concluye a la semana siguiente. Entonces X_1 y X_2 son una especie de marcadores del grado de avance en que se encuentra la fabricación de cada uno de los tipos de puertas.

Nótese que en este primer paso el valor de cada slack es la disponibilidad del recurso del cual es sobrante. Como no se fabrica nada, toda la disponibilidad sobra, nada se ha usado.

En la última fila figuran, el valor del funcional (en este paso 0) y los z_j-c_j que, si son todos positivos, indican que ese paso es óptimo. Cuando una variable está en la base su z_j-c_j, es igual a cero.

Cada a_{ij} (siendo i el elemento que está en la base en esa fila y j el número de columna en que está) significa en cuánto disminuirá el valor de la variable X_i respecto del actual por cada unidad de X_j (la de la columna) que decida fabricarse (si j corresponde a un producto) o que sobre (si j corresponde a un recurso). Más claro: a_{ij} significa cuánto disminuirá el valor de X_i por cada unidad con que entre valiendo a la base X_j.

Veamos la primera fila:

a_{31} = 20 significa que por cada unidad que se fabrique de X_1, disminuirá en 20 unidades el valor de X_3 (sobrante de hh). Es lógico porque para hacer una puerta tipo 1 se necesitan 20 hh.

a_{32} = 10: por cada unidad que se fabrique de X_2 disminuye en 10 el valor de X_3.

Segunda fila:

a_{41} = 10: por cada unidad que se fabrique de X_1, disminuirá en 10 el sobrante de materia prima (valor de X_4).
a_{42} = 30: por cada unidad que se fabrique de X_2 disminuye en 30 el valor de X_4.
a_{43} = 0: obviamente no incide el sobrante de hh. en el sobrante de materia prima.

Tercera fila:
a_{51} = 5: por cada unidad que se fabrique de X_1 disminuirá en 5 el valor de X_5 (sobrante de horas máquina).
a_{52} = 1: por cada unidad que se fabrique de X_2 disminuye en 1 el valor de X_5.

Elegimos para entrar en la base a X_1 por tener z_j-c_j menor que cero y de mayor valor absoluto. Elegimos uno que tenga z_j-c_j menor que cero porque mejora el funcional:

$$z^{p+1} = z^p - \theta.(z_j-c_j)$$

y se elige el de mayor valor absoluto por convención.
Calculo los cocientes: 100/20, 180/10, 40/5, el menor es el primero.
Entonces sale X_3 de la base y entra X_1 con un valor de 100/20=5.
Habíamos dicho que el valor de X_3 disminuiría en 20 por cada unidad de X_1.
Entonces tendrá que disminuir en 20 x 5 = 100 y como actualmente valía 100 queda en cero (correcto, pues sale de la base).
X_4 debería disminuir en 10 x 5 = 50. Debería ser igual a 180-50 = 130 en el próximo paso.
X_5 debería disminuir en 5 x 5 = 25 y sería igual a 40-25 = 15.
Se comprueba el motivo de elegir al menor de los cocientes como 0, veamos qué hubiera sucedido si se hubiera elegido el segundo cociente (40/5). X_1 entraría a la base con valor 8.

X_3 = 100 - 20 x 8 = -60
X_4 = 180 – 10 x 8 = 100
X_5 = 40 - 5 x 8 = 0

Vemos que X_5 sale de la base, sin embargo X_3 toma valor negativo, eso no puede ser. Bien, si no se toma el menor cociente, como θ pasa esto porque "salimos del poliedro".
Observando el segundo paso vemos que efectivamente X_4 = 130 y X_5 = 15

b) *Análisis de la modificación de los a_{ij} en cada paso.*

Analicemos el segundo paso:

			8	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
8	X_1	5	1	1/2	1/20	0	0
0	X_4	130	0	25	- 1/2	1	0
0	X_5	15	0	-1 1/2	- 1/4	0	1
		40	0	-1	0,4	0	0

En la primera fila, por cada unidad de aumento en X_2, X_1 disminuye 1/2 su valor, que por cada hh. que sobre, es decir, no se utilice para la producción (valor de X_3), disminuye su valor X_1 en 1/20 (claro: cuando X_3 valía 100, entonces X_1 valía 5 – 100 x 1/20 = 0; en el primer caso).

En la segunda fila, por cada unidad que aumente X_2 disminuye su valor X_4 en 25 unidades y que por cada hh. que no se use (X_3), X_4 aumentará su valor en 1/2 [en el primer paso cuando X_3 = 100, entonces X_4 = 130 – 100 x (-1/2) = 180].

En la tercera fila, por cada unidad que aumente X_2 se ve que aumentará el de X_5 en 3/2 y por cada hh. que no se utilice se aumentará el valor de X_5 en 1/4.

Ahora bien ¿de dónde salen estos números? ¿Cuál es la razón para que, si se fabrica una puerta de tipo 2 se ganen 3/2 horas máquina? Se dirá que ese valor surge de pivotear en el paso anterior:

$$a_{52} = 1 - (5 \times 10) / 20 = -3/2$$

Pero esto tiene su lógica porque cuando se produce una unidad de X_2 se consumen más horas máquina (eso disminuye el valor de X_5 porque cuanto menos se fabrique más sobra de los recursos y cuanto más se consume menos sobra). Pero el hecho de que se fabrique X_2 supone que se modifique la cantidad de puertas de tipo 1 que se hacen, por una razón de redistribución de recursos. Cuando X_1 disminuye, eso hará aumentar el valor de X_5 (porque cuanto menos se fabrique más sobra de los recursos). Esto hay que balancearlo, es decir, hay que ver si la disminución de X_5 producida por el aumento de X_2 es mayor o menor que el aumento de X_5 producido por la disminución de X_1. El resultado de ese balanceo es el a_{52} del segundo paso (disminución neta de X_5 por cada unidad de X_2 que se fabrique).

Entonces -3/2 = Pérdida por X_2 – Ganancia por X_2

Sabemos que cada unidad de X_2 consume 1 hora máquina de modo que:

$$\text{Pérdida por } X_2 = 1$$

Para calcular la ganancia tendríamos que saber en cuánto disminuirá X_1 al fabricarse una unidad de X_2. Eso lo sabemos, por a_{12} = 1/2 sabemos que X_1 disminuye 1/2 por cada unidad que aumenta X_2, y como cada puerta de tipo 1 consume 5 horas de máquina se liberan 5 x 1/2 horas de máquina por cada unidad que se fabrica de X_2, al dejarse de fabricar 1/2 de X_1. Entonces:

Ganancia por X_2 = 5/2.

Pérdida por X_2 – Ganancia por X_2 = 1 – 5/2 = (-3/2), que es lo que queríamos encontrar.

De igual forma a_{42} = 25 se explica como: 30 – 1/2 x 10 = 25.

En este segundo paso, en la fila 1, a_{13} nos dice que, por cada aumento unitario de X_3 disminuye X_1 en 1/20.

Siguiendo con nuestro ejemplo, en este segundo paso sabemos que sólo puede entrar a la base X_2 por tener el único z_j-c_j negativo. Elegiremos al que sale, determinado por el menor cociente llamado θ. No puede salir X_5 ya que su cociente es 15/(-3/2) lo que da un número negativo y como θ es el valor con el que la variable entra a la base y las variables son siempre positivas, ese cociente nunca podrá ser 0. De los dos cocientes restantes, el menor es el que corresponde a la segunda fila (130/25), entonces sale X_4 y entra X_2 con un valor de 130/25 = 5,2. De acuerdo con lo visto, determinemos antes de pivotear, el valor que tendrán las X_i de la base en el próximo paso.

$$X_1 = 5 - 1/2 \times 5{,}2 = 2{,}4$$
$$X_4 = 130 - 25 \times 5{,}2 = 0$$
$$X_5 = 15 - 3/2 \times 5{,}2 = 22{,}8$$

En el tercer paso podemos verificar la veracidad del cálculo.

Nótese que esta es la "filosofía del pivote", ya que si lo hiciéramos por pivote tendríamos:

$$X_1 = 5 - 1/2 \times (130/25)$$

Y como 130/25 = 5,2 es lo mismo que estábamos haciendo.

Habíamos dicho que X_1 disminuye en 1/20 por cada unidad que aumenta X_3, pero al disminuir X_1, también este valor cambiará en el tercer paso.

Al aumentar X_3 en una unidad, X_2 aumenta en 0,02 pues disminuye en -0,02 (valor del a_{23} del tercer paso, que ya conocemos por estar en la fila del pivote), a su vez, por cada unidad que aumente X_2, X_1 disminuye en 1/2

(a_{12} del segundo paso), por lo tanto hace disminuir a X_1 en 1/2 x 0,02, con lo que:

$$a_{13} = 1/20 - 1/2 \times (-0{,}02) = 0{,}06$$
$$\text{es decir,} \quad a_{13} = 1/20 + 1/2 \times \ 0{,}02 = 0{,}06$$

Sumamos el último término porque es consumo, no liberación del recurso. Consumo implica disminución y 1/20 también era disminución, por eso los sumo.

En términos generales, si quiero averiguar el a_{ij} de un paso tomo el a_{ij} del paso anterior (en este caso = 1/20) y le resto un término. Para obtener ese término tengo a_{ej} (e = subíndice del que entra) de este paso (-0,02) pero yo quiero averiguar a_{ij}, entonces paso esto a la correspondencia con X_i multiplicando por el a_{ie} del paso anterior (1/2). Si este último término es negativo, es consumo, sino, es liberación.

Hagámoslo con el cambio de a_{53} que pasó a ser –0,28.

Al entrar X_2, X_5 aumenta 3/2 y como X_3 disminuye en 0,02 por cada unidad que deje de producir X_2: $a_{53} = -1/4 - (-0{,}02) \times (-3/2) = -0{,}28$.

c) Costo de oportunidad y valor marginal. Su influencia en el óptimo.

Aclaremos, ante todo, que en este apartado analizaremos los z_j-c_j en un paso cualquiera, no necesariamente el óptimo.

Los indicadores z_j-c_j tienen nombres especiales. Cuando el z_j-c_j pertenece a una X_i producto lo llamaremos "costo de oportunidad"; cuando pertenece a una X_i slack que mide el sobrante de un recurso, lo llamaremos "valor marginal".

El costo de oportunidad nos indica cuánto disminuirá el funcional si se fabrica una unidad de ese producto. Por supuesto, para aquellos productos que están en la base, el costo de oportunidad es cero, porque ya se están fabricando. Para aquellos productos que no están en la base, es decir su X_i vale cero, el costo de oportunidad puede ser cero (lo que indica soluciones alternativas pues se obtiene igual valor de funcional con dicha variable en la base que con la base actual, que no la contiene), negativo (una disminución negativa del funcional es un aumento del mismo, estamos en el caso en el que esa variable es candidata a entrar en la base) o positivo (si nos obligaran a producir una unidad de ese producto nuestro funcional disminuiría en un valor igual al producto de la cantidad de unidades fabricadas y dicho costo de oportunidad).

En el caso del valor marginal la idea es la misma, el valor marginal de los recursos indica cuál sería el aumento del funcional si tuviéramos una unidad más de ese recurso disponible. Entonces si tuviera que pagar para obtener una unidad de ese recurso no pagaría más de esa cifra porque sino perdería plata. Así, bien se ve por qué el valor marginal de los recursos cuyas variables están en la base es igual a cero. Si están en la base es que tienen sobrante y no estoy dispuesto a pagar por tener más de algo que me sobra. En el caso de los recursos saturados, cuyas variables no figuran en la base, el valor marginal puede ser igual a cero (alternativas), menor que cero (candidato a entrar en la base) o mayor que cero (estoy dispuesto a pagar eso para obtener el recurso).

Veamos en el segundo paso. Tengo z_2-c_2 = -1, indica que por cada unidad que se fabrique de X_2 el funcional aumentará en 1. En el paso siguiente vemos que se fabrican 5,2 unidades de X_2 y el funcional ha aumentado en 5,2 x 1 (de 40 a 45,2). Las hh. están saturadas y su valor marginal es 0,4.

Ahora vemos si es cierto que una hh. vale 0,4 para nosotros. Si es cierto, nuestro funcional tendría que aumentar 0,4 por cada hh. de la que dispongamos inicialmente de más. Supongamos ahora que nuestra disponibilidad de hh. es 101 (no 100) y hagamos el cálculo de nuevo a ver qué sucede.

			8	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	X_3	101	20	10	1	0	0
0	X_4	180	10	30	0	1	0
0	X_5	40	5	1	0	0	1
		0	-8	-5	0	0	0

			8	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
8	X_1	5,05	1	1/2	1/20	0	0
0	X_4	129,5	0	25	- 1/2	1	0
0	X_5	37,5	0	-1 1/2	- 1/4	0	1
		40,4	0	-1	0,4	0	0

Efectivamente, el funcional ha mejorado en 0,4; obteniéndose, salvo el valor de las X, una tabla idéntica a la 2da. tabla original.

¡Entonces es fácil! Basta con aumentar el valor de la disponibilidad de hh., comprando a menos de 0,4 todas las hh, posibles. Por cada hh. que compre, mi funcional aumenta en 0,4. Pero no es tan sencillo. ¿Qué hubiera pasado si aumentábamos tanto la disponibilidad de hh. que el cociente de la fila 1 deja de ser el menor? La que saldría no sería la variable X_3 sino otra. Por ejemplo: si tenemos 161 hh.:

			8	5	0	0	0	Q
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
0	X_3	161	20	10	1	0	0	8,05
0	X_4	180	10	30	0	1	0	18
0	X_5	40	5	1	0	0	1	8
		0	-8	-5	0	0	0	

			8	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	X_3	1	0	6	1	0	-4
0	X_4	100	0	28	0	1	-2
8	X_1	8	1	1/5	0	0	1/5
		64	0	-3,4	0	0	1,6

¿Qué sucede? Si tenemos 61 hh. más, el funcional tendría que haber aumentado en 61 x 0,4 = 24,4; sin embargo, sólo ha aumentado en 24. Vemos que la diferencia está en una hh. que no ha aumentado el funcional. Esa es la hh. que sobra según este segundo paso (X_3 = 1). Esto nos demuestra que se pueden comprar recursos hasta un límite, el límite lo marca el momento en el cual ese recurso comienza a sobrar y, por lo tanto, ya no nos conviene comprar más. Tenemos una forma de averiguar cuál es ese límite pero eso lo veremos más adelante.

Dualidad en programación lineal

a) Planteo dual de un problema

Al problema original lo llamaremos, a partir de ahora, directo o primal. Por lo general es de la forma:

$$
\begin{array}{l}
a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n} X_n \leq b_1 \\
\quad . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\
\quad . \\
a_{i1} X_1 + \dots\dots\dots + a_{ij} X_j + \dots\dots\dots + a_{in} X_n \leq b_j \\
\quad . \\
\quad . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\
a_{m1} X_1 + \dots\dots\dots + a_{mj} X_j + \dots\dots\dots + a_{mn} X_n \leq b_m
\end{array}
$$

$$f(x) = Z = c_1 X_1 + \dots\dots + c_j X_j + \dots\dots\dots + c_n X_n \quad \text{(máximo)}$$

$$X_j \geq 0 \qquad\qquad \forall\ j = 1\dots\dots n$$

El problema dual equivalente consiste en hallar las y_i no negativas, tales que satisfagan las siguientes inecuaciones y minimicen el funcional g(y):

$$
\begin{array}{l}
a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{m1} Y_m \geq c_1 \\
\quad . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\
\quad . \\
a_{1j} Y_1 + \dots\dots\dots + a_{ij} Y_i + \dots\dots\dots + a_{mj} Y_m \geq c_i \\
\quad . \\
\quad . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\
a_{1n} Y_1 + \dots\dots\dots + a_{in} Y_i + \dots\dots\dots + a_{mn} Y_m \geq c_n
\end{array}
$$

$$g(y) = Z = b_1 Y_1 + \dots\dots + b_i Y_i + \dots\dots\dots + b_m Y_m \quad \text{(mínimo)}$$

$$Y_i \geq 0 \qquad\qquad \forall\ i = 1\dots\dots m$$

Si el primal llegara a ser de mínimo sería:

$$
\begin{array}{l}
a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n} X_n \geq b_1 \\
\quad . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\
\quad . \\
a_{i1} X_1 + \dots\dots\dots + a_{ij} X_j + \dots\dots\dots + a_{in} X_n \geq b_j
\end{array}
$$

.

. .

$$a_{m1} X_1 + \dots\dots + a_{mj} X_j + \dots\dots + a_{mn} X_n \geq b_m$$

$$f(x) = Z = c_1 X_1 + \dots + c_j X_j + \dots\dots + c_n X_n \quad \text{(mínimo)}$$

$$X_j \geq 0 \qquad \forall\, j = 1\dots\dots n$$

Y su dual equivalente es:

$$a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 + \dots\dots + a_{m1} Y_m \leq c_1$$

. .

.

$$a_{1j} Y_1 + \dots\dots + a_{ij} Y_i + \dots\dots + a_{mj} Y_m \leq c_i$$

.

. .

$$a_{1n} Y_1 + \dots\dots + a_{in} Y_i + \dots\dots + a_{mn} Y_m \leq c_n$$

$$g(y) = Z = b_1 Y_1 + \dots + b_i Y_i + \dots\dots + b_m Y_m \quad \text{(máximo)}$$

$$Y_i \geq 0 \qquad \forall\, i = 1\dots\dots m$$

Donde las incógnitas son, también, las y_i que satisfagan las inecuaciones y maximicen $g(y)$.

La relación entre un problema de programación lineal y su dual puede resumirse como sigue:

a) El dual tiene una variable por cada restricción del problema original.

b) El dual tiene tantas restricciones como variables tiene el problema original.

c) El dual de un problema de maximización es un problema de minimización y viceversa.

d) Los coeficientes del funcional (costo o beneficio) del problema original, son los términos independientes de las restricciones del dual y los términos constantes o independientes de las restricciones del problema original son los coeficientes del funcional dual.

e) Cada columna de coeficientes en el conjunto de inecuaciones del problema original, se transforma en una fila de coeficientes en el dual.

f) El sentido de las desigualdades en el dual es el inverso del sentido de las desigualdades del problema original.

g) Se mantiene la condición de que las variables sean mayores o iguales que cero.

El teorema fundamental de la dualidad, que no desarrollaremos aquí, nos dice que si el problema primal tiene una solución óptima finita, entonces el dual tendrá una solución óptima y finita (y viceversa).

Además, y lo más importante, el óptimo del directo coincide con el del dual (Máx f(x) = Mín g(y)). Si cualquiera de los dos problemas, primal o dual, tiene una solución óptima ilimitada, entonces el otro problema no tiene solución posible.

b) Resolución del problema dual.

Analizaremos para el ejemplo más común (directo de máx. y dual de mín.) el dual del problema que ya conocemos:

Primal

$$20\,X_1 + 10\,X_2 \leq 100$$
$$10\,X_1 + 30\,X_2 \leq 180$$
$$5\,X_1 + X_2 \leq 40$$
$$Z = 8\,X_1 + 5\,X_2 \quad \text{(máx)}$$

Dual

$$20\,Y_1 + 10\,Y_2 + 5\,Y_3 \geq 8$$
$$10\,Y_1 + 30\,Y_2 + Y_3 \geq 5$$
$$Z = 100\,Y_1 + 180\,Y_2 + 40\,Y_3 \quad \text{(mín)}$$

Para un problema de minimización el simplex es igual que para máximo, sólo que para decidir cuál es el vector que entra tomaremos el que tenga z_j-c_j mayor que cero de mayor valor absoluto. El óptimo se logra cuando todos los z_j-c_j son menores o iguales que cero.

			100	180	40	0	0	M	M
B	Y	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	m_6	m_7
M	m_6	8	20	10	5	-1	0	1	0
M	m_7	5	10	30	1	0	-1	0	1
		13 M	30M-100	40M-180	6M-40	-M	-M	0	0

			100	180	40	0	0	M	M
B	Y	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	m_6	m_7
M	m_6	19/3	50/3	0	14/3	-1	1/3	1	-1/3
180	Y_2	1/6	1/3	1	1/30	0	-1/30	0	1/30
		19M/3 + 30	50M/3-160	0	14M/3-16	-M/3	M-6	0	-4M/3+6

			100	180	40	0	0	M	M
B	Y	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	m_6	m_7
100	Y_1	19/50	1	0	7/25	-3/50	1/50	3/50	-1/50
180	Y_2	1/25	0	1	-3/50	1/50	-1/25	-1/50	1/25
		45,2	0	0	-22,8	-2,4	-5,2	2,4-M	5,2-M

Vemos que todos los z_j-c_j son menores o iguales a cero, hemos llegado al óptimo que es, como lo anunciamos, igual al del primal (45,2)

Para poder operar con el dual tengo que agregar 2 artificiales (una por cada desigualdad de ≥)

c) Significado económico del dual.

El dual tiene restricciones del tipo:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\text{recurso}_i}{\text{prod}_j} \; Y_i \geq \frac{\text{valor}}{\text{prod}_j} \qquad \text{con} \quad j = 1 \ldots n$$

$$\text{y minimizar } g(y) = \sum_{i=1}^{m} (\text{recurso}_i) \; Y_i Y_i \geq 0 \qquad i = 1 \ldots m$$

Es decir que la unidad de Y_i sería el valor que le damos a cada unidad del insumo o recurso i (valor económico que tiene para nosotros ese insumo) lo que parte del valor que tenga cada unidad (valor marginal).

Cuando un recurso tiene valor para nosotros (Y_i mayor que cero) es que está saturado.

Cada Y_i representará el beneficio que la empresa debe asignarle a cada peso invertido según sea destinado a materia prima, mano de obra o amortización de equipos (por ejemplo en nuestro caso, Y_1 es el beneficio que reportará cada peso que se invierta en mano de obra).

Es decir que las restricciones serán:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\text{recurso}_i}{\text{prod}_j} \; \frac{\text{valor}}{\text{recurso}_i} \geq \frac{\text{valor}}{\text{prod}_j} \qquad \text{con} \quad j = 1 \ldots n$$

Con un funcional:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{m} (\text{recurso } i) \; \frac{\text{valor}}{\text{recurso } i} = (\text{valor})$$

Analicemos una de nuestras restricciones:

$$20 \frac{hh}{X1} Y_1 \frac{valor}{hh} + 10 \frac{kg}{X_1} Y_2 \frac{valor}{kg.} + 5 \frac{h\ máq.}{X_1} Y_3 \frac{valor}{h\ máq.} \geq 8 \frac{valor}{X_1}$$

y nuestro funcional:

$$g(y) = 100 \frac{hh.}{sem.} Y_1 \frac{valor}{hh} + 180 \frac{kg.}{sem.} Y_2 \frac{valor}{kg.} + 40 \frac{h\ máq.}{sem} Y_3 \frac{valor}{h\ máq.}$$

Daremos verbalmente la comparación de los problemas primal y dual.

Primal: Dado un valor unitario para cada producto (c_j) y un límite superior para la disponibilidad de cada recurso o insumo (b_i) ¿cuántas unidades de cada producto (X_j) deben producirse por semana para maximizar el beneficio total?

Dual: Dada una disponibilidad total de cada insumo (b_i) y un límite inferior al valor unitario para cada producto (c_j) ¿qué valor unitario debería ser asignado a cada insumo (Y_i) para minimizar el valor de insumo total?

Ya dijimos cuál era el significado de cada Y_i. Ese concepto corresponde a lo que definimos como valor marginal de un recurso. Entonces llamaremos a cada Y_i real "valor marginal de un recurso i". Ese valor representa la utilidad adicional (marginal) que se podría añadir a la total si el recurso aumenta su disponibilidad en una unidad. Como vimos, esa utilidad puede no realizarse totalmente ya que las otras restricciones pueden reducir nuestra capacidad de usar la unidad adicional completamente. En cuanto a las Y_i slacks (en nuestro caso Y_4 e Y_5) las llamaremos "costo de oportunidad" del producto al cual representan. En general, se les suele dar varios nombres a las Y_i, como "precios contables", "precios ficticios", "precios virtuales", etc.

¿Por qué en el planteo del dual el c_j se ve como límite INFERIOR al valor unitario de cada producto?

La relación es: $$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \geq c_j \qquad j = 1...n$$

Es un modelo de todas las relaciones del dual que expresan que no se deben colocar beneficios por cada peso invertido Y_i de modo tal que el beneficio total supere al beneficio de las inversiones realmente realizadas en el producto, estos beneficios óptimos internos que puede colocar la empresa se entiende que corresponden a situaciones de libre competencia. En este tipo de relaciones el primer miembro representa el beneficio prorrateado en los recursos y el segundo miembro, como ya sabemos, es el beneficio por unidad del producto j.

Si se fijaran beneficios más altos que los que surgen por el cálculo, es decir Y_i más altos que los del cálculo, se tendría:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i\ Y_i > \text{máx} \sum_{j=1}^{n} c_j\ Y_j \qquad \text{ó} \qquad g(y) > \text{máx } f(x)$$

Esto significaría que, mientras la empresa percibe el máximo f(x) debería teóricamente tener que pagar por sus inversiones de materia prima, mano de obra y equipos un interés g(y) superior a lo que gana.

Si por el contrario fuera: $\sum_{i-1}^{m} b_i\ y_i < \text{máx } f(x)$

las inversiones en mano de obra, materia prima y equipos estarían percibiendo un interés inferior al que en conjunto está recibiendo la empresa y lo elevaría hasta que resulta:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i\ Y_i = \sum_{j=1}^{n} c_j\ X_j$$

d) *Correspondencia entre la tabla óptima del primal o directo y la tabla óptima del dual a partir de la tabla óptima del directo.*

Para hacer la comparación incluimos la tabla óptima del directo

			8	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
8	X_1	2,4	1	0	0,06	-0,02	0
5	X_2	5,2	0	1	-0,02	0,04	0
0	X_5	22,8	0	0	-0,28	0,06	1
		45,2	0	0	0,38	0,04	0

Recordemos la tabla óptima del dual, pasando las fracciones a reales y obviando las columnas de variables artificiales.

			100	180	40	0	0
B	Y	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
100	Y_1	0,38	1	0	0,28	-0,06	0,02
180	Y_2	0,04	0	1	-0,06	0,02	-0,04
		45,2	0	0	-22,8	-2,4	-5,2

Como vemos, el valor de Y_1 coincide con el z_j-c_j de la slack X_3 en la tabla óptima primal (valor marginal de hh) y el de Y_2 coincide con el z_j-c_j de X_4 en la óptima primal (valor marginal de materia prima). Vemos así la razón del nombre que le dimos a cada Y_i.

Entonces, como dijimos, a cada slack X_j le corresponde una Y_i real y viceversa, hay una Y_i slack por cada X_j real.

Mostraremos la correspondencia:

<u>Primal</u>	<u>Dual</u>
X_1 (producción puerta 1)	Y_4 (costo de oportunidad puerta 1)
X_2 (producción puerta 2)	Y_5 (costo de oportunidad puerta 2)
X_3 (sobrante hh)	Y_1 (valor marginal hh)
X_4 (sobrante materia prima)	Y_2 (valor marginal materia prima)
X_5 (sobrante horas máquina)	Y_3 (valor marginal hs. máquina)

El valor de cada Y_i es igual al valor del z_j-c_j del X_j correspondiente. Por eso, si la X_j correspondiente no figura en la base óptima primal, la Y_i figurará en la base óptima del dual y a la inversa. El z_i-b_i de cada Y_i es igual al valor de cada X_j correspondiente en la tabla óptima del primal cambiada de signo (por ejemplo en el dual z_3-b_3 = -22,8 = X_1).

Haciendo uso de la propiedad e) del dual que citamos en el punto a, podemos pasar de la tabla óptima del primal a la del dual.

Primero plantearemos el encabezado de cada columna, indicando en la parte superior de cada una de ellas la correspondencia con el primal.

En la base colocamos cada Y_i que integra la base (aquellas cuyo X_j no está en la base primal) con su valor y en las columnas correspondientes pondremos los vectores de la matriz identidad.

			(X_4)	(X_5)	(X_1)	(X_2)	(X_3)
			100	180	40	0	0
C	Y	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
100	Y_1	0,38	1	0			
180	Y_2	0,04	0	1			
		45,2	0	0			

En las z_i-b_i pondremos el valor de X_j correspondiente cambiado de signo; y como columnas pondremos la fila del X_j correspondiente con sus elementos cambiados de signo, cuidando que coincidan las posiciones. Es decir, en la intersección de Y_1 con Y_3 como los elementos de una tabla dual son $-a_{ij}$ se pone el a_{ij} correspondiente a la intersección de X_5 (Y_3) con X_3 (Y_1) de la tabla primal cambiado de signo, y así sucesivamente hasta llenar la tabla. En el caso precitado el elemento en el directo es "-0,28" y se pone con signo positivo en el dual.

Es conveniente hacerlo para practicar y asegurarse viendo el resultado en la tabla dual que adjuntamos. Debe coincidir exactamente con ella. Al cabo de practicar con varios ejercicios se consigue un dominio completo. Cuando no se hace el dual completo, igual se puede verificar si la tabla óptima del dual está bien. Para eso calculamos los z_i-b_i y el funcional y luego vemos si cada z_i-b_i vale lo que tiene que valer (-X_j cte.) y si el valor del funcional es el óptimo primal. Así, se puede pasar de la tabla óptima del primal a la óptima del dual sin necesitar más que la tabla inicial y la final del primal. ¿Por qué la inicial?; para saber a qué restricción corresponde cada Y_i y su significado, además de otras utilidades que veremos en el punto e.

Una cosa para tener en cuenta en la correspondencia entre el primal y dual es que, cuando uno de los dos problemas es degenerado, el otro tiene soluciones alternativas. Además, cuando alguno de los dos problemas tiene solución infinita (poliedro abierto), el otro no tiene solución (es incompatible). Esta última afirmación está demostrada por el teorema de la dualidad, de la anterior nos ocuparemos más adelante.

e) Recomendaciones adicionales.

Dijimos que el sentido de las desigualdades en el dual es el inverso del sentido de las desigualdades del primal. Pero, ¿qué sucede si no todas las desigualdades del primal tienen el mismo sentido?

Si hay inecuaciones de ≥, entonces habrá que multiplicarlas por -1 para invertir el signo.

Ejemplo: Primal / Dual

Primal:

$X_1 + 2 X_2 \leq 8$

$5 X_1 - X_2 \geq 6 \Rightarrow -5 X_1 + X_2 \leq -6$

$Z = 2 X_1 + X_2$ (máx)

Dual:

$Y_1 - 5 Y_2 \geq 2$

$2 Y_1 + Y_2 \geq 1$

$Z = 8 Y_1$ "-" $6 Y_2$ (mín)

Puede suceder que algunos de los c_j sean negativos. Entonces hay que transformar la inecuación del dual en ≤ multiplicando por (-1) para que no quede disponibilidad negativa.

Ejemplo: Primal / Dual

Primal:

$2 X_1 + 3 X_2 \leq 5$

$X_1 + 2 X_2 \leq 3$

$Z = 2 X_1$ "-" $3 X_2$ (máx)

Dual:

$2 Y_1 + Y_2 \geq 2$

$3 Y_1 + 2 Y_2 \geq -3 \Rightarrow -3 Y_1 - 2 Y_2 \leq 3$

$Z = 5 Y_1 + 3 Y_2$ (mín)

Por eso, una recomendación muy especial: antes de pasar automáticamente al dual hacer el planteo inicial porque, por ejemplo, un coeficiente del funcional que se pensaba que era 6 pasa a ser -6 en un caso de cambio de signo y eso puede hacer que la tabla dual óptima no corresponda con la primal óptima.

Modificaciones en el problema original

Veamos ahora cómo podemos aprovechar lo que aprendimos acerca del problema original y del problema dual. Lo haremos señalando las distintas modificaciones que podemos hacer a nuestro problema. Es lógico que, si modificamos en algo nuestro problema, la solución más inmediata que encontraremos será hacer todo el desarrollo del simplex nuevamente. Pero podemos aprovechar ciertas propiedades para, a partir de la tabla óptima del problema original, llegar directamente al óptimo del problema modificado. A continuación se indican las distintas modificaciones que podemos hacer a un problema.

a) Agregado de incógnitas.

A nuestro problema inicial agregamos un nuevo tipo de puerta, que consume 18 hh., no consume horas de máquina y necesita 15 kg. de materia prima. Su beneficio unitario es de 4 $.

Llamemos X_6 a la variable que representa la cantidad fabricada de este nuevo tipo de puerta. Nuestro problema original quedaría modificado así:

$$
\begin{aligned}
20 X_1 + 10 X_2 + 18 X_6 &\leq 100 \\
10 X_1 + 30 X_2 + 15 X_6 &\leq 180 \\
5 X_1 + X_2 + 0 X_6 &\leq 40
\end{aligned}
$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0$$

$$z = 8 X_1 + 5 X_2 + 4 X_6 \quad (\text{máx.})$$

A la primera tabla de nuestro problema tendríamos que agregarle una columna:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y volver a resolver el simplex. Tenemos una forma de saber cómo será ese vector en la tabla óptima, que es la que está conformada por las columnas de la tabla óptima que corresponden a la matriz identidad del primer paso, debidamente ordenados. Esto se hace porque la matriz inversa óptima refleja los cambios que se produjeron en la base desde el primer paso y por eso es la encargada de "traducir" cada vector expresado en la primera base a la base óptima. Obtengamos ese A_6 óptimo.

$$\begin{pmatrix} 0{,}06 & -0{,}02 & 0 \\ -0{,}02 & 0{,}04 & 0 \\ -0{,}28 & 0{,}06 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}78 \\ 0{,}24 \\ -4{,}14 \end{pmatrix}$$

Es importante ordenar los coeficientes según la disposición de las slacks en el primer caso (aquí hh – mp – h. máq.), si no el resultado será un vector cualquiera y no el deseado por no haber expresado el primero en la base del primer paso.

Una vez obtenido el vector calculamos su z_j-c_j que es el único que falta calcular en la tabla óptima:

$$z_j - c_j = 0{,}78 \times 8 + 0{,}24 \times 5 - 4 = 3{,}44$$

Si hubiera dado un z_j-c_j negativo tendríamos que hacerlo entrar a la base porque quiere decir que sin fabricar ese tipo de producto no se llega al óptimo.

Si el agregado de productos no depende de otros puedo agregar de una vez varios productos.

b) Cambios de coeficientes del funcional.

Si el funcional cambia algunos coeficientes pero no cambia su sentido puedo solucionarlo sin necesidad de hacer todo de nuevo.

Simplemente, cuando se modifica uno o más coeficientes de costo se reemplaza en la tabla final del simplex, los coeficientes viejos por los nuevos, en todos los lugares en que aparezcan (por ejemplo en columna C) y se calculan todos los z_j-c_j de nuevo.

Si en nuestro problema original cambiamos por 12 el beneficio unitario de las puertas tipo 1 será:

			12	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
12	X_1	2,4	1	0	0,06	-0,02	0
5	X_2	5,2	0	1	-0,02	0,04	0
0	X_5	22,8	0	0	-0,28	0,06	1
		54,8	0	0	0,62	-0,04	0

Hemos obtenido un z_j-c_j negativo, entonces para este c_j esta tabla no es óptima. Haremos entrar a X_4 a la base para optimizarla.

Si el c_j corresponde a una variable que está en la base, cambian el funcional y todos los z_j-c_j.

Si el c_j que cambia corresponde a una variable que no está en la base, sólo cambiará ese z_j-c_j.

Para pensar: ¿qué sucede cuando todos los c_j aumentan en la misma proporción?

c) Cambios en los términos independientes.

Como los términos independientes son los coeficientes del funcional del dual, entonces se reduce a un problema como el caso b) pero tomando la tabla óptima del dual. Esto es porque esa modificación implicaría que se modifiquen una o más filas y esa modificación exigiría hacer todo de nuevo. Pero, como las filas del directo son las columnas del dual, así cada problema que implique una modificación en filas se pasa al dual y será una modificación de columnas, que sí es salvable.

Entonces, para solucionar esto debemos cambiar cada coeficiente del funcional del dual como cambiamos los c_j en b). Si alguna de las relaciones del problema original era de ≥ recordemos que el b_i en el funcional del dual va cambiado de signo. Una vez cambiado el funcional del dual vuelven a calcularse los z_i-b_i y di alguno es mayor que cero, se lo hace entrar para llegar al óptimo.

d) Agregado de las inecuaciones.

Agregamos a nuestro problema un proceso de barnizado de puertas. El consumo de pintura barniz es de 3 litros por cada puerta de tipo 1 y 2 litros por puerta de tipo 2. Hay disponibles 120 litros de pintura por semana. Esto implicaría agregar al primer paso del simplex una nueva fila que representaría a $3 X_1 + 2 X_2 \leq 120$ y una nueva columna para la slack correspondiente. Si hiciéramos esto, tendríamos que resolver de nuevo el problema. Pero si pasamos al dual esa variable slack que se agrega al directo es una variable Y_i real (Y_6) y las filas se transformarán en columnas, así que el problema se reduciría a agregar una incógnita del dual. Se observa que esto reduce el problema al caso a) sólo que hay que premultiplicar el vector Y por la matriz inversa óptima del dual, compuesta por los vectores de la tabla óptima que en el primer paso integraban la matriz de identidad. En el caso del simplex primal notamos que generalmente era los vectores de las variables slacks quienes integraban la matriz inversa óptima, por lo tanto aquí podría pensarse lo mismo; si revisamos la tabla inicial dual, quienes integraban la matriz identidad eran los vectores de las variables artificiales, agregados, justamente para formar dicha base, por ser todas las relaciones de ≥ con lo que las slacks formaban la identidad pero cambiada de signo.

$$\begin{array}{rrrrrrl} & 20\,Y_1 + & 10\,Y_2 + & 5\,Y_3 - & y_4 + & \mu_6 & = 9 \\ & 10\,Y_1 + & 30\,Y_2 + & Y_3 - & y_5 + & \mu_7 & = 5 \\ z = & 100\,Y_1 + & 180\,Y_2 + & 40\,Y_3 + & M\,\mu_6 + & M\,\mu_7 & (\text{mín}) \end{array}$$

Entonces, para formar la matriz inversa óptima tomamos los vectores de las variables artificiales, de tal modo que la matriz inversa óptima del dual es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/50 & -1/50 \\ -1/50 & 1/25 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que ambas columnas coinciden con las columnas de Y_4 e Y_5 pero cambiadas de signo. Esto es muy útil porque, cuando pasamos de la óptima del primal a la óptima del dual no obtenemos las columnas de variables artificiales. En tal caso bastará con formar la matriz inversa óptima con los vectores de la slack pero cambiados de signo (haciéndolo se puede comprobar que se obtiene la misma matriz). Esto se hace porque generalmente las relaciones del dual son de ≥ pero, como vimos en el capítulo dedicado a dual, a veces hay que cambiar el signo de una inecuación a ≤ y la slack de esa relación se sumará y no será necesaria una artificial. En ese caso, la columna correspondiente a esa slack no se cambia de signo para formar la matriz inversa óptima.

En nuestro ejemplo, la transformación del vector A_6 sería:

$$\begin{pmatrix} 3/50 & -1/50 \\ -1/50 & 1/25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/50 \\ 3/50 \end{pmatrix}$$

Como b_6 es = 120, $z_6 - b_6 = 1/50 \times 100 + 3/50 \times 180 - 120 = -107{,}2$

Si hubiera dado positivo, nuestra tabla óptima habría dejado de ser tal, pues tendría que entrar esa variable a la base. Como vemos, el procedimiento es similar al a).

<u>NOTA</u>: Hay que tener cuidado si el funcional del primal tiene algún coeficiente negativo, entonces habrá que cambiar el sentido de la inecuación del dual correspondiente. Todos los coeficientes de dicha restricción cambian de signo. Hay que tenerlo en cuenta cuando se introduce una nueva columna en el dual, hay que cambiar en dicha columna el signo del coeficiente de esa fila (de la restricción).
Ejemplificando: si en nuestro problema el funcional fuera:

$z = 8\ X_1 - 5\ X_2$ el planteo dual sería:

$$20\ Y_1 + 10\ Y_2 + 5\ Y_3 \geq 8$$
$$10\ Y_1 + 30\ Y_2 + Y_3 \geq -5 \Rightarrow -10\ Y_1 - 30\ Y_2 - Y_3 \leq 5$$

Entonces el planteo con slacks es:

$$20\ Y_1 + 10\ Y_2 + 5\ Y_3 - Y_4 + \mu \geq 8$$
$$10\ Y_1 + 30\ Y_2 + Y_3 + Y_5 \leq 5$$

y si queremos introducir la restricción $3\ X_1 + 2\ X_2 \leq 120$ será

$$\begin{pmatrix} 3/50 & 1/50 \\ -1/50 & -1/25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/50 \\ 1/50 \end{pmatrix}$$

Como se aprecia, no hemos cambiado de signo la columna de la slack Y5 y sí hemos cambiado el 2 de signo porque dicha restricción, incorporada al planteo, sería:

$$20\ Y_1 + 10\ Y_2 + 5\ Y_3 + 3\ Y_6 \geq 8$$
$$10\ Y_1 + 30\ Y_2 + Y_3 + 2\ Y_6 \geq -5 \Rightarrow -10\ Y_1 - 30\ Y_2 - Y_3 - 2\ Y_6 \leq 5$$

¿Se comprende ahora el consejo de plantear siempre el dual inicial antes de pasar directamente de tabla óptima a tabla óptima?

Análisis paramétrico y de sensibilidad

Cuando desarrollamos modelos de programación lineal, si deseamos que reflejen la realidad, tendremos que prestar mucha atención a la tarea de recopilación de valores numéricos de modo tal que éstos sean confiables y exactos en lo que respecta a los coeficientes. Algunas veces sólo contamos con valores estimados o promediados de los coeficientes. Entonces es importante estudiar cómo se comporta un problema de programación lineal cuando se varían esos coeficientes, es decir, ¿para qué rangos de valores de los coeficientes continuará siendo óptima la solución? Aquí investigamos cambios en coeficientes de costo de la función objetivo (c_j) y de las constantes de las restricciones (b_i). Hay cambios que se suponen funciones lineales de un parámetro (programación lineal paramétrica) y otros cambios que hacen que la solución optimizante se vuelva no óptima (análisis de sensibilidad). A estos últimos les prestaremos especial atención en los puntos siguientes.

1. Variación de coeficientes de eficiencia.

   a. De variables que están en la base.

Supongamos que queremos saber hasta dónde puedo modificar el valor de C_1 sin que se modifique la solución actual. ¿Qué queremos decir con que "no se modifique"?. Obviamente que al estar X_1 en la base, el valor de Z = (Σ C_jX_j) se modificará, igual que los z_j-c_j = $(\sum_{i=base} c_i a_{ij} - c_j)$

Lo que no queremos que se modifique es la estructura (valor de las a_{ij} y b_i del paso), no queremos que esta tabla deje de ser óptima y haya que pasar a otra tabla. Lo que nos obligaría a pasar de tabla sería el hecho de que hubiera algún z_j-c_j menor que cero, por lo menos.

Para esto analicemos los z_j-c_j reemplazando en todos los casos el valor de c_1 por el símbolo "c_1".

$z_1-c_1 = c_1 \cdot 1 - c_1 = 0$
$z_2-c_2 = 5 \cdot 1 - 5 = 0$
$z_3-c_3 = 0{,}06 \cdot c_1 - 0{,}02 \cdot 5 - 0{,}28 \cdot 0 - 0 = 0{,}06 \cdot c_1 - 0{,}1$
$z_4-c_4 = -0{,}02 \cdot c_1 + 0.04 \cdot 5 + 0{,}06 \cdot 0 - 0 = 0{,}2 - 0{,}02 \cdot c_1$
$z_5-c_5 = 1 \cdot 0 - c_1 = 0$

Como todos tienen que ser mayores o iguales que cero:

$0{,}06\ c_1 - 0{,}1 \ \geq\ 0 \ \Rightarrow\ 0{,}06\ c_1 \ \geq\ 0{,}1 \ \Rightarrow\ c_1 \geq 5/3$
$0{,}2 - 0{,}02\ c_1 \ \geq\ 0 \ \Rightarrow\ 0{,}02\ c_1 \ \leq\ 0{,}2 \ \Rightarrow\ c_1 \leq 10$

lo que indica que mientras c_1 se mantenga entre 5/3 y 10, se mantendrá la estructura actual. Debemos señalar que lógicamente, el valor actual de c_1 (8) se encuentra en el intervalo, de lo contrario el cálculo estaría errado. Si colocamos 10 como valor de c_1 obtendremos un z_j-c_j = 0 (z_4-c_4) lo que significa soluciones alternativas. Haciendo entrar X_4 se modifica la tabla. Similar situación se produciría si c_1 = 5/3 pero con X_3.

A 5/3 se lo llama límite inferior de c_1 en esta tabla y a 10 límite superior. Si hubiera varios candidatos a límite inferior se elige el mayor de todos ellos, ya que si se eligiera al menor habría un z_j-c_j = 0 y, al menos otro menor que cero. En tanto, si hubiera varios candidatos a límite superior se elige el menor por la misma razón. Si obtuviéramos como límites $c_1 \leq 8$ y $c_1 \leq 10$ vemos que $c_1 \leq 8$ engloba a ambos. El razonamiento para límite inferior es igual.

b. <u>De variables que no están en la base.</u>

Es lógico que cuando cambia un c_j de una variable x_j que no está en la base no se altera el valor de z porque en él intervienen los c_i de las x_i de la base. Tampoco modifica entonces el valor de otro z_j-c_j que no sea el de esa misma variable.

Si queremos averiguar el límite superior (c_j + ^+c_j siendo c_j el valor actual y ^+c_j la variación positiva) y el límite inferior (c_j – ^-c_j) para que no se modifique la tabla, ese valor de z_j-c_j será el que tendrá que mantenerse mayor o igual que cero.

El valor de z_j no se modifica, entonces el nuevo z_j-c_j será:

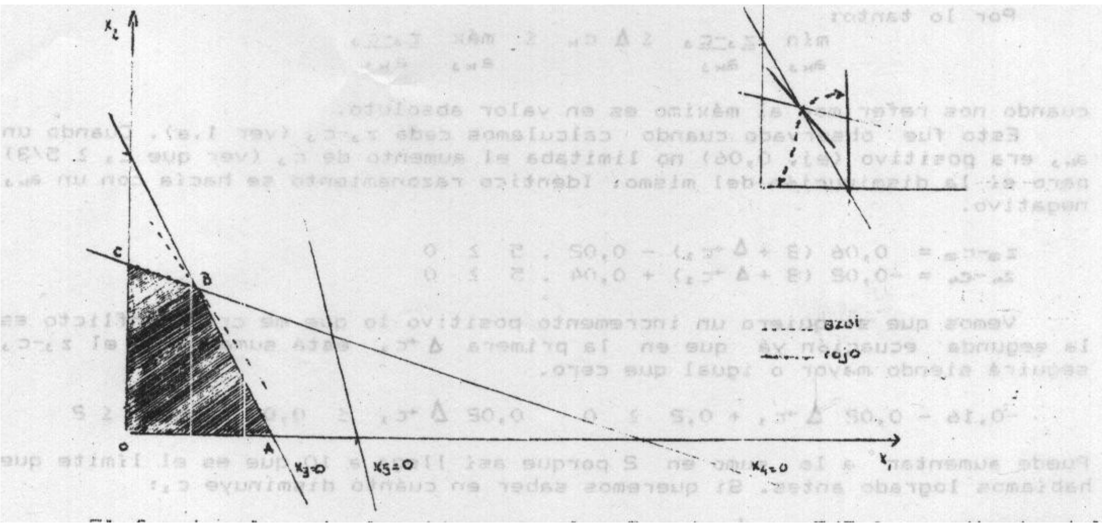
$z_j - (c_j + {}^+c_j) \geq 0 \quad z_j\text{-}c_j - {}^+c_j \geq 0 \qquad z_j\text{-}c_j \geq {}^+c_j$
$z_j - (c_j - {}^-c_j) \geq 0 \quad z_j\text{-}c_j + {}^-c_j \geq 0 \qquad z_j\text{-}c_j \geq -{}^-c_j$

Con respecto a esta última relación, como queremos que el indicador sea mayor o igual que cero será mayor que un número negativo como – ^-c_j. Entonces cuando más disminuya c_j ese z_j-c_j será mayor y positivo. (Por ejemplo, si ese c_j llegara a ser igual a -3 sería z_j – (– 3) = z_j + 3, entonces z_j-c_j nunca llega a ser negativo por esa vía). Si z_j-c_j no llega a ser negativo con disminuciones de c_j, ese límite no nos interesa, porque mientras el indicador siga siendo ≥ 0 no se modificará la solución óptima.

Vemos que el c_j tiene un solo límite, el superior porque al subir el c_j hará, en un momento que z_j-c_j sea igual a cero y entre esa variable en la base. Pero ¿cuánto puede aumentar c_j sin que se modifique la actual tabla óptima? Tiene que aumentar hasta que z_j-c_j sea cero, o sea, hasta que $c_j = z_j$.

Entonces, el límite superior de c_j de una variable que no está en la base es su z_j y el límite inferior no existe (-∞).

c. <u>Análisis gráfico.</u>



El funcional actual está en azul. Cuando $c_1 = 5/3$ la pendiente del funcional (rojo) ha variado tanto que el óptimo ahora es el segmento CB.

En cambio, cuando $c_1 = 10$ la pendiente del funcional coincide con el segmento AB ($X_3 = 0$). Aquí comprobamos que en los límites hay soluciones alternativas, como habíamos dicho. Podríamos continuar el análisis variando c_1 desde cero hasta infinito. Cuando c_1 vale cero, obtengo la horizontal (0A óptimo) y cuando vale infinito obtengo la vertical (A óptimo).

d. <u>Relación entre el signo de las a_{ij}, el objetivo del problema y la variación de c_j.</u>

Cuando cambia el c_j de una variable que no está en la base, uno de los límites no existe, de tal modo que analizaremos un cambio de c_j cuyo X_j esté en la base. A las X_j que están en la base las llamamos x_k. C_k es la variación del c_j correspondiente. Todos los z_j-c_j tienen que continuar siendo mayores o iguales que cero. Entonces:

$$\sum_{i = base} a_{ij} \,.\, C_i \;+\; a_{kj} \,.\, \Delta c_k - c_j \geq 0$$

ó

$$a_{kj} \,.\, \Delta c_k \geq -(Z_j - c_j)$$

cambio de signo ➔ $-a_{kj} \,.\, \Delta c_k \leq (Z_j - c_j)$

cuando $a_{kj} > 0$ $\qquad \Delta c_k \leq \dfrac{(Z_j - c_j)}{-a_{kj}}$

pero como quedaría con signo negativo, cambio el signo y el sentido:

$$c_k \geq \frac{(Z_j - c_j)}{a_{kj}}$$

cuando $a_{kj} < 0$

$$c_k \geq \frac{(Z_j - c_j)}{-a_{kj}}$$

pero como $a_{kj} < 0$, $- a_{kj}$ es positivo.

Por lo tanto:

$$\underset{a_{kj}}{\text{mín}} \frac{Z_j - c_j}{a_{kj}} \leq \Delta c_k \leq \underset{a_{kj}}{\text{máx}} \frac{Z_j - c_j}{a_{kj}}$$

cuando nos referimos al máximo es en valor absoluto.

Esto fue observado cuando calculamos cada z_j-c_j (ver 1.a). Cuando un a_{kj} era positivo (ej. 0,06) no limitaba el aumento de c_j (ver que $c_1 \geq 5/3$) pero sí la disminución del mismo. Idéntico razonamiento se hacía con un a_{kj} negativo.

$$z_3\text{-}c_3 = \;\; 0{,}06\,(8 + \Delta^+ c_1) - 0{,}02 \;.\; 5 \geq 0$$
$$z_4\text{-}c_4 = -0{,}02\,(8 + \Delta^+ c_1) + 0{,}04 \;.\; 5 \geq 0$$

Vemos que si quiero un incremento positivo lo que me crea conflicto es la segunda ecuación ya que en la primera $\Delta^+ c_1$ está sumando y el z_j-c_j seguirá siendo mayor o igual que cero.

$$-\,0{,}16 - 0{,}02\,\Delta^+ c_1 + 0{,}2 \geq 0 \qquad 0{,}02\,\Delta^+ c_1 \leq 0{,}04 \quad \Delta^+ c_1 \leq 2$$

Puede aumentar a lo sumo en 2 porque así llega a 10 que es el límite que habíamos logrado antes. Si queremos saber en cuánto disminuye c_1:

$$z_3\text{-}c_3 = \;\; 0{,}06\,(8 - \Delta^- c_1) - 0{,}02 \;.\; 5 \geq 0$$
$$z_4\text{-}c_4 = -0{,}02\,(8 - \Delta^- c_1) + 0{,}04 \;.\; 5 \geq 0$$

En la segunda ecuación, por compensación de signos $\Delta^- c_1$ queda sumando, así que la que restringe para que el indicador siga siendo mayor o igual que cero (es lógico, si antes limitaba una ecuación, ahora esa no debe limitar)

$$0{,}48 - 0{,}06\ \Delta^- c_1 - 0{,}1 \geq 0 \qquad 0{,}06\ \Delta^- c_1 \leq 0{,}38 \quad c_1 \leq 19/3$$

es decir que a lo sumo puede disminuir un 19/3 con lo que quedaría en 8 – 19/3 = 5/3, valor obtenido antes.
Usando el otro método, si hiciéramos $\frac{z_3 - c_3}{a_{13}} = \frac{0{,}38}{0{,}06} = 19/3$ obtenemos el mismo límite.

e. Determinación de curvas de oferta.

La curva de oferta expresa la variación de cada X_j en función del valor de su c_j. Cada tabla tiene un rango de validez. En nuestro caso, analizando para c_1, la validez de la tabla siguiente es para $5/3 \leq c_1 \leq 10$.

			8	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
8	X_1	2,4	1	0	0,06	-0,02	0
5	X_2	5,2	0	1	-0,02	0,04	0
0	X_5	22,8	0	0	-0,28	0,06	1
		45,2	0	0	0,38	0,04	0

cuando $c_1 \leq 5/3$ pasamos a la siguiente tabla:

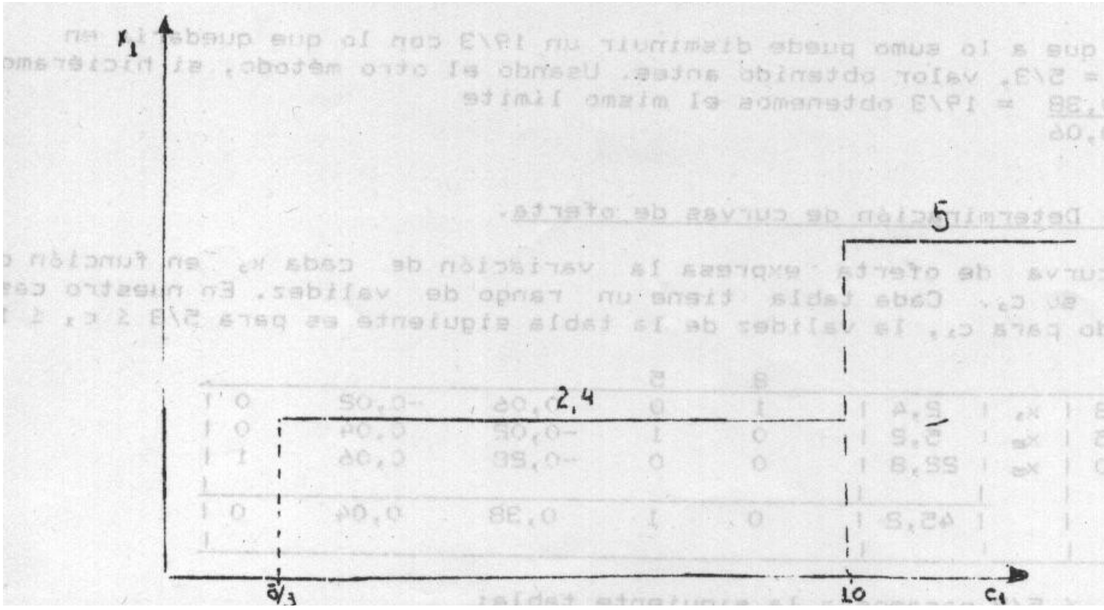
			5/3	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	X_3	40	50/3	0	1	-1/3	0
5	X_2	6	1/3	1	0	1/30	0
0	X_5	34	14/3	0	0	-1/30	1
		30	0	0	0	1/6	0

(los z_j-c_j y el funcional sólo son válidos para $c_1 = 5/3$). Aquí X_1 ya no está en la base, entonces esta tabla es válida para $-\infty < c_1 \leq 5/3$
Cuando $c_1 \geq 10$ pasamos a la siguiente tabla:

			10	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
10	X_1	5	1	0,5	0,05	0	0
0	X_4	130	0	25	-0,50	1	0
0	X_5	15	0	-1,5	-0,25	0	1
		50	0	0	0,5	0	0

En esta tabla $0{,}5\ c_1 - 5 \geq 0$ y $0{,}05\ c_1 \geq 0$ => $c_1 \geq 10$
Esta tabla es válida para $10 \leq c_1 < {}^{+}\infty$
Entonces para $5/3 \leq c_1 \leq 10$, X_1 vale 2,4; para $c_1 \leq 5/3$, X_1 vale 0 y para $c_1 \geq 10$, X_1 vale 5.

Graficando la curva de oferta de puertas tipo 1 entre 0 e ∞:



2. <u>Variación de las restricciones del problema.</u>

   a. <u>Valores marginales. Significado. Interpretación gráfica.</u>

El valor marginal se relaciona con los recursos y éstos se relacionan con el vector B. Para poder comparar, tenemos que fijar la unidad, así podremos saber el efecto que produce cambiar un recurso, en lo que hace a su disponibilidad. Analicemos la modificación que sufre el vector B cuando le agregamos una unidad al recurso 1.

$$B' = B + E_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ b_1 \\ . \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow i$$

Pero ya teníamos un valor de vector X óptimo (X). ¿Qué ocurre con ese óptimo ante esta modificación?
Sabíamos que:

$$A \; . \; X \; = \; B \; . X \; = \; A^{-1} \; . \; B$$
$$X \; = \; A^{-1} \; . \; (B + E_1) = A^{-1} \; . \; B + A^{-1} \; . \; E_1 \qquad X = X + X_1 \text{ que es} \geq 0$$

Veamos cómo varía el funcional:

$$Z' = C\,X' = C\,(X + X_i) = C\,X + C\,X_i = Z + C\,X_i = Z + Z_i$$

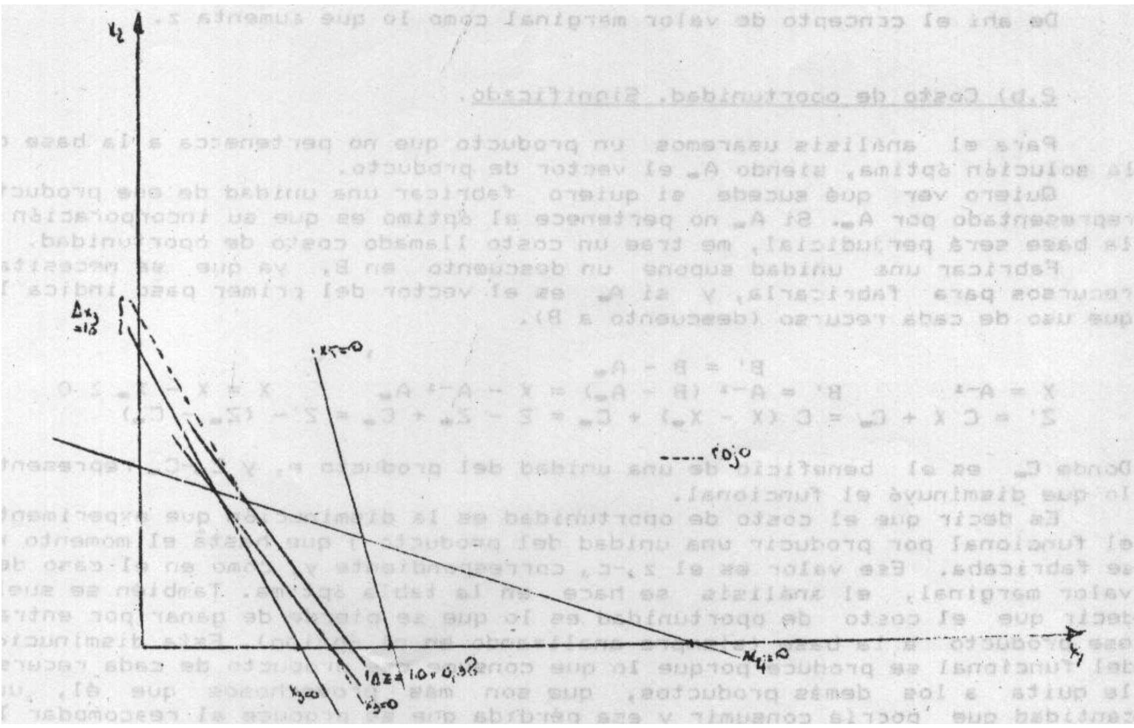
Siempre nos referimos a los elementos A, X, B, etc. de un mismo paso. Para todo C_i que corresponda a un vector que está en la base Z_i-C_i = 0 pero cuando no está en la solución no puede valer cero.

$$Z' = Z + (Z_i - C_i)$$

Puedo agregar C_i porque cuando se trata de un recurso, C_i vale cero.

Así, al valor z_i-c_i se lo llama valor marginal del recurso i y, por supuesto, es el z_j-c_j de la columna que representa a ese recurso. Valor marginal es el aumento que experimenta el funcional en función del aumento unitario que se produzca en la disponibilidad de un recurso. Este aumento del funcional se produce porque el valor marginal refleja el efecto que tiene sobre el funcional la mejor reubicación de otros recursos ante la variación de uno de ellos y la consiguiente variación en las variables producto.

Supongamos que contamos con 10 hh. más que las 100 que teníamos antes. Esto produce una modificación en el poliedro solución por corrimiento de uno de sus lados. Entonces cambia el óptimo (de B a B'). Si se calcula el funcional para el punto B' se verá que vale 49, es decir, ha aumentado en 0,38 (valor marginal de X_3) x 10 (Δ X_3).



Analíticamente ¿cómo veo el beneficio de 10 hh. más? El beneficio tengo que verlo en el nuevo vector X óptimo:

$$A\,X = B \qquad X = A^{-1}\,B \qquad X' = A^{-1}\,B$$

$$\underset{X}{X' - X} = A^{-1}\ \underset{B}{(B' - B)}$$

Determinemos entonces el nuevo delta X.

$$X = \begin{pmatrix} 0{,}06 & -0{,}02 & 0 \\ -0{,}02 & 0{,}04 & 0 \\ -0{,}28 & 0{,}06 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -0{,}2 \\ -2{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta X_2 \\ \Delta X_5 \end{pmatrix}$$

Coincide con el gráfico, aumenta X_1 y disminuyen X_2 y X_5.

Económicamente valorizo cada pérdida y cada ganancia:

0,6	x	8	4,8
–0,2	x	5	–1,0
–2,8	x	0	0
			3,8 que es lo que aumentó el funcional

Si hubiera aumentado sólo 1 hh. el vector delta X sería:

$$\begin{pmatrix} 0{,}06 \\ -0{,}02 \\ -0{,}28 \end{pmatrix}$$

y la valorización económica daría: $0{,}06 \ . \ 8 - 0{,}02 \ . \ 5 = z_3$
$z_3 - c_3 = 0{,}38 - 0 = 0{,}38$

De ahí el concepto de valor marginal como lo que aumenta z.

b. Costo de oportunidad. Significado.

Para el análisis usaremos un producto que no pertenezca a la base de la solución óptima, siendo A_e el vector de producto.

Quiero ver qué sucede si quiero fabricar una unidad de ese producto representado por A_e. Si A_e no pertenece al óptimo es que su incorporación a la base será perjudicial, me trae un costo llamado costo de oportunidad.

Fabricar una unidad supone un descuento en B, ya que se necesitan recursos para fabricarla, y si A_e es el vector del primer paso indica lo que uso de cada recurso (descuento a B).

$$B' = B - A_e$$
$$X = A^{-1} \qquad B' = A^{-1}(B - A_e) = X - A^{-1} A_e \qquad X = X - X_e \geq 0$$
$$Z' = C\,X + C_e \quad = C\,(X - X_e) + C_e = Z - Z_e + C_e = Z - (Z_e - C_e)$$

Donde C_e es el beneficio de una unidad del producto e, y $Z_e - C_e$ representa lo que disminuyó el funcional.

Es decir que el costo de oportunidad es la disminución que experimenta el funcional por producir una unidad del producto j que hasta el momento no se fabricaba. Ese valor es el z_j-c_j correspondiente y, como en el caso del valor marginal, el análisis se hace en la tabla óptima. También se suele decir que el costo de oportunidad es lo que se pierde de ganar por entrar ese producto a la base (siempre analizando en el óptimo). Esta disminución del funcional se produce porque lo que consume ese producto de cada recurso le quita a los demás productos, que son más provechosos que él, una cantidad que podría consumir y esa pérdida que se produce al reacomodar la fabricación es mayor que el beneficio utilitario del producto.

c. <u>Análisis de la relación entre saturación de recursos, valores marginales y variables slacks.</u>

¿Cuándo un recurso se encuentra saturado? Cuando no existe sobrante del mismo. Eso podemos verificarlo a través de la variable slack correspondiente. En nuestro ejemplo base:

X_3 = sobrante de horas hombre (hh/sem)
X_4 = sobrante de materia prima (kg/sem)
X_5 = sobrante de horas máquina (hmáq/sem)

Recordemos la tabla óptima:

			8	5	0	0	0
C	X	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
8	X_1	2,4	1	0	0,06	-0,02	0
5	X_2	5,2	0	1	-0,02	0,04	0
0	X_5	22,8	0	0	-0,28	0,06	1
		45,2	0	0	0,38	0,04	0

Como vemos, $X_3 = X_4 = 0$. Entonces, si las sobrantes de horas hombre y de materia prima son nulas, esos recursos están saturados. No están saturadas las hs. máq. de las cuales sobran 22,8. Recordemos que las disponibilidades iniciales eran de 100 hh, 180 kg y 40 hs. máq. por semana. Como habíamos analizado anteriormente, cuando un recurso tiene sobrante su slack en la base tiene valor mayor que cero y su z_j-c_j es igual a cero, es decir, su valor marginal es cero porque no me trae ningún beneficio conseguir más hs. máq. si actualmente me sobran. En cambio, en aquellos recursos saturados, el valor marginal es mayor que cero porque me resultaría beneficioso conseguir más de ese recurso. Pero el beneficio no es el mismo para todos los recursos. En este caso, el beneficio por tener una hh. más es mayor que el beneficio por tener un kg. más de materia prima. Eso depende de la cantidad de ese recurso que necesiten cada uno de los productos que están en la base óptima y en qué proporción se fabriquen. Debemos recordar que el valor marginal se calcula como z_j-c_j = c_i a_{ij} – c_j. El valor marginal es el valor de la y_i de ese recurso por lo cual esto se ve reflejado en el dual.

d. <u>Análisis de la relación entre la producción de un producto y el costo de oportunidad.</u>

Cuando un producto se encuentra en fabricación y, por lo tanto, la variable X_j que lo representa está en la base, entonces su z_j-c_j vale cero y su costo de oportunidad es nulo. Cuando en el paso óptimo una variable que representa a un producto no se encuentra en la base, entonces su costo de oportunidad es distinto de cero (por ser el paso óptimo debe ser mayor que cero). Ese producto no figura en la tabla óptima porque su fabricación no es conveniente. Por cada unidad que se fabrique de él habrá una pérdida igual a ese costo de oportunidad por las razones que se citaron en 2.b.

Esto se ve reflejado en la tabla dual. Sabemos que cuando una variable real figura en la base del directo su dual correspondiente no figura en la base del dual. Por el contrario, cuando un producto no se fabrica, su dual correspondiente (definida como costo de oportunidad de ese producto) está en la base del dual con un valor igual al z_j-c_j de ese producto. Se descuenta que a esta altura hemos convenido en que no hay ninguna variable en la base cuyo valor sea cero (salvo caso de degeneración).

e. Variación de restricciones de recursos no saturados. Cálculo de límites. Análisis gráfico.

En el caso de los recursos no saturados, si la variación es positiva, es decir, la disponibilidad aumenta, no se produce ninguna modificación en cuanto a la producción óptima, ni en el valor del funcional, simplemente que si antes sobraba, ahora sobra más.

Este análisis se hace justamente para saber cuáles son los recursos no saturados porque si el empresario nota que siempre le sobra un recurso comprará menos de él. Justamente, éste es el caso que interesa analizar para recursos no saturados: ¿hasta qué cantidad puedo disminuir la disponibilidad de un recurso no saturado sin que se modifique la solución? Si disminuimos hasta llegar a cero, por nombrar un extremo, no podremos producir nada, pero nos interesa saber cuál es el límite de disminución. Como la disponibilidad de cada recurso (b_1) es un coeficiente del funcional del dual y estamos analizando desde el punto de vista de los recursos, esto nos lleva a hacer nuestro análisis en el dual.

Recordemos la tabla óptima dual de nuestro problema

			100	180	40	0	0
B	Y	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
100	Y_1	0,38	1	0	0,28	-0,06	0,02
180	Y_2	0,04	0	1	-0,06	0,02	-0,04
		45,2	0	0	-22,8	-2,4	-5,2

Como vemos, Y_3 (valor marginal del recurso hs. máq.) es cero.

z_3-c_3 = –22,8 indica el valor de X_5 cambiado de signo (repasar correspondencia entre variables del primal y del dual) y nos revela que sobran 22,8 hrs. máq. Ahora bien, queremos disminuir la disponibilidad de hs. máq. (b_3) sin que cambie el óptimo. Para que la solución siga siendo válida, todos los z_i-c_i tienen que ser menores o iguales que cero. Entonces podemos calcularlo con un método similar al usado para calcular el límite en las variaciones de los c_j. Cuando cambia un b_i de una variable Y_i que no está en la base, sólo afecta a su propio z_i-b_i.

Reemplazando el valor de b_3 por el símbolo "b_3" calculo:

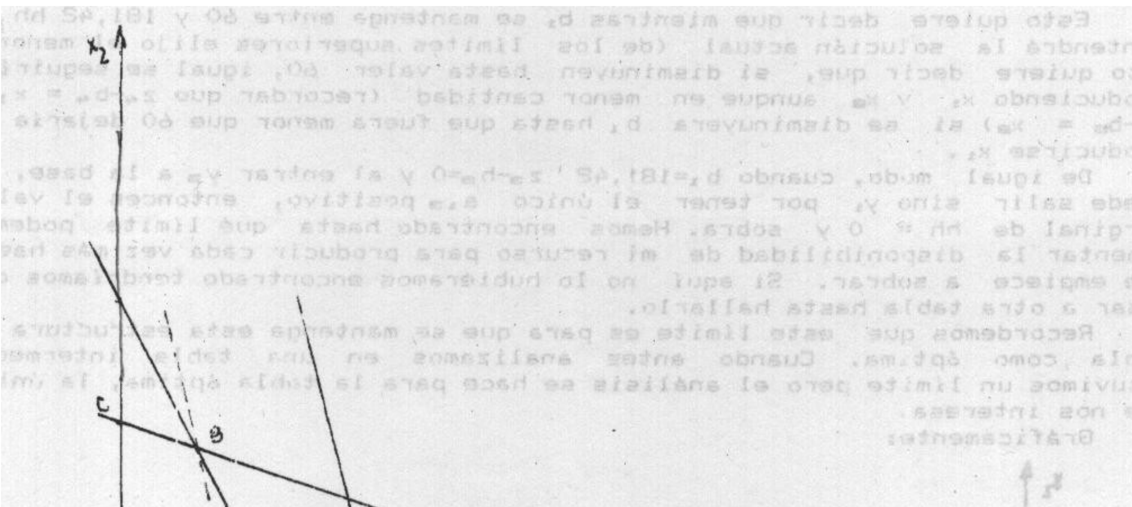
$$z_3 - b_3 = 100 \;.\; 0{,}28 - 180 \;.\; 0{,}06 - b_3 \leq 0 \qquad\qquad b_3 \leq 17{,}2$$

La disponibilidad de hs. máq. puede disminuir hasta ser igual a 17,2, por lo tanto puede disminuir hasta en 22,8 hrs. Justamente, como en el caso de los c_j, el límite inferior es el z_i-b_i correspondiente.

Analicemos el gráfico de la siguiente página.

En línea llena vemos la recta X_5=0 con la disponibilidad original de 40 hs. máq. Cuando la disponibilidad es de 17,2 (línea punteada) se achica el poliedro (OA'BC) pero el óptimo sigue siendo B porque la pendiente del funcional no ha cambiado. Aquí se ve claramente que cuando la disponibilidad es 17,2 la recta X_5=0 pasa por el punto B. Si la disponibilidad fuera inferior a 17,2 el punto B se desplazaría más a la izquierda y el funcional diminuiría.

Gráficamente:



f. <u>Variación de restricciones de recursos saturados. Cálculo de límites. Análisis gráfico.</u>

Cuando un recurso está saturado es que no tiene sobrante.

En oportunidad de analizar cada uno de los coeficientes de la tabla vimos que, si aumentábamos la disponibilidad de un recurso saturado, llegaba un momento en el que comenzaba a sobrar y el valor marginal pasaba a ser cero. Dijimos entonces que nos interesa averiguar cuánto podemos aumentar la disponibilidad como límite hasta que empiece a sobrar. Esta es la sección en la cual veremos la forma de averiguar cuál es ese límite. Pero no es sólo eso lo que nos interesa. Queremos saber, como en 2.e cuánto podemos aumentar la disponibilidad como máximo para que no cambie la estructura óptima. Para ello aplicaremos el mismo método que en 2.e, analizando en el dual pero, como sabemos, cuando cambia la b_i de una variable de la base cambian todos los z_i-b_i. Para que se mantengan las condiciones actuales, todos los z_i-b_i tienen que seguir siendo menores o iguales a cero.

Convengamos en averiguar cuánto podría aumentar la disponibilidad de hs. hombre sin que varíe la estructura óptima (claro que variaría el valor de z y los z_i-b_i pero no queremos que cambie la base, eso es la estructura). Para analizar reemplazaremos b_1 = 100 por el símbolo "b_1", calcularemos todos los z_i-b_i para extraer un valor límite.

$$z'_3 - b_3 = 0{,}28\ b_1 - 0{,}06\ 180 - 40 = 0{,}28\ b_1 - 50{,}8$$
$$z'_4 - b_4 = -0{,}06\ b_1 + 0{,}02\ 180 = 3{,}6 - 0{,}06\ b_1$$
$$z'_5 - b_5 = 0{,}02\ b_1 - 0{,}06\ 180 = 0{,}02\ b_1 - 7{,}2$$

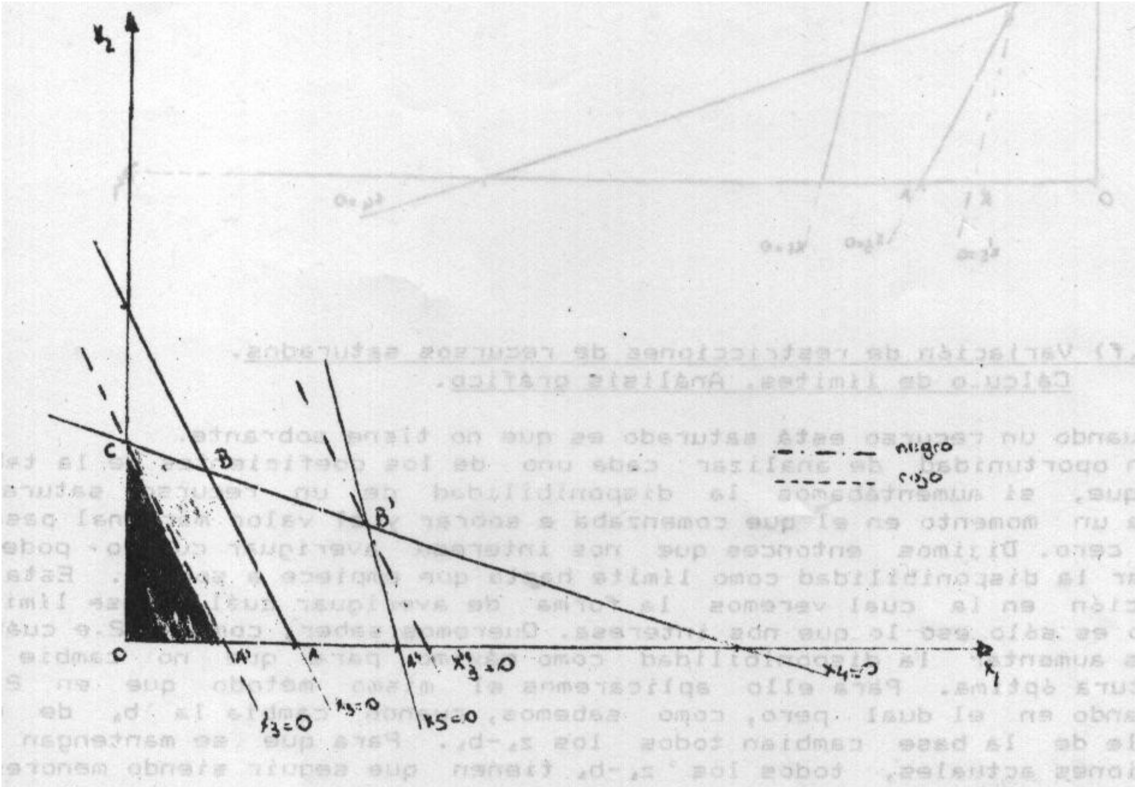
$$z'_3 - b_3 \Rightarrow 0{,}28\ b_1 - 50{,}8 \leq 0 \qquad b1 \leq 181{,}42$$
$$z'_4 - b_4 \Rightarrow 3{,}6 - 0{,}06\ b_1 \leq 0 \qquad b1 \geq 60$$
$$z'_5 - b_5 \Rightarrow 0{,}02\ b_1 - 7{,}2 \leq 0 \qquad b1 \leq 360$$

Esto quiere decir que mientras b_1 se mantenga entre 60 y 181,42 hh se mantendrá la solución actual (de los límites superiores elijo el menor). Esto quiere decir que, si disminuyen hasta valor 60, igual se seguirían produciendo X_1 y X_2 aunque en menor cantidad (recordar que z_4-b_4 = X_1 y z_5-b_5 = X_2) si se disminuyera b_1 hasta que fuera menor que 60 dejaría de producirse X_1.

De igual modo, cuando b_1 = 181,42 z_3-b_3 = 0 y al entrar Y_3 a la base, no puede salir sino Y_1 por tener el único a_{i3} positivo, entonces el valor marginal de hh = 0 y sobra. Hemos encontrado hasta qué límite podemos aumentar la disponibilidad de mi recurso para producir cada vez más hasta que empiece a sobrar. Si aquí no lo hubiéramos encontrado tendríamos que pasar a otra tabla hasta hallarlo.

Recordemos que este límite es para que se mantenga esta estructura de tabla como óptima. Cuando antes analizamos en una tabla intermedia obtuvimos un límite pero el análisis se hace para la tabla óptima, la única que nos interesa.

Gráficamente:



Cuando b_1=60 X_3=0 está dibujado en rojo y el poliedro OA'C, si b_1 es menor que 60 el óptimo es C. En este caso Y_1 no se produce, ya lo habíamos notado analíticamente. Cuando b_1=181,42 X_3=0 está dibujada en negro y el poliedro es OA''B'C. Cuando X_3=0 llega al límite de X_5=0 el óptimo es B'. Si sigue aumentando b_1 sobran horas hombre porque X_3=0 se desplaza tanto que ya no limita el poliedro tal como actualmente X_5=0 no estaba en el poliedro y sobraban hs. máq. Gráficamente se obtienen los mismos resultados que con el análisis. El óptimo se desplaza por la recta X_4=0. Cuando el óptimo llega a C, ya no puede desplazarse por esa recta porque ya es el límite y allí b_1=60. Cuando el óptimo llega a B' ya no puede desplazarse por esa recta porque se termina el poliedro. Entonces los puntos límite son aquellos en los cuales el óptimo deja de desplazarse por una recta y pasa a hacerlo por otra. Además, son puntos degenerados (ver C y B').

En los puntos de corte, analíticamente obtuvimos soluciones alternativas (cuando un z_i-b_i=0 cuyo Y_i no está en la base). En el gráfico, cuando b_1=60, C es un punto degenerado, igual que B' cuando b_1=181,42. Esto demuestra la veracidad de lo que afirmamos cuando hablamos de dualidad en programación lineal: "cuando uno de los problemas es degenerado, el otro tiene soluciones alternativas". Justamente, los valores límite indican un corte en el desplazamiento del óptimo, producido por la degeneración.

g. Relación entre el signo de los a_{ij}, el objetivo del problema, el sentido de la variación de las b_i estudiadas y el signo de b_i.

Sabemos que un cambio en una b_i debe ser de magnitud tal que conserve la estructura de la solución. Para que una solución óptima se mantenga, todos los z_i-b_i del dual tienen que ser menores o iguales que cero. Sabemos que los z_i-b_i representan el valor de una variable X_i.

$z_i - b_i \leq 0 \qquad \forall i$

Llamaremos a'_{ij} a los elementos de la tabla dual para diferenciarlos de los a_{ij} del directo que son distintos.

$$\sum_{j=base} a_{jk}\ b_j + a'_{li}\ \Delta b_l - b_l \leq 0$$

Para todo j en la base y donde a'_{li} es el elemento de la l-ésima fila y la i-ésima columna de la tabla del dual óptima (pertenece a la matriz inversa óptima del dual).

Entonces: $z_i - b_i + a'_{li}\ \Delta b_l \leq 0$

$$a'_{li}\ \Delta b_l \leq -(z_i - b_i) \qquad a'_{li}\ \Delta b_l \leq -x_i$$

Para $a'_{li} > 0$ tenemos: $\Delta b_l \leq \dfrac{-x_i}{a'_{li}}$ pero como $-x_i$ es mayor que cero queda positivo.

Para $a'_{li} < 0$ tenemos: $\Delta b_1 \leq \dfrac{-x_i}{a'_{li}}$ y como a_{li} es negativo cambio el sentido: $\Delta b_1 \geq \dfrac{-x_i}{-a'_{li}}$

Entonces:

$$\min_{-a'_{li} < 0} \frac{-x_i}{-a'_{li}} \leq \Delta b_1 \leq \max_{-a'_{li} > 0} \frac{-x_i}{-a'_{li}}$$

Esto ya fue observado cuando calculamos la variación de b_i. Cuando el a'_{li} era positivo (0,28; 0,02) sólo afectaba el límite superior (el mayor de ellos). Con 0,28, en este caso el mayor, encontramos la máxima variación positiva o límite superior:

$$\Delta b^+_1 = \frac{22,8}{0,28} = 81,42$$

Con lo cual el nuevo b_1 será $b'_1 = 100 + 81{,}42 = 181{,}42$.

Cuando queremos analizar una variación positiva o incremento de b_1, que actualmente vale 100, planteamos:

$z'_3-b_3 = 0{,}28\,(100 + \Delta b^+_1) - 0{,}06\;180 - 40 \leq 0 \qquad 0{,}28\,\Delta b^+_1 - 22{,}8 \leq 0$

$z'_4-b_4 = -0{,}06\,(100 + \Delta b^+_1) + 0{,}02\;180 \leq 0 \qquad -0{,}06\,\Delta b^+_1 - 2{,}4 \leq 0$

$z'_5-b_5 = 0{,}02\,(100 + \Delta b^+_1) - 0{,}04\;180 \leq 0 \qquad 0{,}02\,\Delta b^+_1 - 5{,}2 \leq 0$

Vemos que en la segunda ecuación, como Δb^+_1 tiene signo negativo, cuanto más aumente, más negativo se hará ese z'_i-b_i, entonces no me sirve como límite. En la primera ecuación $\Delta b^+_1 \leq 81{,}42$ y en la tercera $\Delta b^+_1 \leq 260$. Tomo el menor y me queda el mismo límite obtenido anteriormente (81,42).

En cambio si quiero analizar una variación negativa o decremento:

$z'_3-b_3 = 0{,}28\,(100 - \Delta b^-_1) - 0{,}06\;180 - 40 \leq 0 \qquad -0{,}28\,\Delta b^-_1 - 22{,}8 \leq 0$

$z'_4-b_4 = -0{,}06\,(100 - \Delta b^-_1) + 0{,}02\;180 \leq 0 \qquad 0{,}06\,\Delta b^-_1 - 2{,}4 \leq 0$

$z'_5-b_5 = 0{,}02\,(100 - \Delta b^-_1) - 0{,}04\;180 \leq 0 \qquad -0{,}02\,\Delta b^-_1 - 5{,}2 \leq 0$

Aquí, como en la segunda ecuación Δb^-_1 tiene signo positivo, hay peligro de que aumente tanto que ese indicador deje de ser menor o igual a cero, entonces es el único que limita $\Delta b^-_1 \leq 40$. A lo sumo puede decrecer en 40, con lo cual b_1 sería igual a 60, límite que ya habíamos hallado.

h. <u>Variación de una restricción b_j de cero a infinito. Análisis analítico y gráfico de la variación de: funcional – Valor marginal de la restricción que varía – Uso de las otras restricciones – Valor marginal de las otras restricciones – Valor de las variables del problema directo.</u>

Veremos la variación de b_1 de cero a infinito.

Mientras $60 \leq b_1 \leq 181{,}42$ vale la tabla original, en la que adjuntamos los z_i-b_i en los límites.

			100	180	40	0	0
B	Y	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
100	Y_1	0,38	1	0	0,28	-0,06	0,02
180	Y_2	0,04	0	1	-0,06	0,02	-0,04
B_1 = 100		45,2	0	0	-22,8	-2,4	-5,2
B_1 = 60		30	0	0	-34	0	-6
B_1 = 181,42		76,14	0	0	0	-7,28	-3,57

Veamos ahora la tabla válida para $b_1 \leq 60$.

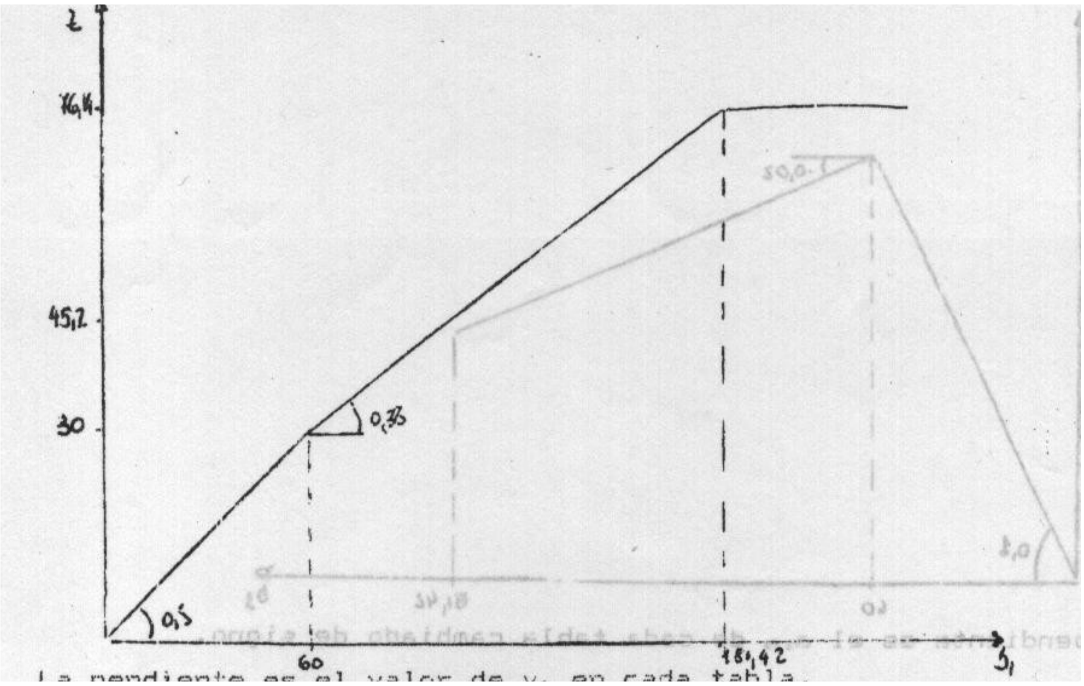
			60	180	40	0	0
B	Y	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
60	Y_1	0,5	1	3	0,1	0	-0,1
0	Y_4	2	0	50	-3	1	-2
		30	0	0	-34	0	-6

Y la siguiente vale para $b_1 \geq 181{,}42$, porque y_1 ya salió de la base:

			181,42	180	40	0	0
B	Y	C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
40	Y_3	19/14	25/7	0	1	-3/14	1/14
180	Y_2	17/140	3/14	1	0	1/140	-1/28
		76,14	0	0	0	-7,28	-3,57

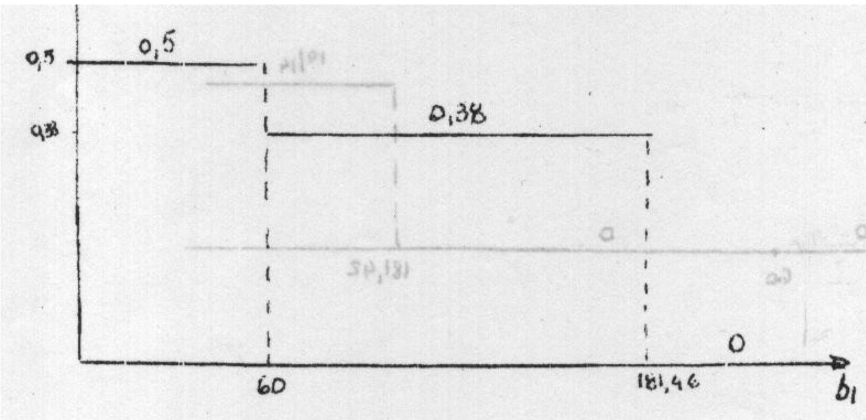
Analicemos algunas variaciones en función de b_1.

<u>Variación del funcional.</u>

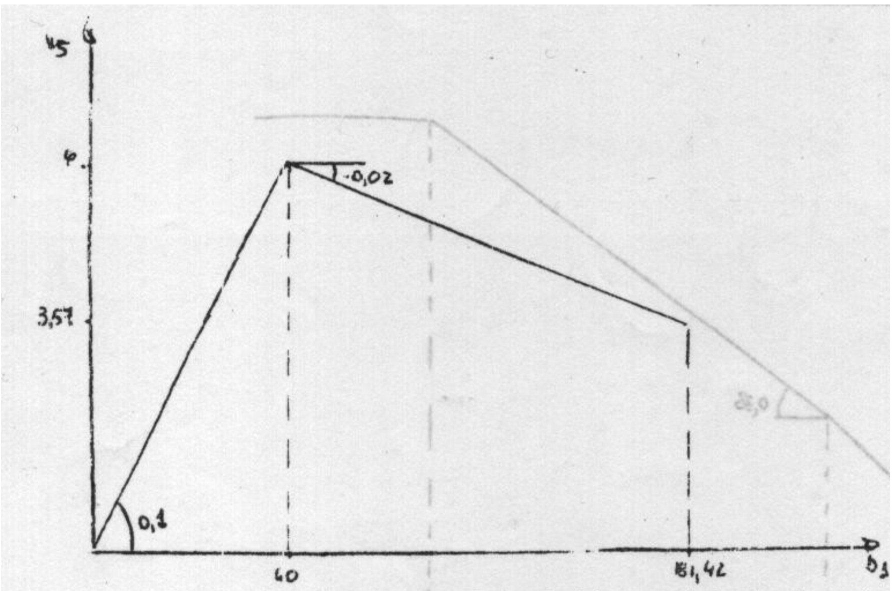


La pendiente es el valor de Y_1 en cada tabla.

Valor marginal de horas hombre.

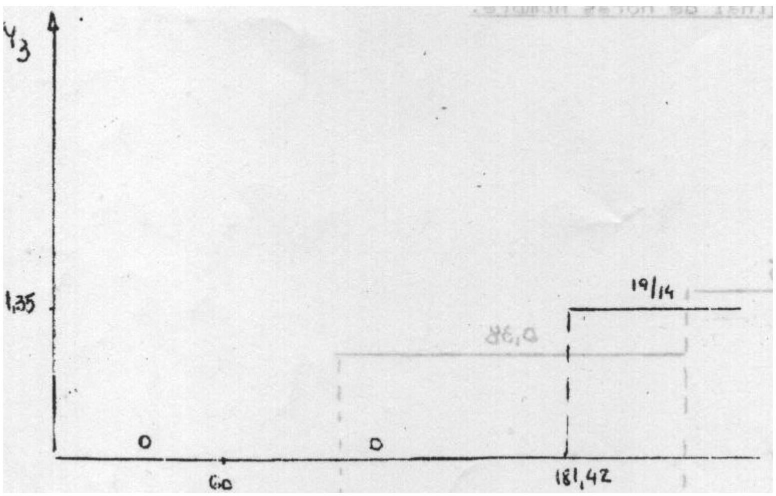


Uso de hs. máquina.

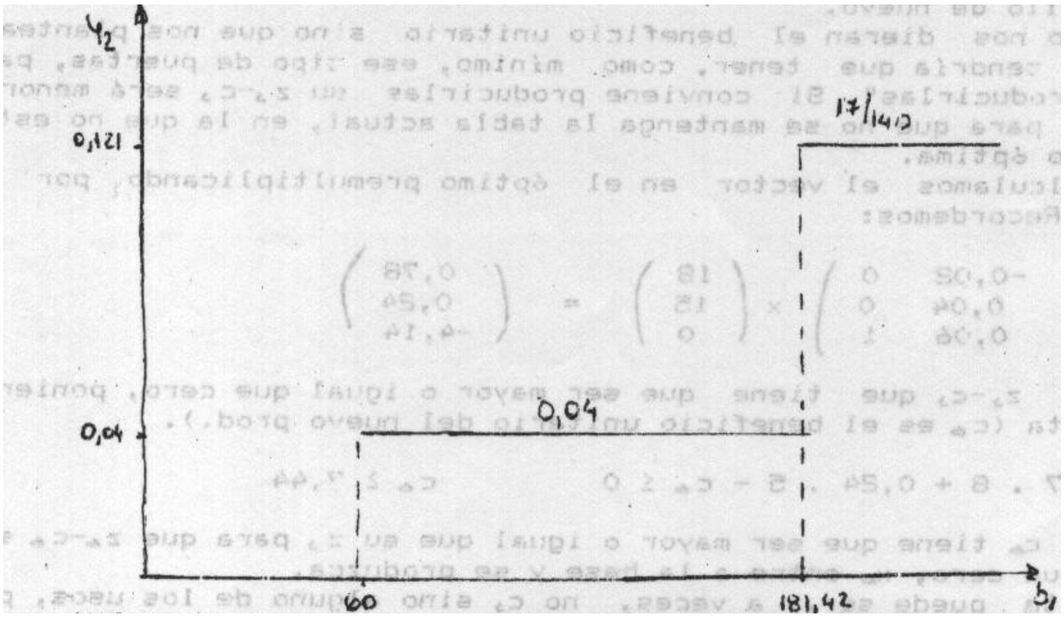


La pendiente es el a_{i5} de cada tabla cambiado de signo.

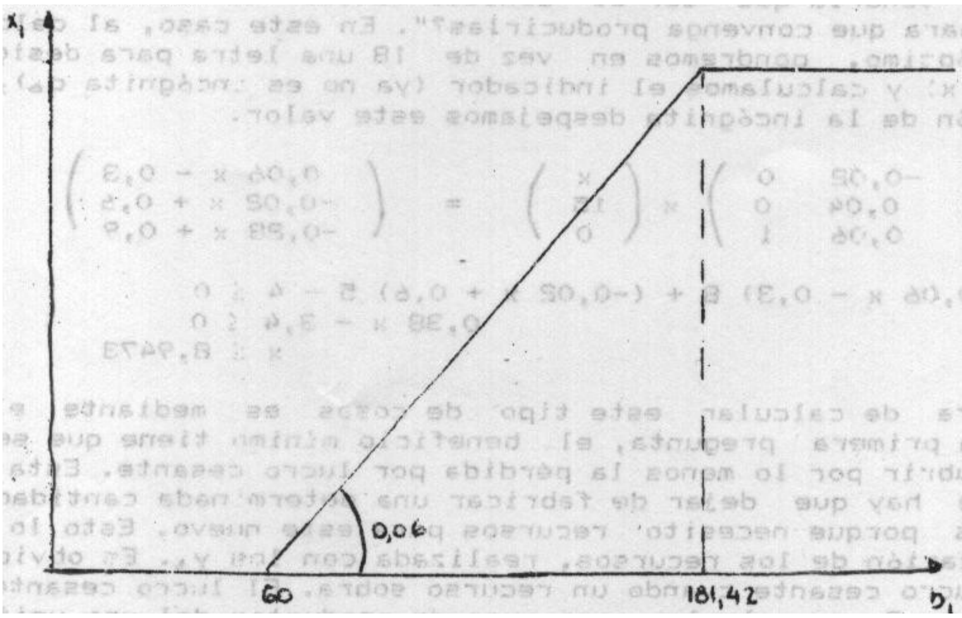
Valor marginal de horas máquina.



Valor marginal de materia prima.



Valor de x_1.



La pendiente es el a_{i4} de cada tabla cambiado de signo. Es el a_{i4} porque el subíndice i es el coeficiente que varía (b_i) y el subíndice j es el de la columna de, en este caso X_1, lo que quiero representar. Como X_1 se corresponde con Y_4 j = 4.

3. Modificación de las dimensiones del problema.

a. Introducción de nuevos productos. Determinación del beneficio límite para fabricar el nuevo producto.

Cuando habíamos hablado de modificaciones en el problema original, en el capítulo anterior tocamos el caso de agregado de incógnitas en el cual agregábamos un nuevo tipo de puerta (ver el punto "a", agregado de incógnitas en modificaciones en el problema original). Así, averiguamos que con un beneficio unitario de 4$ no se modificaba nuestro óptimo, ya que con el método de la matriz inversa óptima conseguimos dilucidarlo sin hacer todo el desarrollo de nuevo.

Pero si no nos dieran el beneficio unitario sino que nos plantean: "qué beneficio tendría que tener, como mínimo, ese tipo de puertas, para que convenga producirlas". Si conviene producirlas su z_j-c_j será menor o igual que cero, para que no se mantenga la tabla actual, en la que no están en la base, como óptima.

Primero calculamos el vector en el óptimo premultiplicando por la matriz óptima. Recordemos:

$$\begin{pmatrix} 0{,}06 & -0{,}02 & 0 \\ -0{,}02 & 0{,}04 & 0 \\ -0{,}28 & 0{,}06 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}78 \\ 0{,}24 \\ -4{,}14 \end{pmatrix}$$

Calculo el z_j-c_j que tiene que ser mayor o igual que cero, poniendo c_6 como incógnita (c_6 es el beneficio unitario del nuevo producto).

$$z_6 - c_6 = 0{,}7\ .\ 8 + 0{,}24\ .\ 5 - c_6 \leq 0 \qquad\qquad c_6 \geq 7{,}44 \quad \text{(a)}$$

Es lógico, c_6 tiene que ser mayor o igual que su z_j para que z_6-c_6 sea menor o igual que cero, X_6 entre a la base y se produzca.

La incógnita puede ser, a veces, no c_j sino alguno de los usos, por ejemplo,"¿cuál tendría que ser el consumo máximo de horas hombre de cada puerta tipo 3 para que convenga producirlas?". En este caso, al calcular el vector en el óptimo, pondremos en vez de 18 una letra para designar una incógnita (ej: x) y calculamos el indicador (ya no es incógnita c_6), y como queda en función de la incógnita despejamos este valor.

$$\begin{pmatrix} 0{,}06 & -0{,}02 & 0 \\ -0{,}02 & 0{,}04 & 0 \\ -0{,}28 & 0{,}06 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}06\,x - 0{,}3 \\ -0{,}02\,x + 0{,}6 \\ -0{,}28\,x + 0{,}9 \end{pmatrix}$$

$$z_6\text{-}c_6 = (0{,}06\ x - 0{,}3)\ 8 + (-0{,}02\ x + 0{,}6)\ 5 - 4 \ \leq\ 0$$
$$0{,}38\ x - 3{,}4 \ \leq\ 0$$
$$x \ \leq\ 8{,}9473$$

Otra manera de calcular este tipo de cosas es mediante el lucro cesante. En la primera pregunta, el beneficio mínimo tiene que ser aquel que permita cubrir por lo menos la pérdida por lucro cesante. Esta pérdida se basa en que hay que dejar de fabricar una determinada cantidad de los otros productos porque necesito recursos para este nuevo. Esto lo calculo con la valorización de los recursos, realizada con los Y_i. Es obvio que no habrá ningún lucro cesante cuando un recurso sobra. El lucro cesante de una unidad de puerta 3 se calcula como suma de productos del uso unitario de cada recurso, por el Y_i correspondiente a ese recurso. c_6 tiene que ser por lo menos igual (o mayor) al lucro cesante.

$$c_6 \ \geq\ 18\ Y_1 + 15\ Y_2 + 0\ Y_3$$
$$c_6 \ \geq\ 18\ \ 0{,}38 + 15\ \ 0{,}04$$
$$c_6 \ \geq\ 7{,}44$$

Como observamos, el resultado es idéntico al obtenido por el otro método en (a).

En la segunda pregunta, el consumo tiene que ser el máximo como para que el z_6-c_6 sea igual a cero o menor:

$$x\ Y_1 + 15\ Y_2 + 0\ Y_3 - c_6 \ \leq\ 0$$
$$x\ 0{,}38 + 15\ 0{,}04 - 4 \ \leq\ 0$$
$$x\ 0{,}38 \ \leq\ 3{,}4$$
$$x \ \leq\ 8{,}9473$$

Se puede usar cualquiera de los dos métodos (o los dos para cotejar) con tal que se entienda lo que se está haciendo y se lleguen a resultados correctos.

b. <u>Introducción de nuevas restricciones. Determinación de la capacidad límite de la nueva restricción para que no altere la solución del problema.</u>

Al estudiar modificaciones al problema original vimos el caso de agregado de inecuaciones, lo cual no es otra cosa que agregar nuevas restricciones al problema. Para refrescar los conceptos se puede recurrir al punto "d. Agregado de inecuaciones" del capítulo anterior, de modo que no conviene reiterar por qué analizamos en el dual. Volviendo al ejemplo que habíamos dado en aquella oportunidad, hablábamos de un nuevo procedimiento de barnizado (nuevo proceso). Cada puerta tipo 1 necesita 3 litros de pintura y cada puerta tipo 2 necesita 2 litros, habiendo 120 litros de pintura barniz disponible por semana.

Habíamos visto que con esa disponibilidad el z_i-b_i seguía siendo negativo en el dual y no altera la solución. Pero si nos plantean "¿cuál sería la disponibilidad mínima de barniz para que no se modifique la solución óptima?".

En este caso calculamos el vector en la tabla óptima del dual. Recordemos cómo lo hacíamos:

$$\begin{pmatrix} 3/50 & -1/50 \\ -1/50 & 1/25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/50 \\ 3/50 \end{pmatrix}$$

$$z'_6 - b_6 = 1/50 \ \ 100 + 3/50 \ \ 180 - b_6 \leq 0 \qquad\qquad b_6 \geq 64/5$$

Para que no se modifique la solución no se tiene que saturar este recurso. El límite es que alcance justo pero no nos conviene que se sature porque cambia la producción y se pasa a un nuevo óptimo en el dual, por lo que el z será menor que el actual.

De igual modo, podemos calcular el consumo máximo de barniz que puede hacer cada puerta de tipo 1 para que no se altere la solución.

$$\begin{pmatrix} 3/50 & -1/50 \\ -1/50 & 1/25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/50\,x - 1/25 \\ -1/50\,x + 2/25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_6 - b_6 = (3/50\,x - 1/25)\,100 + (-\,1/50\,x + 2/25)\,180 - 120 &\leq 0 \\ 12/5\,x - 548/5 &\leq 0 \\ x &\leq 137/3 \end{aligned}$$