

3. Resolución exacta de problemas de Programación Lineal Entera

Temario

- 1- Cortes Gomory
- 2- Cortes Cover para el problema Knapsack (mochila)
- 3- Cortes para el problema de coloreo de grafos
- 4- Complejidad

Problemas a resolver

8.1.

Una formulación posible para el problema de coloreo de grafos es la siguiente:

$$\text{Minimizar } \sum_{k=1}^n w_k$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_{ik} &= 1 & \forall i \in V \\ x_{ik} + x_{jk} &\leq w_k & \forall (i,j) \in E \\ & & \forall k = 1, \dots, n \\ x_{ik}, w_k &\in \{0, 1\} & \forall i \in V \\ & & \forall k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Una familia de cortes válidos para el problema son los cortes “clique”. El corte para todas las cliques y todos los colores tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in C} x_{ik} &\leq w_k & \forall C \in \text{Cliques del grafo} \\ & & \forall k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- Demostrar que la relajación lineal de la formulación es igual a 2 para todo grafo
- Explicar la restricción clique de forma coloquial
- Demostrar que si a la formulación se le agregan todos los cortes clique la relajación lineal es igual al tamaño de la mayor clique del grafo
- Indicar qué problemas prácticos tiene incorporar todos los cortes clique y cómo los implementaría

8.2.

Dada la siguiente restricción de un problema de la mochila con un funcional de maximización:

$$15x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 \leq 20$$

- Encontrar 4 cortes cover minimales (son cortes cover minimales aquellos que al quitar cualquier elemento dejan de ser un corte)
- Extender los cortes encontrados
- Tomar alguno de los cortes extendidos y “liftearlo”.

8.3.

Dado el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } 2x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 22$$

x_1, x_2 enteras

- a - Encontrar la dimensión del recinto
- b - Explicar por qué $x_1 + x_2 \leq 100$ es una desigualdad válida
- c - Demostrar que $x_1 \leq 11$ es una cara
- d - Demostrar que $x_1 + x_2 \leq 22$ es una faceta
- e - Resolver mediante cortes Gomory, indicar si los cortes encontrados son caras o facetas

8.4.

Se resuelve un problema de programación entera mediante cortes Gomory, indicar cuál o cuáles de las siguientes características del último corte encontrado podrían ser verdaderas. Justifique:

- a - Es una desigualdad inválida
- b - Es una desigualdad válida que no es una cara
- c - Es una cara que no es una faceta
- d - Es una faceta

8.5.

Se propone resolver el problema de coloreo de grafos agregando todos los cortes agujero a la formulación, indique DOS problemas de este enfoque.

8.6.

Sabiendo que el problema de determinar si un grafo tiene al menos una clique de tamaño K es NP-Complete demuestre que el problema de determinar si un grafo tiene al menos un conjunto independiente de tamaño K es NP-Complete.

Nota: la demostración tiene dos partes, que es NP-Hard por un lado y que es NP por otro.