

Tesis de Grado de Ingeniería Civil

ESTUDIO DE LOCALIZACIÓN EN FUNCIONES DE  
FLUENCIA  $J_3$

**Autor:**

José G. Hasbani

**Director:**

Dr. Ing. Alejo O. Sfriso

Tesis de Grado de Ingeniería Civil

**ESTUDIO DE LOCALIZACIÓN EN FUNCIONES DE  
FLUENCIA  $J_3$**

**Autor:**

José G. Hasbani

**Director:**

Dr. Ing. Alejo O. Sfriso

Firma del autor:

Firma del director:

Aceptada por:

Fecha de entrega:

*Dedico este trabajo a mi padre, quién siempre soñó con verme graduado y hoy no puede cumplir ese sueño, a mi madre por el constante apoyo y por soportar mis reiteradas ausencias y en tercer lugar, a mis abuelos, a los cuales considero y quiero como si fueran mis padres. Espero que todo el apoyo que siempre me brindaron se vea reflejado en estas líneas.*

J. G. Hasbani

# Agradecimientos

Para realizar el presente trabajo, conté con la ayuda de muchas personas, mi gratitud hacia ellos va más allá de lo que pueda expresar en las siguientes líneas. Quiero brindarle mis más profundos agradecimientos a mi director de Tesis, el Dr. Alejo O. Sfriso, quién me introdujo en la Mecánica Computacional, me enseñó a investigar y a no perder el entusiasmo durante todo el proceso de aprendizaje. No podría haber abordado este trabajo sin las enseñanzas de la Dra. Marcela Goldshmit y del Dr. Eduardo Dvorkin quienes me han formado e inspirado a lo largo de los cursos de Mecánica Computacional que he tomado durante los últimos años de mi formación académica. A mis amigos y compañeros, Pablo Barbieri, Alfredo Scotti Vidal, Pablo Alvarez Ruffa y Guillermo Petracca por darme siempre apoyo y coraje en aquellos momentos en los que quise bajar los brazos. A mi familia, mi madre, abuelos y hermanos, a quienes dedico este trabajo; para ustedes no existen palabras de agradecimiento suficientes por todo lo que me brindaron y me brindan día a día y a lo largo de mi vida. Al Ing. Roberto Carretero y a la Comisión Curricular de Ingeniería Civil por permitirme realizar este trabajo y tomar los cursos correspondientes para poder llevarlo a cabo. A mis ex-compañeros del Laboratorio de Mecánica de Suelos y amigos Ing. Gastón Quaglia e Ing. Osvaldo Nicolás Ledesma por haberme aconsejado y guiado en los primeros pasos que di como tesista. A los tesisistas del Laboratorio de Mecánica de Suelos: Cecilia Canedo, Guillaume Chastel, Ignacio Ezama, Iñaki García Mendive, Ignacio Vernengo Lezica y Federico Paz Walther por haberme brindado las fotos de sus ensayos triaxiales. A la Ing. Marianela Ripani, quién ha sido mi compañera en varios de los cursos de Mecánica Computacional y con quién he discutido y analizado todo el Capítulo correspondiente a Plasticidad asociada. Quiero agradecerle especialmente a mi novia Daiana por su comprensión incondicional, apoyo y amor; ella ha sido mi sostén y compañera durante gran parte del camino que me ha llevado a escribir este trabajo y me enseñó a disfrutar cada momento de mi carrera.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Objeto de esta tesis . . . . .	8
1.2. Organización y presentación . . . . .	9
1.3. Notación . . . . .	9
<b>2. Propiedades mecánicas de las arenas</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.2. Escalas de observación . . . . .	12
2.3. Caracterización macroscópica de los materiales friccionales . . . . .	12
2.3.1. Parámetros de descripción del empaquetamiento . . . . .	12
2.4. Resistencia . . . . .	13
2.4.1. Resistencia en los materiales friccionales . . . . .	13
2.4.2. Componentes de la resistencia al corte . . . . .	14
2.4.3. Dilatancia . . . . .	17
2.4.4. Estado Crítico . . . . .	18
2.4.5. Ángulo de fricción interna . . . . .	20
<b>3. Elasticidad dependiente de la presión</b>	<b>23</b>
3.1. Modelos elásticos en la Geotécnia . . . . .	23
3.1.1. Modelo elástico lineal (Ley de Hooke generalizada) . . . . .	23
3.1.2. Modelos elásticos de Cauchy . . . . .	25
3.1.3. Modelos hiperelásticos . . . . .	26
3.1.4. Modelos hipoelásticos . . . . .	29
3.2. Hiperelásticidad dependiente de la presión . . . . .	29
3.2.1. Función de energía complementaria de deformación . . . . .	29
3.2.2. Tensor de elástico de cuarto orden . . . . .	30
3.3. Formulación numérica . . . . .	31
3.3.1. Algoritmo de actualización hiperelástica . . . . .	31
3.3.2. Análisis del error . . . . .	32
3.3.3. Consideraciones sobre la implementación numérica del modelo . . . . .	33
3.3.4. Implementación del método de la bisección . . . . .	34

<b>4. Elastoplasticidad asociada</b>	<b>37</b>
4.1. Introducción . . . . .	37
4.2. Plasticidad asociada para un problema unidimensional . . . . .	38
4.2.1. Generalidades . . . . .	38
4.2.2. Formulación continua para elastoplasticidad . . . . .	38
4.2.3. Multiplicador plástico consistente. . . . .	44
4.2.4. Módulo elastoplástico tangente . . . . .	45
4.2.5. Formulación numérica para elastoplasticidad . . . . .	46
4.2.6. Algoritmo de retorno. Endurecimiento combinado . . . . .	48
4.2.7. Algoritmo de Retorno . . . . .	51
4.2.8. Módulo algorítmico elastoplástico tangente. . . . .	51
4.2.9. Comportamiento del Algoritmo de Retorno . . . . .	53
4.2.10. Comentarios . . . . .	54
4.3. Modelo constitutivo elastoplástico tridimensional . . . . .	55
4.3.1. Generalidades . . . . .	55
4.3.2. Formulación continua general para elastoplasticidad . . . . .	56
4.3.3. Interpretación de las condiciones complementarias de Khun-Tucker . . . . .	65
4.3.4. Multiplicador plástico consistente. . . . .	65
4.3.5. Operador elastoplástico tangente . . . . .	67
4.4. Formulación numérica para elastoplasticidad asociada . . . . .	68
4.4.1. Plasticidad Perfecta . . . . .	68
4.4.2. Plasticidad con endurecimiento combinado . . . . .	73
4.4.3. Plasticidad con endurecimiento cinemático e isotrópico hiperbólico . . . . .	79
4.5. Interpretación geométrica del Algoritmo de Retorno Radial . . . . .	83
<b>5. Plasticidad aplicada a materiales friccionales</b>	<b>85</b>
5.1. Introducción . . . . .	85
5.2. Funciones de fluencia para materiales friccionales . . . . .	86
5.3. Función de fluencia de Matsuoka-Nakai . . . . .	88
5.4. Estructura matemática del modelo . . . . .	91
5.4.1. Cinemática . . . . .	91
5.4.2. Variables de estado . . . . .	92
5.4.3. Relación tensión deformación . . . . .	92
5.4.4. Función de fluencia . . . . .	92
5.4.5. Regla de flujo. . . . .	92
5.4.6. Variable interna plástica . . . . .	93
5.4.7. Condiciones de carga y descarga. . . . .	94
5.5. Formulación para plasticidad perfecta . . . . .	94
5.5.1. Multiplicador plástico consistente . . . . .	94

5.5.2.	Operador elastoplástico tangente . . . . .	95
5.5.3.	Formulación numérica . . . . .	95
5.5.4.	Problemas numéricos asociados a la función de Matsuoka-Nakai . . . . .	97
5.5.5.	Multiplicador plástico algorítmico . . . . .	101
5.5.6.	Algoritmo de retorno . . . . .	103
5.5.7.	Estimación de $\lambda^{(0)}$ . . . . .	105
5.5.8.	Operador elastoplástico tangente algorítmico . . . . .	105
5.5.9.	Interpretación gráfica del algoritmo de retorno . . . . .	106
5.5.10.	Respuesta del algoritmo . . . . .	107
5.5.11.	Precisión del algoritmo. Mapas de isoerror . . . . .	108
5.6.	Formulación para plasticidad con dilatación . . . . .	111
5.6.1.	Multiplicador plástico consistente . . . . .	112
5.6.2.	Operador elastoplástico tangente . . . . .	112
5.6.3.	Formulación numérica . . . . .	113
5.6.4.	Algoritmo de retorno . . . . .	115
5.6.5.	Operador elastoplástico tangente algorítmico . . . . .	116
5.6.6.	Estimación de $\lambda^{(0)}$ . . . . .	117
5.6.7.	Respuesta del algoritmo . . . . .	117
5.6.8.	Precisión del algoritmo. Mapas de isoerror . . . . .	124
<b>6.</b>	<b>Estudio de localización de deformaciones</b>	<b>128</b>
6.1.	Introducción . . . . .	128
6.2.	Cinemática de medios discontinuos. Discontinuidad débil . . . . .	130
6.3.	Análisis de bifurcación discontinua. Condición de localización . . . . .	133
6.4.	Análisis de bifurcación discontinua en medios elastoplásticos . . . . .	136
6.4.1.	Resumen de ecuaciones constitutivas . . . . .	136
6.4.2.	Condición de localización . . . . .	137
6.4.3.	Módulo crítico de endurecimiento/ablandamiento . . . . .	140
6.5.	Análisis numérico del indicador de falla localizada . . . . .	141
6.5.1.	Sensibilidad de las propiedades de la localización del modelo respecto de la densidad relativa . . . . .	141
6.5.2.	Sensibilidad de las propiedades de la localización del modelo respecto de $\sigma_2$ . . . . .	144
6.5.3.	Comparación entre las respuestas correspondientes a $H_{loc}$ y $H_{loc}^{crit}$ . . . . .	146
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>150</b>
<b>A.</b>	<b>Definiciones y Expresiones auxiliares</b>	<b>152</b>
A.1.	Tensores unitarios . . . . .	152
A.2.	Invariantes de tensores de segundo orden . . . . .	152

A.3.	Derivadas de invariantes . . . . .	153
A.3.1.	Derivadas de los invariantes de un tensor de segundo orden . . . . .	153
A.3.2.	Derivadas de los invariantes de la componente deviatorica de un tensor de segundo orden . . . . .	154
<b>B.</b>	<b>Anexos al Capítulo 3</b>	<b>156</b>
B.1.	Carácter tensorial de los Modelos elásticos de Cauchy . . . . .	156
B.2.	Deducción de la expresión general para los modelos hiperelásticos (Método de Green) . . . . .	157
B.3.	Materiales elásticos estables . . . . .	161
B.3.1.	Postulados de Drucker. Materiales estables . . . . .	161
B.3.2.	Existencia de $W$ y $W_{co}$ . . . . .	162
<b>C.</b>	<b>Anexos al Capítulo 4</b>	<b>164</b>
C.1.	Procesos Termomecánicos irreversibles. Elastoplasticidad . . . . .	164
C.2.	Derivadas de la función de fluencia de von Mises . . . . .	168
C.2.1.	Derivada de la función de fluencia respecto al tensor de tensiones . . . . .	168
C.2.2.	Derivada de la función de fluencia respecto al tensor de back stress $\mathbf{q}$ . . . . .	169
C.2.3.	Derivada de la función de fluencia respecto de la deformación plástica equivalente $\alpha$ . . . . .	170
C.3.	Operador elastoplástico tangente algorítmico. Plasticidad asociada . . . . .	171
C.3.1.	Plasticidad Perfecta . . . . .	171
C.3.2.	Plasticidad con endurecimiento combinado . . . . .	173
C.3.3.	Plasticidad con endurecimiento isotrópico hiperbólico y endurecimiento cinemático. . . . .	176
<b>D.</b>	<b>Anexos al Capítulo 5</b>	<b>179</b>
D.1.	Derivadas primeras de la función de fluencia de Matsuoka-Nakai . . . . .	179
D.1.1.	Derivada de la función de fluencia respecto al tensor de tensiones efectivas . . . . .	179
D.1.2.	Componente deviatorica de la normal saliente . . . . .	184
D.2.	Derivadas segundas de la función de fluencia de Matsuoka-Nakai . . . . .	186
D.2.1.	Derivada de la normal saliente respecto al tensor de tensiones efectivas . . . . .	186
D.2.2.	Derivada de la componente deviatorica de la normal saliente respecto del tensor de tensiones efectivas . . . . .	189
D.3.	Análisis termodinámico de la ley de flujo no asociada adoptada . . . . .	190
D.4.	Módulo intrínseco de endurecimiento/ablandamiento . . . . .	192
D.5.	Operador elastoplástico algorítmico. Función de fluencia de Matsuoka-Nakai . . . . .	194



# Capítulo 1

## Introducción

La Mecánica de Suelos es la disciplina que estudia el comportamiento de los suelos bajo distintas condiciones de carga. En la antigüedad, cuando los seres humanos empezaron a construir estructuras, era necesario diseñar las fundaciones de manera adecuada. Bajo esta necesidad se crearon expresiones empíricas para resolver problemas geotécnicos, que son adecuadas pero su aplicación se limita a una serie de casos.

En el siglo XVIII, Coulomb (1736-1806), desarrollo teorías matemáticas avanzadas para el diseño de estructuras, sin embargo las técnicas de diseño de fundaciones presentaron avances debido a las contribuciones hechas por Rankine (1820-1872) y Winkler (1835-1888). Con el paso de los años se empezó a desarrollar una nueva rama en la Mecánica de Suelos; la modelación constitutiva del comportamiento del suelo. Esta disciplina describe el comportamiento del suelo con ecuaciones constitutivas mediante la Mecánica de los Medios Continuos.

En la actualidad, con el creciente advenimiento de la tecnología informática, se pueden analizar mediante el Método de los Elementos Finitos una gran cantidad de problemas geotécnicos, es por eso que el estudio de diferentes modelos constitutivos es una herramienta fundamental para el diseño de estructuras constituidas por materiales granulares.

La principal característica de los materiales compuestos por partículas es que su resistencia y rigidez dependen del estado de tensión y cambian de manera muy significativa durante los procesos de deformación. Dentro de los materiales friccionales, las arenas presentan el siguiente comportamiento: su rigidez y resistencia al corte son nulas cuando la presión es nula.

Existen dos características fundamentales de las arenas:

1. Todas las arenas tienen un ángulo de reposo, que es independiente de los procesos de carga y deformación a los que haya tenido lugar.
2. Sin importar el estado inicial en que se encuentren las arenas, estas se deforman a volumen constante luego de una distorsión lo suficientemente grande.

Para modelar el comportamiento de los materiales friccionales se deben tener en cuenta tres aspectos importantes:

1. Los principios que gobiernan la respuesta del material.
2. Una teoría elastoplástica general para obtener relaciones de tensión-deformación adecuadas para los suelos.
3. Un procedimiento numérico para resolver problemas geotécnicos elastoplásticos bajo la acción de fuerzas exteriores y desplazamientos.

El primer aspecto consiste en entender el comportamiento elastoplástico de los medios continuos compuestos por materiales friccionales.

El segundo aspecto sería establecer una teoría general de plasticidad con el fin definir la relación tensión-deformación para describir el comportamiento plástico observado. Esta tarea es ardua, sin embargo; las teorías que se utilizan para los metales pueden extenderse a los materiales friccionales con algunas modificaciones para poder captar su comportamiento básico.

Finalmente, el tercer aspecto a considerar consiste en desarrollar técnicas numéricas para la implementación de la relación tensión-deformación en el análisis de un problema de valores de contorno. Debido a las no linealidades que presenta la respuesta plástica de estos materiales, la solución del sistema de ecuaciones resultante se vuelve muy compleja.

## 1.1. Objeto de esta tesis

En este trabajo se estudiarán las bases de la modelización constitutiva de materiales friccionales basada en: hiperelasticidad dependiente de la presión y plasticidad no asociada. Se formulará e implementará una ecuación constitutiva local que modele a una arena con esos elementos. Luego, se desarrollará el análisis del comportamiento de ésta ecuación constitutiva en procesos de ablandamiento. Específicamente, se formulará el operador elastoplástico tangente continuo y el operador elastoplástico consistente con el algoritmo de retorno implementado, se formulará el tensor acústico y se estudiarán las direcciones principales de localización.

Se utilizarán los elementos obtenidos en esta tesis para predecir el ángulo de inclinación de las bandas de corte de ensayos de compresión plana drenados para arenas. No es objeto de este trabajo, estudiar métodos de regularización de localización de deformaciones a nivel constitutivo.

## 1.2. Organización y presentación

Esta tesis esta organizada en siete Capítulos: 1) Esta introducción; 2) una descripción del comportamiento mecánico de las arenas; 3) formulación e implementación de un modelo hiperelástico dependiente de la presión; 4) formulación e implementación de un modelo constitutivo elastoplástico local asociado basado en una función de fluencia  $J_2$ ; 5) formulación e implementación de un modelo constitutivo elastoplástico local no asociado basado en una función de fluencia  $J_3$ ; 6) estudio de localización de un modelo constitutivo continuo elastoplástico local no asociado; y 7) Conclusiones. A cada capítulo se le agrega, según corresponda, un anexo con los desarrollos teórico y deducciones de algunas de las ecuaciones utilizadas que se encuentran al final del cuerpo de este trabajo.

## 1.3. Notación

Los tensores de segundo orden se escriben en negrita minúscula; los tensores de cuarto orden se escriben en negrita mayúscula. Los tensores unitarios de segundo y cuarto orden se escriben respectivamente como  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{I}$ . El doble producto interno, el producto interno y el producto tensorial se escriben respectivamente como  $\mathbf{a} : \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  y  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ .

La compresión se toma como positiva en este trabajo, salvo que se indique lo contrario. La presión media se define como

$$p = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} > 0 \quad (1.1)$$

Donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones efectivas. No se admiten tensiones de tracción. La deformación volumétrica se define como:

$$\varepsilon^v = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{1} \quad (1.2)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformaciones infinitesimales y  $\varepsilon^v > 0$  implica reducción de volumen.

Se adopta la convención de suma de Einstein que define que dos índices repetidos implican suma, por ejemplo,  $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ . Para la presentación de los resultados, los autovalores de  $\boldsymbol{\sigma}$  y de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se ordenan como  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0$  y  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ .

La componente deviatorica del tensor unitario de cuarto orden viene dada por

$$\mathbf{I}^{dev} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (1.3)$$

La ec.(1.3) se utiliza para definir las componentes deviatoricas de los tensores de tensiones efectivas y deformaciones infinitesimales

$$\mathbf{s} = \mathbf{I}^{dev} : \boldsymbol{\sigma} \quad (1.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^d = \mathbf{I}^{dev} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.5)$$

También se emplea en la formulación del modelo constitutivo no asociado el tensor de oblicuidad de tensiones definido por

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{s}}{p} \quad (1.6)$$

y su norma  $r = \|\mathbf{r}\|$  como medidas del estado tensional.

Los vectores en este trabajo se denotan en negrita ya sea mayúscula o minúscula subrayado, por ejemplo:  $\underline{\mathbf{a}}$  o  $\underline{\mathbf{A}}$ . Para detalles más específicos sobre definiciones y notación se remite al Apéndice A.

# Capítulo 2

## Propiedades mecánicas de las arenas

### 2.1. Introducción

Las ecuaciones fundamentales que describen la mecánica de los materiales friccionales están basadas en el trabajo de Coulomb [13] y Rankine [42], quienes establecieron los principios básicos que gobiernan el comportamiento de una masa de arena. El primer principio se denomina “principio de movilización de la fricción” [2]. La fricción movilizada es la resistencia a las fuerzas de corte o desplazamientos de un empaquetamiento granular. Esta fuerza friccional, para dos granos cualesquiera en reposo, puede tomar cualquier valor entre cero y un valor límite, este último se alcanza cuando los granos están justo a punto de desplazarse en forma relativa el uno con el otro mientras están todavía en contacto. El valor límite de la fricción movilizada es una función de la fuerza normal entre los granos.

El segundo principio es el “principio de la dilatancia”. En 1885, Reynolds [43] observó que: “Un empaquetamiento denso de granos colocado dentro de una bolsa flexible invariablemente incrementa su volumen cuando la envoltura es deformada; si la envoltura es inextensible, pero no inflexible, no es posible ninguna deformación hasta que las fuerzas aplicadas rompen la bolsa o fracturan los granos”. Debido a esta propiedad cinemática, un esfuerzo de corte sobre un empaquetamiento de partículas produce que algunos granos, los cuales estaban previamente en contacto, se separen y puedan desplazarse y rotar a lo largo de ciertos planos. Si la fuerza friccional debido a corte llega a su valor límite, se forman superficies de deslizamiento, produciendo un patrón de localización denominado “*banda de corte*”. Los granos que se encuentran cerca de dicha banda están sometidos a una gran reacomodamiento, y su comportamiento determina la resistencia friccional de la muestra. El empaquetamiento se comporta como dos cuerpos rígidos diferentes mientras la deformación se produzca en la banda de corte. El principio de la dilatancia que se citó anteriormente justifica la aparición de superficies de deslizamiento cuando la muestra se torna suelta en regiones localizadas.

El propósito de este Capítulo es describir brevemente los principios que gobiernan la respuesta de los suelos granulares cuando se las somete a deformaciones por corte para poder

describir la relación tensión-deformación de las arenas en los ensayos triaxiales convencionales.

## 2.2. Escalas de observación

Los materiales friccionales deben su comportamiento en conjunto a la interacción entre sus partículas; esta característica dificulta la descripción matemática del material y cualquier intento de incorporar todas sus propiedades resultaría en modelos muy complejos y de poca aplicación práctica. Es por eso que se deben hacer simplificaciones sobre las bases de los modelos y tratar de captar el comportamiento básico del material.

En la mecánica de materiales se estudian diferentes escalas de observación; la descripción ingenieril se realizan a nivel macro o mesomecánico; los procesos y propiedades fisicoquímicas se desarrollan en los niveles micromecánico, molecular y atomístico, y son cuantificados en las descripciones meso y/o macromecánicas mediante funciones de correlación.

En la descripción ingenieril se distinguen los siguientes niveles de observación:

1. **Nivel estructural:** este nivel trabaja en escala métrica y es utilizado en problemas de estructuras civiles.
2. **Nivel macromecánico:** la mayoría de las propiedades de los materiales de laboratorio se obtienen en escala milimétrica. Esta escala constituye la macroescala, en la que los materiales se consideran continuos y homogéneos.
3. **Nivel micromecánico:** en este nivel se utiliza una escala que permite la observación de las propiedades microestructurales tales como microdefectos y tamaños de grano. Esta escala constituye la mesoescala y los materiales se consideran compuestos y heterogéneos.
4. **Nivel nanomecánico:** en este nivel tienen lugar los procesos moleculares y atomísticos.

En este trabajo se busca simular el comportamiento de los materiales granulares a nivel macroscópico; los parámetros utilizados describen las características de un empaquetamiento granular en forma general y son medibles en un laboratorio.

## 2.3. Caracterización macroscópica de los materiales friccionales

### 2.3.1. Parámetros de descripción del empaquetamiento

Los materiales granulares son medios porosos compuestos por partículas sólidas y vacíos. La densidad del empaquetamiento se caracteriza mediante la *relación de vacíos* e expresada

por

$$e = \frac{v_v}{v_s} \quad (2.1)$$

donde  $v_v$  es el volumen de los vacíos y  $v_s$  es el volumen de las partículas sólidas. También se utiliza la *porosidad*  $n$  que se expresa de la siguiente manera

$$n = \frac{v_v}{(v_v + v_s)} \quad (2.2)$$

y el volumen específico

$$v = \frac{(v_v + v_s)}{v_s} \quad (2.3)$$

La relación de vacíos tiene un valor máximo normalizado  $e_{max}$  y uno mínimo  $e_{min}$  que permiten definir la *densidad relativa*

$$D_r = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}} \quad (2.4)$$

De acuerdo con esta definición, una arena es suelta si  $D_r < \frac{1}{3}$ , medianamente densa si  $\frac{1}{3} < D_r < \frac{2}{3}$ , densa si  $\frac{2}{3} < D_r < \frac{3}{4}$ , y muy densa si  $D_r > \frac{3}{4}$ . Es decir tanto la relación de vacíos como la densidad relativa son medidas directas de las características macroscópicas del material.

## 2.4. Resistencia

### 2.4.1. Resistencia en los materiales friccionales

La resistencia en los materiales friccionales viene dada en términos de la resistencia al corte. La resistencia al corte de un material granular no es una propiedad del mismo, si no que depende de:

1. La presión intergranular.
2. La densidad.
3. La dirección del plano de cizallamiento respecto de las direcciones principales de anisotropía material

La tensión de corte  $\tau_f$  que produce el deslizamiento entre dos planos viene dada por la ecuación de Mohr-Coulomb

$$\tau_f = \sigma_n \tan(\phi) \quad (2.5)$$

donde  $\sigma_n$  es la tensión normal que actúa en el plano y  $\phi$  es el ángulo de fricción interna. La ec.2.5 se utiliza en los problemas prácticos de la Mecánica de Suelos y el ángulo de fricción interna  $\phi$  se elige de acuerdo al problema en particular.

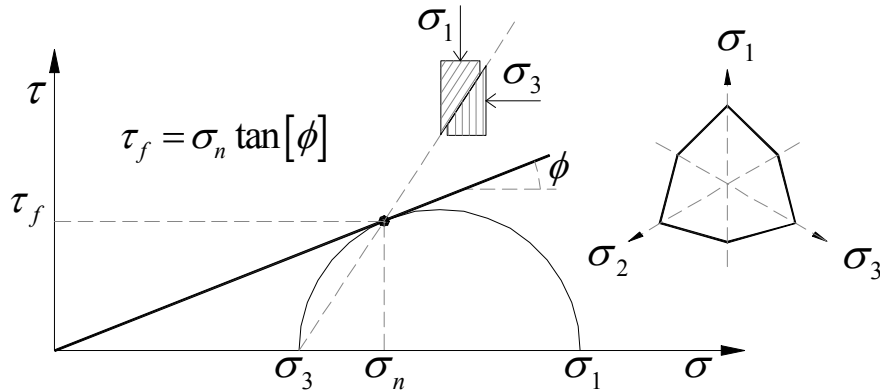


Figura 2.1: Criterio de Mohr-Coulomb en coordenadas  $\tau - \sigma$ [49].

## 2.4.2. Componentes de la resistencia al corte

La resistencia al corte de los materiales friccionales se debe a la interacción de mecanismos físicos, los cuales se pueden simplificar en una contribución de la fricción mineral entre las partículas y una contribución de la interferencia de las trayectorias de las partículas que se desplazan.

La interferencia es una restricción cinemática al movimiento de las partículas vecinas; esto depende de la forma de las partículas, de su distribución granulométrica y de la densidad del empaquetamiento. Si consideramos una muestra suelta y la sometemos a una deformación de corte, las partículas encuentran vacíos y se acomodan, por lo tanto la muestra disminuye su volumen y contrae. Si en cambio tomamos una muestra densa y la sometemos a una deformación de corte, las partículas se encuentran con otras partículas, las mismas se montan unas a las otras y por lo tanto la muestra aumenta su volumen y dilata [43]. Debido a que las partículas deben sobrepasarse unas a otras para reubicarse, este mecanismo consume trabajo mecánico entonces se puede considerar que la dilatancia es una componente de resistencia al corte de un material friccional.

Existen además otras dos componentes que influyen en la resistencia al corte: la fricción inducida por el rodamiento de partículas y la rotura de granos. Estas dos componentes son de naturaleza microscópica; debido a los alcances de este trabajo sólo se mencionarán cualitativamente sus efectos sobre la resistencia. En [2] se realiza un estudio más detallado sobre este tema.



## Fricción mineral

La contribución de la fricción en los materiales granulares se puede subdividir en varias componentes, cada una contribuye al concepto microscópico de fricción. Estas componentes son:

1. Fricción mineral, la cual se denota como  $\phi_\mu$ . Depende de la composición mineralógica de las partículas, de sus contaminantes superficiales y de la composición del fluido intergranular aunque este último contribuye en menor medida que los otros factores.
2. Resistencia debida a la trabazón entre partículas.
3. Reducción en las características friccionales causadas por las partículas que se rompen en partículas más pequeñas (o hasta un material pulverulento) las cuales facilitan el movimiento de las partículas de mayor tamaño.

La relación friccional para dos bloques en contacto viene dada por la fórmula de Amonton

$$\tau_f = \mu \sigma_n = \tan(\phi_\mu) \sigma_n \quad (2.6)$$

donde  $\tau_f$  es el esfuerzo de corte aplicado paralelamente a las superficies donde se aplica el deslizamiento;  $\sigma_n$  es la tensión normal aplicada a las superficies y  $\mu$  es el coeficiente de fricción entre los bloques. Estudios de fricción macroscópicos y microscópicos llevan a la siguiente expresión para  $\mu$

$$\mu = \tan(\phi_\mu) = \frac{\tau_f}{\sigma_n} = \frac{\tau_f^k}{\sigma_n^k} \quad (2.7)$$

donde  $\tau_f^k$  y  $\sigma_n^k$  son los valores promedios de la tensión de corte y la tensión normal respectivamente.

## Interferencia

La interferencia, también conocida como fricción geométrica o cinemática, se puede explicar, en primer instancia, con un modelo simplificado de dos bloques endentados como se muestra en la Fig.2.2.

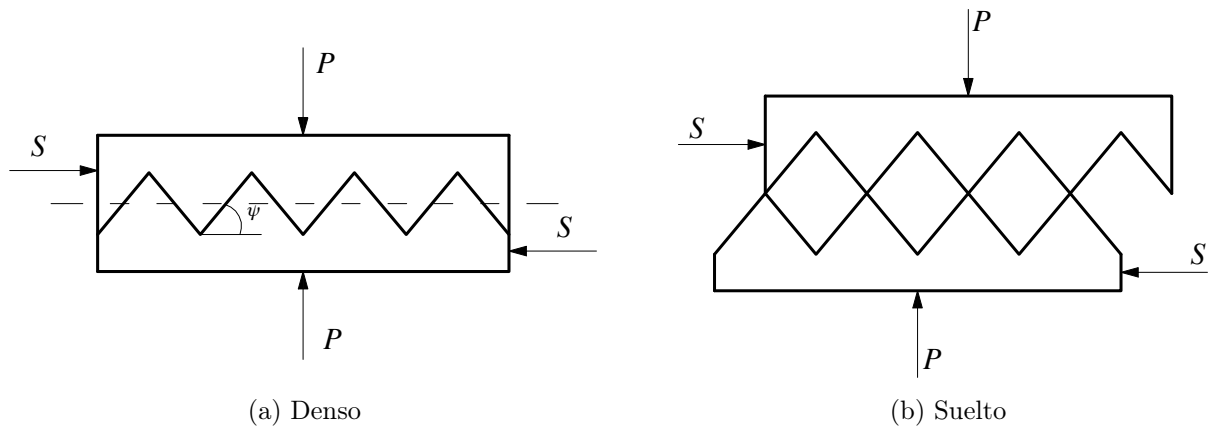


Figura 2.2: Modelo de bloques endentados [2].

Se puede observar que al aplicar un esfuerzo de corte sobre los bloques en su estado denso el endentado se desplaza en forma relativa de manera tal que el bloque superior se monta sobre el inferior; entonces, el conjunto dilata.

Para un estado intermedio de la Fig.2.2, la condición de equilibrio estático establece que

$$S = P \tan(\phi_\mu + \psi) \quad (2.8)$$

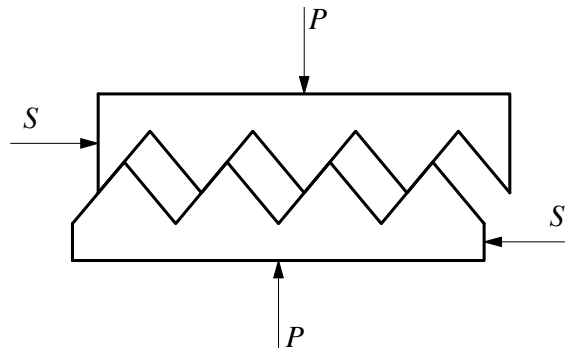


Figura 2.3: Estado dilatante del modelo de dos bloques endentados [2].

Si ahora se considerara un estado inicial suelto para el modelo de dos bloques endentados y se aplica un esfuerzo de corte, se puede observar que el endentado superior se encaja con el inferior; por lo tanto, el conjunto contrae. Para un caso intermedio la condición de equilibrio estático establece que

$$S = P \tan(\phi_\mu - \psi) \quad (2.9)$$

En ambos casos el ángulo  $\psi$  es tal que el deslizamiento entre los bloques se produzca; entonces, podemos expresar a la resistencia al corte macroscópica como

$$\tan(\phi_m) = \frac{S}{P} = \tan(\phi_\mu) \quad (2.10)$$

donde  $\phi_m$  es el ángulo de fricción interna macroscópico.

$\phi_m$  constituye una medida de la resistencia al corte de un empaquetamiento de partículas sujetas a una tensión de corte que depende del coeficiente de rozamiento y de la forma de las cada una de ellas.

### Fricción inducida por rodamiento y rotura de granos

Las partículas que se encuentran trabadas unas con otras ofrecen mayor resistencia que aquellas que pueden rodar libremente sobre otras partículas, o que rompen bajo cierto estado tensional. La fricción mineral  $\phi_\mu$ , disminuye a medida que el diámetro efectivo del grano aumenta; este fenómeno se debe a que las partículas más grandes pueden rodar más fácilmente que las pequeñas y la fricción inducida por rodamiento reduce la fricción total para partículas de tamaños similares. La fricción inducida por rodamiento depende fuertemente de la forma de la partícula; partículas más angulosas ofrecen mayor resistencia que las más redondeadas es decir, que la forma de la partícula juega un papel fundamental pues afecta la resistencia friccional.

### 2.4.3. Dilatancia

Debido a que un grano del empaquetamiento puede rodar y romperse el conjunto de partículas manifiesta cambios en su volumen. La *dilatancia* es el cambio de volumen asociado a la aplicación de una tensión de corte. En la Fig.2.4 se considera un empaquetamiento que se encuentra inicialmente denso.

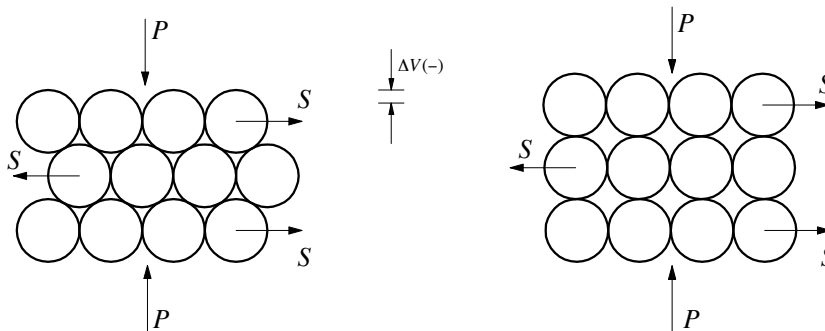


Figura 2.4: Respuesta de un empaquetamiento de partículas inicialmente denso a esfuerzos de corte.

Se puede observar que el empaquetamiento aumenta su volumen (dilata). Si la muestra se encuentra saturada, en condiciones no drenadas la presión neutra disminuye y la tensión efectiva aumenta; por lo tanto, la resistencia al corte aumenta.

En la Fig.2.5 se considera un empaquetamiento que se encuentra inicialmente suelto; puede observarse que, en este caso, el empaquetamiento disminuye su volumen (contrae). Si la muestra se encuentra saturada, en condiciones no drenadas la presión neutra aumenta y la tensión efectiva disminuye; por lo tanto, también lo hace la resistencia al corte. La cantidad de dilatancia que exhibe el empaquetamiento depende de su composición granulométrica; la contribución geométrica de las partículas a la resistencia friccional está relacionada con el comportamiento dilatante durante la aplicación del esfuerzo de corte.

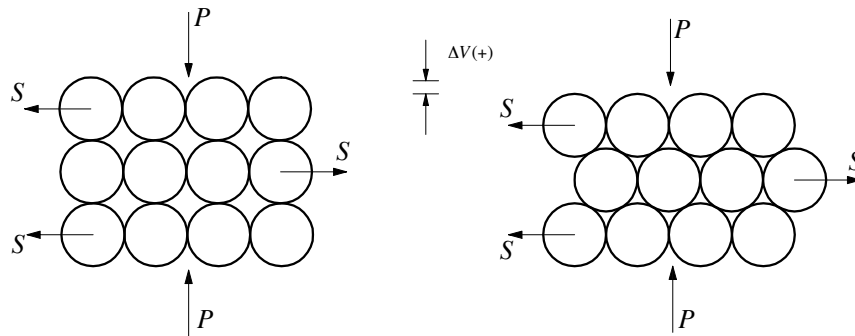


Figura 2.5: Respuesta de un empaquetamiento de partículas inicialmente suelto a esfuerzos de corte.

Un parámetro que caracteriza la dilatancia es el *ángulo de dilatancia*  $\psi$ , e indica la tasa de cambio de volumen cuando el empaquetamiento está sometido a un esfuerzo de corte. Si  $\psi > 0$  la muestra dilata, en caso contrario contrae. Una expresión para el ángulo de dilatancia es

$$\tan(\psi) = -\frac{\Delta\varepsilon_p^v}{\Delta\gamma_p} \quad (2.11)$$

donde  $\Delta\varepsilon_p^v$  es la variación de la componente plástica de la deformación volumétrica y  $\Delta\gamma_p$  es la componente plástica de la deformación por corte.

#### 2.4.4. Estado Crítico

El estado crítico se define como el estado para el cual se puede seguir incrementando las deformaciones por corte sin que cambie el volumen del empaquetamiento. En la Fig.2.6 se grafican las relaciones  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \varepsilon_1$  y  $\varepsilon^v - \varepsilon_1$ , donde  $\varepsilon^v$  es la deformación volumétrica total del material, para un ensayo de compresión triaxial drenado convencional realizado sobre dos muestras; una densa y otra suelta.

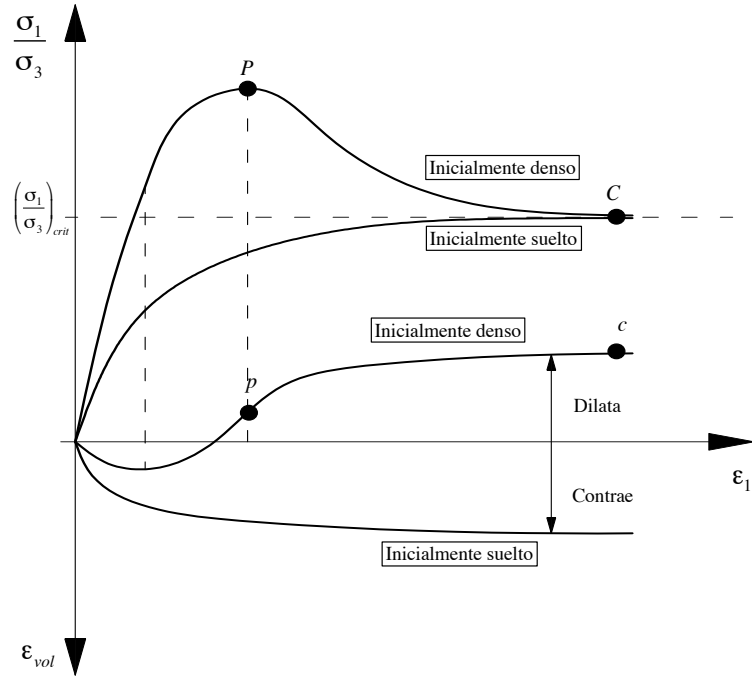


Figura 2.6: Ensayo de compresión triaxial drenado.

En un ensayo sobre una muestra inicialmente densa la relación  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$  crece gradualmente a medida que se incrementa la deformación principal  $\epsilon_1$  hasta un valor pico  $P$  antes de caer en un valor estacionario en  $C$ , que se mantiene constante a medida que se incrementa  $\epsilon_1$ . Teniendo en cuenta el gráfico de  $\epsilon^v - \epsilon_1$  se puede observar que una muestra inicialmente densa puede presentar una pequeña contracción al comienzo para pequeñas deformaciones iniciales, pero luego comienza a dilatar. Si la curva  $\epsilon^v - \epsilon_1$  se torna más pronunciada, la relación  $-\frac{\partial \epsilon^v}{\partial \epsilon_1}$  esta aumentando; por lo tanto, la pendiente de esta curva alcanza un máximo local en el punto  $p$ ; sin embargo, a medida que avanza la deformación deviatorica la curva se vuelve menos pronunciada hasta alcanzar el valor estacionario  $c$ , donde se vuelve horizontal; cuando esto último ocurre se cumple  $\frac{\partial \epsilon^v}{\partial \epsilon_1} = 0$  y ya no se moviliza más dilatancia en la muestra.

Las relaciones  $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)_{pico}$  y  $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)_{crit}$  se alcanzan en los puntos  $P$  y  $C$  de la Fig.2.6 y coinciden con la máxima tasa de dilatancia en el punto  $p$  y con el punto  $c$  respectivamente en la misma figura.

Ahora analizando un ensayo sobre una muestra inicialmente suelta, se puede observar en el gráfico de  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \epsilon_1$  no presenta estados pico; eventualmente se alcanza el mismo estado crítico que una muestra inicialmente densa. En el gráfico  $\epsilon^v - \epsilon_1$  correspondiente se ve que la muestra no dilata, sino que contrae hasta un valor constante  $\epsilon^v$ .

Es decir que un suelo sometido a corte puede alcanzar una relación de vacíos crítica para cual la muestra se puede deformar sin cambio de volumen o de tensiones de corte. A este estado se lo conoce como "estado crítico". En [40] se muestra que los estados máximos (o pico) están completamente ligados con la dilatancia del suelo y se muestra que el estado crítico depende de la tensión efectiva normal aplicada cuando la muestra se la somete a esfuerzos

de corte.

Si se grafica la relación  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \varepsilon_1$  para distintas presiones de confinamiento, se observa que la relación entre valores pico disminuye a medida que la presión de confinamiento aumenta. Esto ocurre pues la relación de vacíos crítica disminuye a medida que la presión de confinamiento aumenta; por lo tanto, la dilatancia del empaquetamiento disminuye. Los términos “denso” y “suelto” se deben utilizar en función de la densidad relativa  $D_r$  y la presión de confinamiento de la muestra, pues una muestra de suelo a una presión de confinamiento de 10 kPa, puede comportarse como densa (pues la relación de vacíos es menor que la relación de vacíos crítica), pero podría comportarse como suelta a una presión de confinamiento de 100 kPa (pues la relación de vacíos es mayor que la relación de vacíos crítica).

### 2.4.5. Ángulo de fricción interna

El ángulo de fricción interna se encuentra definido por

$$\phi = \phi_c + \psi \quad (2.12)$$

donde  $\phi_c$  es el ángulo de fricción interna crítico y  $\psi(p, e_0)$  es una función de estado que tiene en cuenta la dependencia que  $\phi$  tiene respecto de la dilatancia. La función de estado  $\phi$  se define únicamente para el estado de compresión triaxial ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ).

El concepto de ángulo de fricción interna crítico se puede entender con el siguiente ejemplo citado por Sfriso en [49]: “Una caja llena con arena se inclina lentamente hasta que los granos comienzan a rodar por la superficie del talud. Se reduce entonces la inclinación de la caja hasta que las partículas se detengan. El ángulo máximo alcanzado por la caja es  $\phi$ , mientras que el ángulo que produce el cese del movimiento es  $\phi_c$ . La diferencia entre ambos es el efecto del empaquetamiento, mayor cuanto mayor es la densidad de la arena que llena la caja. Puesto que las partículas al rodar pierden completamente sus posiciones relativas,  $\phi_c$  es independiente de la densidad inicial de la arena y es una propiedad del material”.

Se define  $e_0$ , como la relación de vacíos que tiene el material si se congelan los mecanismos plásticos y se reduce la presión a cero.

Bolton en [4] propone la siguiente expresión para el ángulo de fricción interna

$$\phi = \phi_c + \Delta\phi D_r \left[ Q - \ln \left( \frac{p}{p_{ref}} \right) \right] - b \quad (2.13)$$

donde  $\Delta\phi = 3^\circ$ ,  $b = 3^\circ$  para la mayoría de las arenas [4] y  $Q$  es un parámetro del material que tiene en cuenta la resistencia de los granos. El significado de  $Q$  se enfatiza si combinamos las ecs.(2.12) y (2.13) en

$$\psi = -\Delta\phi D_r \ln(\chi_B) - b \quad (2.14)$$

donde

$$\chi_B = \frac{p}{\exp(Q) p_{ref}} \quad (2.15)$$

es una media del nivel de tensiones. Sfriso [49] propone reemplazar la ec.(2.15) por

$$\chi = \frac{p}{p_{ult}} \quad (2.16)$$

donde  $p_{ult}$  esta se calcula con la expresión dada por Pestana en [38]

$$p_{ult} = e_0^{-\frac{1}{\rho}} p_r p_{ref} \quad (2.17)$$

donde  $\rho$  y  $p_r$  son parámetros del material y  $p_{ref}$  es una presión de referencia que se adopta igual a 100 kPa. Pestana [38] mostró que  $\rho$  cae en el rango aproximado  $0,33 < \rho < 0,45$  para la mayoría de las arenas; sin embargo, Sfriso [49] deduce que  $\rho$  tiene poca influencia en el rango de presiones de interés ingenieril y adopta  $\rho = 0,40$ ; además propone una calibración para la ec.(2.13), en la que adopta  $\Delta\phi = 3^\circ$  y  $b = 2^\circ$ . Los parámetros establecidos anteriormente se adoptan como valores por defecto para este trabajo.

Teniendo en cuenta lo establecido anteriormente, la ec.(2.14) se escribe como

$$\psi = -\Delta\phi D_r \ln(\chi) - b \quad (2.18)$$

Debido a que Bolton [4] [5] limitó la validez de la ec.(2.13) a presiones  $p > 150$  kPa para evitar una sobreestimación del término de dilatancia, en este trabajo se tiene en cuenta la misma restricción para la ec.(2.18).

En la Fig.2.7 se grafica  $\psi$  en función de  $p$  para tres densidades relativas. Los parámetros materiales adoptados son:  $e_{min} = 0,63$ ,  $e_{max} = 1,03$ ,  $p_r = 50$  kPa y  $p_{ref} = 100$  kPa. Se observa que para una arena suelta ( $D_r = 0\%$ ) el ángulo de dilatancia es negativo indica que el empaquetamiento contrae, muestras densas y medianamente densas ( $D_r = 100\%$  y  $D_r = 50\%$ ) el ángulo de dilatancia es positivo por lo tanto el empaquetamiento dilata.

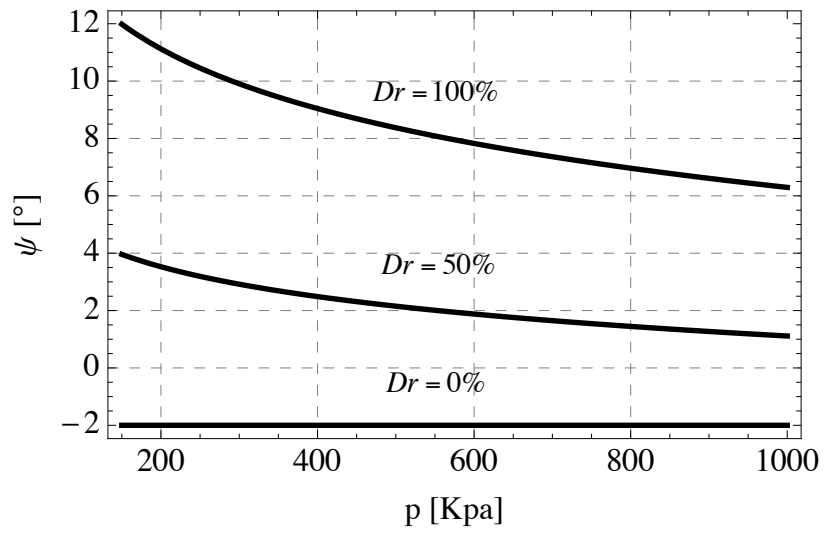


Figura 2.7: Gráfico de  $\psi(p)$  para tres densidades relativas distintas.



# Capítulo 3

## Elasticidad dependiente de la presión

### 3.1. Modelos elásticos en la Geotécnia

Los modelos para materiales elásticos, basados en la teoría de la Mecánica del Continuo, se pueden clasificar de la siguiente manera: i) Modelos elásticos lineales (Ley de Hooke generalizada), ii) Modelos elásticos de Cauchy, ii) Modelo hiperelásticos y iii) Modelos hipelásticos. En esta Sección se describen brevemente estos modelos.

#### 3.1.1. Modelo elástico lineal (Ley de Hooke generalizada)

El modelo elástico lineal propone una relación única entre el estado de tensión y de deformación. Este modelo se puede clasificar en: i) Isótropo; ii) Transversalmente isótropo; iii) Ortótropo o iv) Anisótropo, dependiendo de qué tipo de material se considere. La forma más general de un modelo elástico lineal viene dada por la *Ley de Hooke generalizada*

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.1)$$

o, en componentes

$$\sigma_{ij} = \sigma_{0ij} + C_{eijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.2)$$

El tensor  $\boldsymbol{\sigma}_0$  es el estado de tensión correspondiente a un estado de deformación inicial y el tensor  $\mathbf{C}_e$  es el tensor de cuarto orden cuyas componentes son las constantes elásticas.

Los materiales elásticos isótropos y homogéneos pueden describirse mediante dos constantes cuya elección depende del campo de aplicación:

1. **Ingeniería estructural:** La elección más frecuente es el módulo elástico longitudinal y el coeficiente de Poisson ( $E, \nu$ ). Los valores típicos de  $\nu$  se encuentran entre 0 y 0,5 (material incompresible).

2. **Termodinámica de los sólidos deformables:** En esta alternativa resulta útil elegir el par  $(K, G)$  denominados Módulo de compresibilidad y Módulo de corte respectivamente.
3. **Coefficientes de Lamé:** Estos son  $(\lambda, \mu)$ , y también aparecen en el desarrollo de Taylor de la energía libre de Helmholtz.

Por lo tanto, se tienen un total de seis constantes elásticas:  $E, \nu, K, G, \lambda$  y  $\mu$ . Dos cualesquiera de estas constantes caracterizan completamente el comportamiento elástico del material. En el Cuadro 3.1 se resume la relación entre las diferentes constantes elásticas enunciadas.

	$E$ : módulo de elasticidad $\nu$ : coeficiente de Poisson	$K$ : módulo de compresibilidad $G$ : coeficiente de corte	$\lambda$ : 1° coeficiente de Lamé $\mu$ : 2° coeficiente de Lamé
$E, \nu$	---	$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$	$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$
$K, G$	$E = \frac{9KG}{3K+G}$ $\nu = \frac{3K-2G}{2(3K+G)}$	---	$\lambda = K - \frac{2G}{3}$ $\mu = G$
$\lambda, \mu$	$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$K = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ $G = \mu$	---

Cuadro 3.1: Relación entre las diferentes constantes elásticas.

Adoptando cualquier par de constantes se puede definir al tensor de cuarto orden  $\mathbf{C}_e$ ; en este trabajo se adopta la siguiente expresión

$$\mathbf{C}_e = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G \mathbf{I}^{dev} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{1} = \delta_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$  y  $\mathbf{I}^{dev} = (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij}) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l$  son los tensores unitario de segundo orden y la componente deviatórica del tensor unitario de cuarto orden (ver Apéndice A).

Los materiales que son descriptos con este tipo de modelos vuelven a su posición original cuando se lo descarga; por lo tanto, este modelo tiene una aplicabilidad muy limitada para los materiales de origen geológico. Sin embargo, para estados de tensión diferentes a los de la condición in situ, y muy por debajo de la falla, este modelo puede predecir la distribución de tensiones y asentamientos en forma aproximada.

### 3.1.2. Modelos elásticos de Cauchy

En los modelos elásticos de Cauchy el estado de tensión actual, dado por  $\boldsymbol{\sigma}$ , depende exclusivamente del estado de deformación actual dado por  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ; es decir, el tensor de tensiones es función del tensor de deformaciones (o vice versa).

Una ecuación constitutiva de este tipo de materiales tiene la siguiente forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.4)$$

o, en componentes

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (3.5)$$

donde  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , es un campo tensorial denominado *función de respuesta elástica del material*. Para un material isótropo, esta función es un polinomio en el tensor de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , es decir

$$\mathbf{f} = a_0 \mathbf{1} + a_1 \boldsymbol{\varepsilon} + a_2 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + a_3 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \dots \quad (3.6)$$

o

$$f_{ij} = a_0 \delta_{ij} + a_1 \varepsilon_{ij} + a_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} + a_3 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{lj} + \dots \quad (3.7)$$

donde los  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) son coeficientes. Si se utiliza el *Teorema de Cayley-Hamilton* [36] que establece que todo tensor de segundo orden satisface su propia ecuación característica, la ec.(3.6) queda

$$\boldsymbol{\sigma} = A_0 \mathbf{1} + A_1 \boldsymbol{\varepsilon} + A_2 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.8)$$

donde  $A_0$ ,  $A_1$  y  $A_2$  son los coeficientes de respuesta elástica que son función de los Invariantes canónicos del tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $I_{1\varepsilon}$ ,  $I_{2\varepsilon}$  y  $I_{3\varepsilon}$ . Análogamente, se puede expresar al tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en términos del tensor  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = B_0 \mathbf{1} + B_1 \boldsymbol{\sigma} + B_2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.9)$$

donde  $B_0$ ,  $B_1$  y  $B_2$  son coeficientes de respuesta elástica que son función de los Invariantes canónicos del tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $I_{1\sigma}$ ,  $I_{2\sigma}$  y  $I_{3\sigma}$ .

En el Anexo B.1 se demuestra el carácter tensorial de las ecs.(3.8) y (3.9). El comportamiento de estos modelos es reversible e independiente de la trayectoria de cargas, pues las tensiones son determinadas únicamente por el estado de deformación actual (o vice versa). Un aspecto importante a tener en cuenta es que los Modelos elásticos de Cauchy pueden generar energía para ciertos ciclos de carga y descarga.

### 3.1.3. Modelos hiperelásticos

En los modelos hiperelásticos, la relación  $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}$  se deriva de una de densidad de energía. Este tipo de material no genera energía sobre ningún ciclo de carga-descarga; se denomina a esta clase de materiales *materiales conservativos*. El desarrollo de la ecuación constitutiva para este modelo se basa en el *Método de Green* que emplea dos leyes fundamentales de la mecánica: i) Primer principio de la Termodinámica; y ii) Principio de conservación de la energía cinética. Es por esto, que a este modelo se lo suele llamar *Modelo elástico de Green*; este modelo asume desde un principio la existencia de una *función densidad de energía de deformación*  $W$  o una *función de densidad de energía complementaria*  $W_{co}$ . En el Anexo B.2 se deducen las expresiones típicas de los modelos hiperelásticos dadas por

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W_{co}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.11)$$

Teniendo en cuenta los *Postulados de Drucker* (ver Anexo B.3), se puede interpretar a la función de densidad de energía de deformación  $W$  como la suma de la contribución de todas las componentes de tensión; matemáticamente, esto es

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.12)$$

En forma análoga, se interpreta a la función densidad de energía complementaria  $W_{co}$  como la suma de todas las componentes de deformación

$$W_{co}(\boldsymbol{\sigma}) = \int_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} : d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.13)$$

En la Fig.3.1 se representa gráficamente las ecs.(3.12) y (3.13); se observa que  $W$  es el área bajo la curva  $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varepsilon}$  y  $W_{co}$  es el área sobre la misma.  $W$  y  $W_{co}$  se relacionan mediante la siguiente expresión

$$W + W_{co} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.14)$$

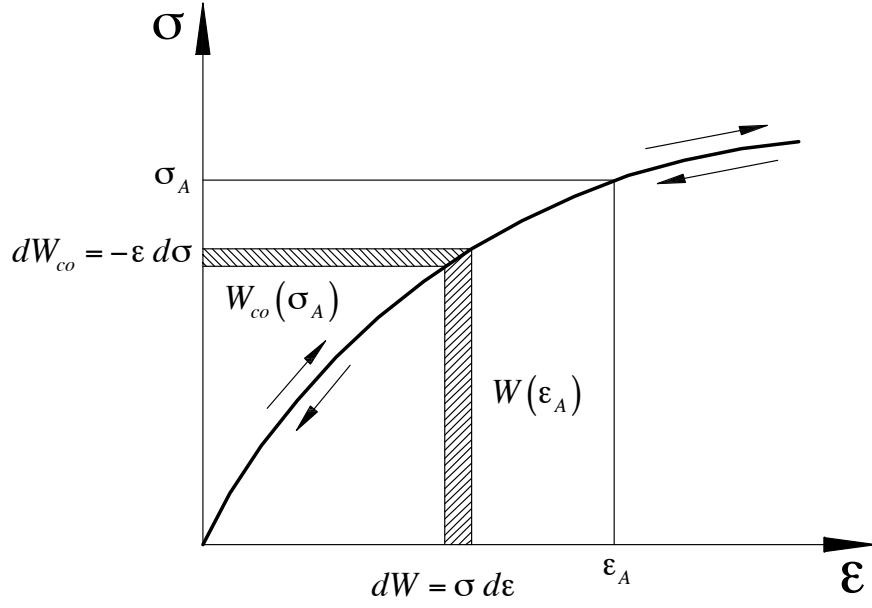


Figura 3.1: Interpretación de las funciones  $W(\epsilon)$  y  $W_{co}(\sigma)$ .

Las nociones tradicionales de elasticidad, como reversibilidad y comportamiento conservativo del material son una consecuencia directa de

$$W(\epsilon) = \oint_{\epsilon} dW = 0 \quad (3.15)$$

Para un material isótropo la función de densidad de energía de deformación  $W$  es una función de cualquiera de los tres Invariantes canónicos del tensor de deformación  $\epsilon_{ij}$ :  $I_{1\epsilon}$ ,  $I_{2\epsilon}$  y  $I_{3\epsilon}$ . Por lo tanto, la ec.(3.10) se puede escribir como

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial I_{1\epsilon}} \frac{\partial I_{1\epsilon}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial W}{\partial I_{2\epsilon}} \frac{\partial I_{2\epsilon}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial W}{\partial I_{3\epsilon}} \frac{\partial I_{3\epsilon}}{\partial \epsilon} \quad (3.16)$$

donde (ver Apéndice A.3 )

$$\frac{\partial I_{1\epsilon}}{\partial \epsilon} = \mathbf{1} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial I_{2\epsilon}}{\partial \epsilon} = \epsilon \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial I_{3\epsilon}}{\partial \epsilon} = \epsilon \cdot \epsilon \quad (3.19)$$

Entonces, la ec.(3.16) queda

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial I_{1\varepsilon}} \mathbf{1} + \frac{\partial W}{\partial I_{2\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial W}{\partial I_{3\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.20)$$

Si se comparan a las ecs.(3.8) y (3.20) se infiere que poseen la misma estructura matemática, la única diferencia radica en que los coeficientes  $A_0$ ,  $A_1$  y  $A_2$  en la ec.(3.8) son independientes mientras que  $\frac{\partial W}{\partial I_{1\varepsilon}}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial I_{2\varepsilon}}$  y  $\frac{\partial W}{\partial I_{3\varepsilon}}$  se encuentran relacionados entre sí mediante las condiciones de integrabilidad

$$\frac{\partial}{\partial I_{2\varepsilon}} \left( \frac{\partial W}{\partial I_{1\varepsilon}} \right) = \frac{\partial}{\partial I_{1\varepsilon}} \left( \frac{\partial W}{\partial I_{2\varepsilon}} \right) \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial I_{3\varepsilon}} \left( \frac{\partial W}{\partial I_{1\varepsilon}} \right) = \frac{\partial}{\partial I_{1\varepsilon}} \left( \frac{\partial W}{\partial I_{3\varepsilon}} \right) \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial I_{3\varepsilon}} \left( \frac{\partial W}{\partial I_{2\varepsilon}} \right) = \frac{\partial}{\partial I_{2\varepsilon}} \left( \frac{\partial W}{\partial I_{3\varepsilon}} \right) \quad (3.23)$$

Análogamente, la ec.(3.24) se puede expresar como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W_{co}}{\partial I_{1\sigma}} \mathbf{1} + \frac{\partial W_{co}}{\partial I_{2\sigma}} \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial W_{co}}{\partial I_{3\sigma}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.24)$$

La ec.(3.24) tiene la misma estructura matemática que la ec.(3.9), excepto por los coeficientes  $B_0$ ,  $B_1$  y  $B_2$  los cuales son independientes, mientras que  $\frac{\partial W_{co}}{\partial I_{1\sigma}}$ ,  $\frac{\partial W_{co}}{\partial I_{2\sigma}}$  y  $\frac{\partial W_{co}}{\partial I_{3\sigma}}$  se encuentran relacionados entre sí mediante las condiciones de integrabilidad similares al caso anterior.

Se define a la *relación constitutiva diferencial* a

$$d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\varepsilon}} : d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_e : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.25)$$

o

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial^2 W_{co}}{\partial \boldsymbol{\sigma} \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{C}_e]^{-1} : d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.26)$$

En las ecs.(3.25) y (3.26) se observa que los operadores elásticos tangentes son los mismos tanto para carga como para descarga, por lo tanto un modelo hiperelástico lleva a una relación constitutiva que es incapaz de describir la historia de cargas sobre el material. Este modelo puede presentar inestabilidades cuando

$$\det(\mathbf{C}_e) = 0 \text{ o } \det([\mathbf{C}_e]^{-1}) = 0 \quad (3.27)$$

### 3.1.4. Modelos hipoelásticos

En este trabajo no se implementará ninguno de estos modelos; sin embargo, se los menciona y caracteriza brevemente. Las formas funcionales típicas para los modelos hipoelásticos son

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (3.28)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (3.29)$$

En [12] se desarrolla la ec.(3.28) para el caso de un material isótropo. Los modelos hipoelásticos no requieren la formulación de potenciales elásticos y debido a su estructura matemática los materiales descritos por estos modelos presentan un carácter no conservativo. Una discusión sobre el uso de estos modelos, sus ventajas y limitaciones se puede encontrar en [11] y [12].

## 3.2. Hiperelásticidad dependiente de la presión

Para formular un modelo constitutivo hiperelástico que sea dependiente de la presión, se adoptó la expresión introducida por Molenkamp [31] para la función densidad de energía complementaria  $W_{co}$ . La ventaja principal que tiene este modelo es que al ser dependiente de una variable escalar, como la presión, la solución de la no linealidad se reduce a la implementación del Método de Newton Raphson de un grado de libertad.

### 3.2.1. Función de energía complementaria de deformación

La función densidad de energía complementaria  $W_{co}$  de Molenkamp [31] viene dada por

$$W_{co} = \frac{p}{G} \left[ \frac{S}{(1-m)(2-m)} + \frac{r^2}{4} \right] \quad (3.30)$$

donde  $G$  es el Módulo de Corte para el que se propone la expresión de Hardin

$$G = c_s \frac{(c_e - e_0)^2}{1 + e_0} \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^m p_{ref} \quad (3.31)$$

$c_s$ ,  $c_e$  y  $m$  son parámetros del material y  $p_{ref} = 100$  kPa es una presión de referencia. El parámetro  $S$  es una función de estado que se define como

$$S = \frac{2 - D_r}{3} \quad (3.32)$$

donde  $D_r$  es la densidad relativa evaluada en la relación de vacíos a presión nula  $e_0$ .

$$D_r = \frac{e_{max} - e_0}{e_{max} - e_{min}} \quad (3.33)$$

### 3.2.2. Tensor de elástico de cuarto orden

Derivando la ec.(3.30) respecto de  $\boldsymbol{\sigma}$  (ver [49]) se obtiene la inversa del tensor de cuarto orden elástico

$$[\mathbf{C}_e]^{-1} = \frac{1}{2G} \mathbf{I}^{dev} + \frac{1}{K} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (3.34)$$

donde  $K$  es el módulo de compresibilidad que se encuentra relacionado con  $G$  por

$$K = \frac{G}{\frac{S}{(1-m)} - \frac{m r^2}{4}} \quad (3.35)$$

donde  $r$  es la oblicuidad.

Si se invierte la ec.(3.34) se halla el tensor de tensiones efectivas elástico  $\boldsymbol{\sigma}_e$

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (3.36)$$

donde

$$\mathbf{C}_e = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G \mathbf{I}^{dev} \quad (3.37)$$

es el tensor de cuarto orden elástico.

Se debe tener en cuenta que  $K \rightarrow \infty$  cuando la oblicuidad alcanza el valor límite [49]

$$r_{lim} \rightarrow \sqrt{\frac{4S}{[m(m-1)]}} \quad (3.38)$$

Aunque este valor umbral no se alcanza en los casos de aplicación práctica, se la tiene en cuenta como parámetro de control en la formulación numérica del modelo.



### 3.3. Formulación numérica

#### 3.3.1. Algoritmo de actualización hiperelástica

Ahora se presenta el algoritmo de integración para el modelo planteado entre el paso  $n$  y el paso  $n + 1$ . Este algoritmo es implícito; todas las variables se evalúan en  $n+1$  ( $\bullet$ ). Por simplicidad se omite este superíndice en lo que sigue. Entonces; se debe calcular  $\sigma_e$  tal que

$$\epsilon_e = \mathbf{C}_e^{-1} : \sigma_e \quad (3.39)$$

La integración se realiza a  $\Delta \epsilon$  constante y el algoritmo se formula en base a un esquema iterativo de Newton-Raphson; en el siguiente cuadro se muestra la estructura básica del algoritmo.

#### Algoritmo de actualización hiperelástica

1. Se inicializan las funciones de estado

a) Se parte de un estado convergido:  $\{ {}^n \sigma_e^{(0)}, {}^n e_0^{(0)}, {}^n p^{(0)} \}$ ;

b) Se elige una cota inferior de la presión  $p_{inf}^{(0)}$  y una cota superior  $p_{sup}^{(0)}$  lo suficiente amplias;

2. Se impone un desplazamiento  $\Delta \epsilon$ ;

3. Se calculan las funciones de estado:  $\{ \mathbf{s}^{(0)}, r^{(0)}, G^{(0)}, K^{(0)}, \mathbf{C}^{e(0)} \}$ ;

4. Se calcula el residuo:  $R^{(0)} = p^{(0)} - K^{(0)} \epsilon_e^v$ ;

5. Se corrigen los bordes:

$$R^{(0)} < 0 \implies p_{inf}^{(0)} = \max \left[ p_{inf}^{(0)}, p^{(0)} \right];$$

$$R^{(0)} > 0 \implies p_{max}^{(0)} = \min \left[ p_{sup}^{(0)}, p^{(0)} \right];$$

6. MIENTRAS  $\text{abs} [R^{(0)}] > TOL$

a) SI  $r < r_{lim}$ , se calcula  $p^{(i+1)} = p^{(i)} - R^{(i)} / (\partial R^{(i)} / \partial p)$ , EN OTRO CASO  $p^{(i+1)} = \sqrt{p_{inf}^{(i)} p_{sup}^{(i)}}$ ;

b) Se controlan los bordes: Si  $p^{(i+1)} > p_{sup}^{(i)} \vee p^{(i+1)} < p_{inf}^{(i)} \implies p^{(i+1)} = \sqrt{p_{inf}^{(i)} p_{sup}^{(i)}}$ ;

c) Se actualizan:  $\{ \mathbf{s}^{(i+1)}, r^{(i+1)}, G^{(i+1)}, K^{(i+1)} \}$ ;

d) Se calcula el residuo:  $R^{(i+1)} = p^{(i+1)} - K^{(i+1)} \epsilon_{ev}$ ;

- e) Se corrigen los bordes:  
 $R^{(0)} < 0 \implies p_{inf}^{(0)} = \text{máx} [p_{inf}^{(0)}, p^{(0)}];$   
 $R^{(0)} > 0 \implies p_{max}^{(0)} = \text{mín} [p_{sup}^{(0)}, p^{(0)}];$   
f) Se incrementa  $i$  y se itera

En la Fig.3.2 se muestra la respuesta del algoritmo para un ensayo de compresión isotrónica. Se adoptaron los siguientes parámetros materiales:  $e_{min} = 0,58$ ,  $e_{max} = 0,98$ ,  $c_s = 840$ ,  $c_e = 2,17$  y  $m = 0,5$  y tres densidades relativas distintas.

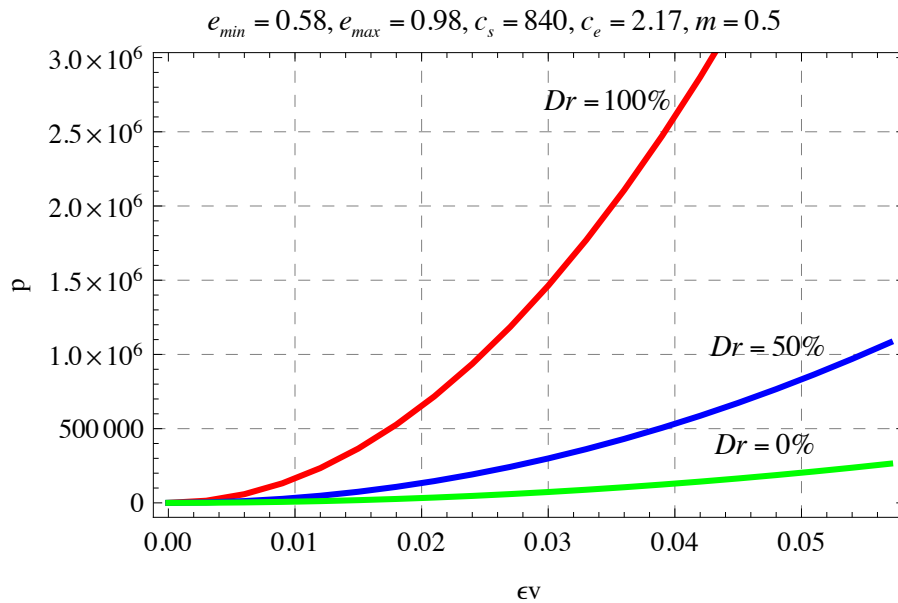


Figura 3.2: Ensayo de compresión isotrónica. Respuesta hiperelástica.

### 3.3.2. Análisis del error

En la Fig.3.3 se grafica  $\log_{10}(\text{error})$  en función de la cantidad de iteraciones para tres densidades relativas diferentes. Se adoptaron los siguientes parámetros materiales:  $e_{min} = 0,58$ ,  $e_{max} = 0,98$ ,  $c_s = 840$ ,  $c_e = 2,17$  y  $m = 0,5$ . Para el cálculo del error se toma la siguiente expresión

$$\text{error} = \frac{|R(p)|}{p} \quad (3.40)$$

donde  $R(p) = p - K \epsilon_e^v$  es el residuo correspondiente a cada paso de iteración.

Este gráfico ilustra como disminuye el exponente del error a medida que va aumentando la cantidad de iteraciones, se observa que las curvas obtenidas son las típicas para un esquema iterativo de Newton-Raphson.

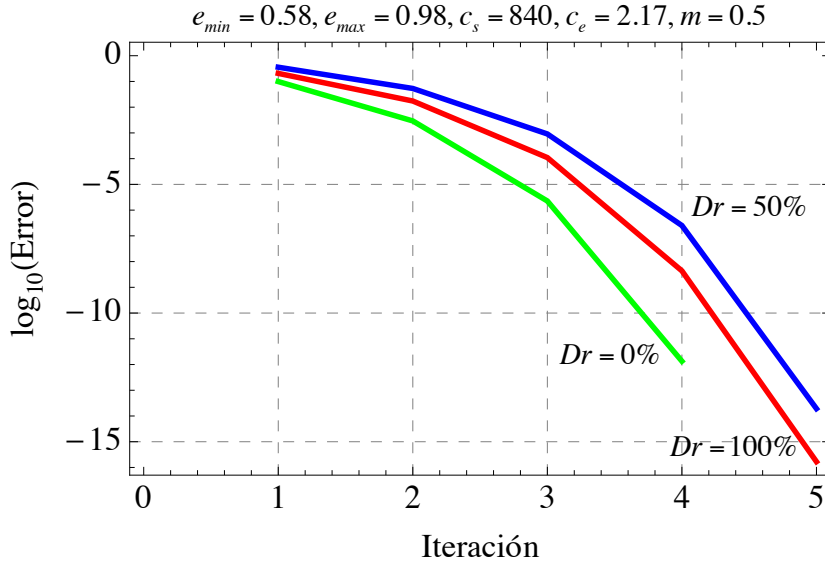


Figura 3.3:  $\log_{10}(\text{error})$  – Iteraciones.

### 3.3.3. Consideraciones sobre la implementación numérica del modelo

El modelo hiperelástico de Molenkamp considera que  $p > 0$  y que  $K > 0$ , por lo tanto se debe garantizar que estas dos condiciones se cumplan en todo momento, tanto dentro como fuera del bucle de Newton-Raphson. Otro factor a tener en cuenta es la derivada del residuo ( $R^{(i)}$ ). En la Fig.3.4 se puede observar que la función no es derivable para todo valor de  $p$ ; por lo tanto, al aplicar el Método de Newton-Raphson hay que controlar que los valores de  $p$  no caigan cerca de los puntos donde la función residuo se hace asintótica y tiende a  $\infty$ . Un criterio para detectar estos casos es usar la oblicuidad límite ( $r_{lim}$ ) que es valor para el cuál el residuo diverge. Lo que se propuso en este trabajo es: si la oblicuidad es menor que la oblicuidad límite, realizar la integración de Newton-Raphson y en caso contrario actualizar el valor de la presión  $p$  con un criterio de bisección, en el que no se utiliza la derivada de la función residuo.

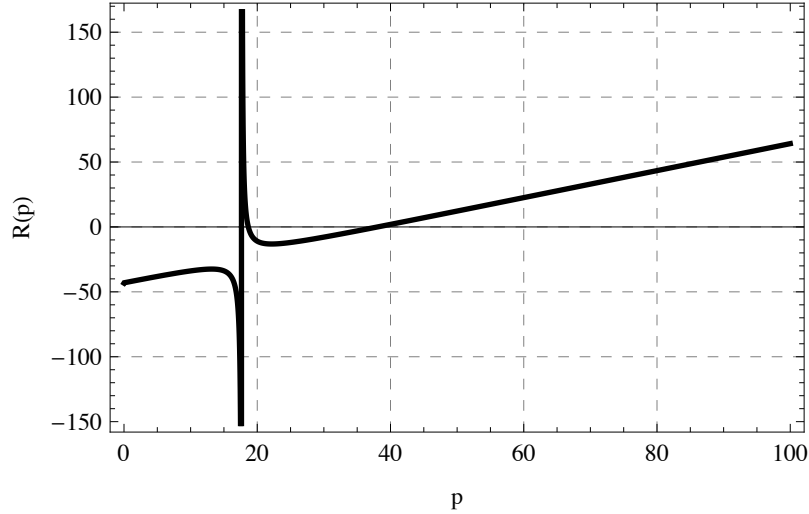


Figura 3.4: Valor del residuo en función de la presión.

### 3.3.4. Implementación del método de la bisección

En el listado del algoritmo se observa que se adopta un intervalo de presión inicial amplio, esto trae un gran inconveniente a la hora de aplicar el Método de Newton-Raphson, pues este converge cuando la solución se encuentra dentro del radio de convergencia. Es por este motivo que se debe elegir un método de refinamiento inicial como una bisección. El método de bisección clásico, se puede escribir de la siguiente manera

$$p^{(i+1)} = \frac{p_{sup}^{(i)} + p_{inf}^{(i)}}{2} \quad (3.41)$$

Este esquema iterativo genera la siguiente sucesión

$$\{p_1\}_{n=1}^{\infty} = \frac{p_{sup}^{(n)} + p_{inf}^{(n)}}{2^n} \quad (3.42)$$

Si se toma  $p_{sup}^{(n)} = 10^k$  y se mantiene  $p_{inf}^{(n)} = 0$ , se tiene

$$\{p_1\}_{n=1}^{\infty} = \frac{10^k}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.43)$$

En la Fig.3.5 se grafican los valores que toma la sucesión dada por la ec.(3.43) para  $k = 100$  en función de la cantidad de iteraciones  $n$ , se puede observar que esta sucesión necesita una gran cantidad de iteraciones para converger al valor cero. Por lo tanto, se consumen muchas iteraciones antes que el intervalo se refine lo suficiente para aplicar Newton-Raphson.

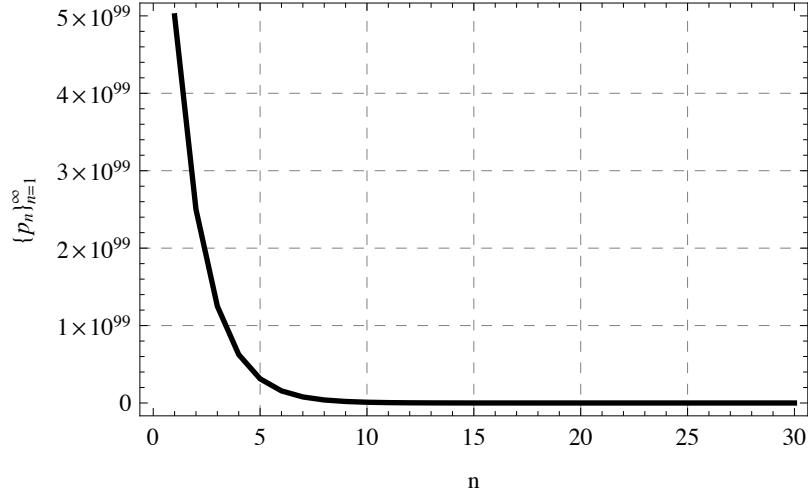


Figura 3.5: Sucesión del método de bisección clásico en función de la cantidad de iteraciones.

Se puede solucionar este inconveniente, si se reemplaza la ec.(3.42) por

$$p^{(i+1)} = \sqrt{p_{sup}^{(i)} p_{inf}^{(i)}} \quad (3.44)$$

Si los bordes de presión  $p_{sup}$  y  $p_{inf}$  son potencias de 10, la ec.(3.44) equivaldría a hacer una bisección en el exponente, entonces

$$p^{(i+1)} = 10^{\frac{k+k'}{2}} \quad (3.45)$$

Este esquema iterativo genera la siguiente sucesión

$$\{p_2\}_{n=1}^{\infty} = 10^{\frac{k+k'}{2^n}} \quad (3.46)$$

Si se toma  $k' = 0$ , se tiene

$$\{p_2\}_{n=1}^{\infty} = 10^{\frac{k}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (3.47)$$

Para poder comparar las sucesiones dadas por las ecs.(3.43) y (3.47), se reescala la ec.(3.47) mediante

$$\{p_2\}_{n=1}^{\infty} = 10^{\frac{k}{2^n}} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.48)$$

En la Fig.3.6 se grafican los valores que toma la sucesión dada por la ec.(3.48) para  $k = 100$  en función de la cantidad de iteraciones  $n$ ; se puede observa que esta sucesión necesita una

menor cantidad de iteraciones para converger al valor cero. Como para escalarla se utilizó una constante, se puede concluir que la sucesión dada por la ec.(3.48) posee convergencia superlineal<sup>1</sup>, mientras que la sucesión dada por la ec.(3.43) sólo posee convergencia lineal. Es decir, mediante esta técnica se logra reducir la cantidad de iteraciones necesarias para refinar el intervalo de presiones adoptado inicialmente.

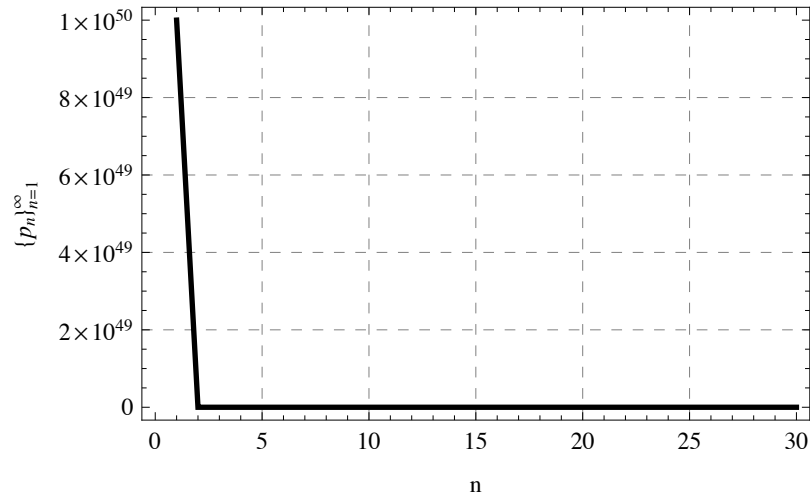


Figura 3.6: Sucesión del método de bisección modificado en función de la cantidad de iteraciones.

---

<sup>1</sup>Se dice que una sucesión  $\{p_n\}$  es superlinealmente convergente a  $p$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = 0$

# Capítulo 4

## Elastoplasticidad asociada

### 4.1. Introducción

En este Capítulo se estudia la teoría de la elastoplasticidad local, asociada e independiente de la velocidad (*rate independent*). Se hace especial hincapié en el criterio de falla de von Mises que capta adecuadamente el comportamiento de materiales cristalinos como los metales. Debido a las experiencias Bridgman la fluencia de un acero no depende de la presión de confinamiento a la que esté sometido; por lo tanto, los modelos constitutivos elastoplásticos que se presentan en este Capítulo no son sensibles a las variaciones de presión. Se abandona la convención de signo adoptada por la Mecánica de Suelos en todo este Capítulo;  $\sigma$  es el tensor de tensiones de Cauchy.

En principio, se comienza a estudiar un problema unidimensional con el fin de introducir el marco teórico necesario; luego se extiende la teoría al espacio de tensiones. La formulación numérica de los problemas de elastoplasticidad conducen a los *Algoritmos de Retorno*.

La motivación de este Capítulo es definir los conceptos básicos de la teoría de la plasticidad clásica y su formulación numérica aplicada a un modelo constitutivo simple. El criterio de von Mises pertenece a la familia de funciones de fluencia  $J_2$  (funciones de fluencia que dependen del segundo invariante del tensor de tensiones deviatoricas); estas funciones presentan variación de curvatura constante y simetría en el plano deviatorico, lo que permite la formulación de algoritmos simples.

En el Anexo C.1 se estudian brevemente las bases termodinámicas generales para los procesos irreversibles (plásticos) y se deducen las leyes de evolución de variables internas del sistema.

## 4.2. Plasticidad asociada para un problema unidimensional

### 4.2.1. Generalidades

El problema unidimensional que se propone consiste en analizar el comportamiento de una barra de acero de tensión de fluencia  $\sigma_Y$  y módulo de elasticidad o módulo de Young  $E$  conocidos; sometida a un ensayo axial, que puede ser tanto de tracción como de compresión. Un modelo constitutivo para material elastoplástico debe ser capaz de describir las siguientes observaciones experimentales [48]:

1. Para cargas por debajo de una cierta condición límite, que se establece por medio de un *criterio de falla*, se observa que el comportamiento del material es elástico.
2. Cuando se alcanza la condición límite se produce una deformación que es *permanente* o *plástica*.
3. Las deformaciones plásticas producen una evolución de la condición de falla la cual se describe mediante una *ley de endurecimiento*.
4. Cuando se alcanza la condición límite y luego se produce una descarga, las deformaciones producidas son elásticas.
5. El comportamiento del material es *estacionario*.
6. El material es estable, es decir se debe entregar trabajo para deformarlo.

Se asume que la cinemática del problema corresponde a deformaciones infinitesimales, en la que es válida la descomposición aditiva de la deformación axial en una componente elástica y otra componente plástica

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (4.1)$$

Se describe a la relación tensión-deformación en el rango elástico, mediante la Ley de Hooke unidimensional; teniendo en cuenta la ec.(4.1) esta la ecuación constitutiva elástica se escribe como

$$\sigma_e = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (4.2)$$

### 4.2.2. Formulación continua para elastoplasticidad

La formulación de un modelo constitutivo elastoplástico consta de tres componentes [16]:



1. La *función de fluencia*: que describe la ubicación de los puntos donde se inicia el comportamiento plástico.
2. La *regla de flujo*: que es la encargada de describir la evolución de las deformaciones plásticas.
3. La *ley de endurecimiento*: que describe la evolución de la función de fluencia durante el proceso de deformación plástica.

### Función de fluencia

Se define a la función de fluencia en forma genérica como

$$F_f(\sigma, \psi_i, i = 1 \dots n) \quad (4.3)$$

donde  $\sigma$  es la tensión, que en este caso es un escalar, y  $\psi_i$  tiene en cuenta parámetros del material. Esta función cumple con las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} F_f &< 0 && \text{si } \sigma < \sigma_Y \\ F_f &= 0 && \text{si } \sigma > \sigma_Y \\ F_f &> 0 && \text{no es posible} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Se adopta la *función de fluencia de von Mises* que viene dada, por

$$F_f = \sqrt{J_2} + k \quad (4.5)$$

donde  $k$  viene dada por la siguiente expresión

$$k = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad (4.6)$$

y  $J_2$  es el segundo invariante del tensor deviatorico de tensiones  $\mathbf{s}$ , por lo tanto la función de von Mises adquiere la siguiente forma

$$F_f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbf{s} : \mathbf{s}^T)} - \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad (4.7)$$

Se particulariza la ec.(4.7) para un ensayo axil, entonces

$$\sigma_1 = \sigma \quad s_1 = \frac{2}{3}\sigma \quad (4.8)$$

$$\sigma_2 = 0 \quad s_2 = -\frac{\sigma}{3} \quad (4.9)$$

$$\sigma_3 = 0 \quad s_3 = -\frac{\sigma}{3} \quad (4.10)$$

donde  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  son las tensiones principales del tensor de tensiones de Cauchy y  $s_1, s_2, s_3$  sus respectivas tensiones deviatoricas principales.

Considerando las ecs.(4.8), (4.9) y (4.10), la función de fluencia para el caso unidimensional queda

$$F_f(\sigma) = \frac{|\sigma|}{\sqrt{3}} - \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad (4.11)$$

### Regla de flujo

El flujo plástico del material es un proceso irreversible y disipativo entonces, existe una *disipación plástica* por unidad de volumen. Para el caso particular de los metales [16] [20] [28] se puede demostrar que el flujo plástico se produce de manera tal que se maximice la disipación plástica sujeta a la restricción  $F_f = 0$ . En el Anexo C.1 se deduce la forma general para la regla de flujo, que para el caso unidimensional se escribe

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial F_f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \frac{\text{sign}(\sigma)}{\sqrt{3}} \quad (4.12)$$

donde

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq 0 \\ -1 & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

donde  $\dot{\lambda}$  es *multiplicador plástico* y cumple con las siguientes condiciones

$$F_f(\sigma) < 0 \implies \dot{\lambda} = 0 \text{ (elástico)}$$

$$F_f(\sigma) = 0 \implies \dot{\lambda} > 0 \text{ (plástico)}$$

Los requisitos anteriores se resumen en las *condiciones complementarias de Khun-Tucker*:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad (4.14)$$

$$F_f(\sigma) \leq 0 \quad (4.15)$$

$$\dot{\lambda} F_f(\sigma) = 0 \quad (4.16)$$

Existe una cuarta condición [16] [48] conocida como *condición de persistencia* expresada por

$$\dot{\lambda} \dot{F}_f(\sigma) = 0 \quad (4.17)$$

### Ley de endurecimiento

Una ley de endurecimiento es aquella que cuantifica la evolución de la función de fluencia debido a la acumulación de flujo plástico.

Las tres leyes de endurecimiento básicas son: i) endurecimiento isotrópico; ii) endurecimiento cinemático y iii) endurecimiento combinado (isotrópico y cinemático). La diferencia entre las leyes de endurecimiento isotrópico y cinemático es que la primera expande a la superficie de fluencia dada por  $F_f = 0$  mientras que la segunda la desplaza, lo cual permite captar el característico *efecto Bauschinger* típico en los metales [11] [16] [20] [28].

Las leyes de endurecimiento modifican la estructura matemática de la función de fluencia; a continuación se definen las leyes de endurecimiento enunciadas y su influencia sobre la función de fluencia:

1. **Endurecimiento isotrópico:** Se considera la ley de endurecimiento lineal dada por

$$K(\alpha) = \sigma_Y^0 + K_c \alpha \quad (4.18)$$

$$F_f(\sigma, \alpha) = \frac{|\sigma|}{\sqrt{3}} - \frac{K(\alpha)}{\sqrt{3}} \quad (4.19)$$

donde  $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de la cantidad de flujo plástico y se la denomina variable interna de endurecimiento [48];  $K_c$  es el módulo de endurecimiento isotrópico y se lo considera constante.  $\alpha$  tiene la siguiente ecuación de evolución

$$\dot{\alpha} = |\dot{\epsilon}_p| = \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{3}} \quad (4.20)$$

## 2. Endurecimiento cinemático:

$$F_f(\sigma, q) = \frac{|\sigma - q|}{\sqrt{3}} - \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad (4.21)$$

donde  $q$  es una variable del tipo tensión denominada *back stress* [16] [48] y define la posición del centro de la superficie de fluencia.  $q$  tiene la siguiente ecuación de evolución

$$\dot{q} = H \dot{\varepsilon}^p = H \dot{\lambda} \frac{\text{sign}(\sigma)}{\sqrt{3}} \quad (4.22)$$

donde  $H$  es el módulo de endurecimiento cinemático.

## 3. Endurecimiento combinado:

$$F_f(\sigma, \alpha, q) = \frac{|\sigma - q|}{\sqrt{3}} - \frac{K(\alpha)}{\sqrt{3}} \quad (4.23)$$

A modo de resumen, en los siguientes cuadros se sintetizan las formulaciones de elastoplasticidad perfecta, endurecimiento isotrópico, cinemático y combinado para el problema en estudio. Para más detalles se puede consultar [48].

### Plasticidad Perfecta:

1. Relación tensión-deformación elástica:  $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$
2. Dominio admisible:  $F_f(\sigma) = \frac{|\sigma|}{\sqrt{3}} - \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \leq 0$
3. Regla de flujo:  $\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial F_f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \frac{\text{sign}(\sigma)}{\sqrt{3}}$
4. Condiciones complementarias de Kuhn-Tucker:  
 $\dot{\lambda} F_f(\sigma) = 0, \dot{\lambda} \geq 0, F_f(\sigma) \leq 0$
5. Condición de persistencia:  $\dot{\lambda} \dot{F}_f(\sigma) = 0$

### Plasticidad con endurecimiento isotrópico:

1. Relación tensión-deformación elástica:  $\sigma = E (\varepsilon - \varepsilon_p)$

2. Dominio admisible:  $F_f(\sigma, \alpha) = \frac{|\sigma|}{\sqrt{3}} - \frac{\sigma_Y^0 + K_c \alpha}{\sqrt{3}} \leq 0$

3. Regla de flujo y evolución de la variable interna de endurecimiento:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\text{sign}(\sigma)}{\sqrt{3}}$$

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}_p| = \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{3}}$$

4. Condiciones complementarias de Khun-Tucker:

$$\dot{\lambda} F_f(\sigma, \alpha) = 0, \dot{\lambda} \geq 0, F_f(\sigma, \alpha) \leq 0$$

5. Condición de persistencia:  $\dot{\lambda} \dot{F}_f(\sigma, \alpha) = 0$

### Plasticidad con endurecimiento cinemático:

1. Relación tensión deformación elástica:  $\sigma = E (\varepsilon - \varepsilon_p)$

2. Dominio admisible:  $F_f(\sigma, q) = \frac{|\sigma - q|}{\sqrt{3}} - \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \leq 0$

3. Regla de flujo y la ley de endurecimiento cinemático:

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\text{sign}(\sigma - q)}{\sqrt{3}}$$

$$\dot{q} = H \dot{\varepsilon}_p = H \dot{\lambda} \frac{\text{sign}(\sigma - q)}{\sqrt{3}}$$

4. Condiciones complementarias de Khun-Tucker:

$$\dot{\lambda} F_f(\sigma, q) = 0, \dot{\lambda} \geq 0, F_f(\sigma, q) \leq 0$$

5. Condición de persistencia:  $\dot{\lambda} \dot{F}_f(\sigma, q) = 0$

### Plasticidad con endurecimiento combinado

1. Relación tensión-deformación elástica:  $\sigma = E (\varepsilon - \varepsilon_p)$
2. Regla de flujo:  $\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\text{sign}(\sigma - q)}{\sqrt{3}}$
3. Dominio admisible:  $F_f(\sigma, \alpha, q) = \frac{|\sigma - q|}{\sqrt{3}} - \frac{\sigma_Y^0 + K_c \alpha}{\sqrt{3}} \leq 0$
4. Evolución de la variable interna de endurecimiento y del back stress:

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{3}}$$

$$\dot{q} = H \dot{\lambda} \frac{\text{sign}(\sigma - q)}{\sqrt{3}}$$

5. Condiciones complementarias de Khun-Tucker:

$$\dot{\lambda} F_f(\sigma, \alpha, q) = 0, \dot{\lambda} \geq 0, F_f(\sigma, \alpha, q) \leq 0$$

6. Condición de persistencia:  $\dot{\lambda} \dot{F}_f(\sigma, \alpha, q) = 0$

### 4.2.3. Multiplicador plástico consistente.

La formulación continua de elastoplasticidad depende de una sola variable, el multiplicador plástico  $\dot{\lambda}$ . Si se considera un proceso de deformación plástica, las ecs.(4.14), (4.15) y (4.16) indican que  $F_f \geq 0$  y que  $\dot{\lambda} > 0$ ; por lo tanto, en vista de la ec.(4.17) se deduce que

$$\dot{F}_f = 0 \tag{4.24}$$

A la ec.(4.24) se la conoce como *condición de consistencia*.

Si se desarrolla  $\dot{F}_f$  considerando un modelo de plasticidad con endurecimiento combinado y aplicando la regla de la cadena para la derivación, se obtiene

$$\dot{F}_f = \frac{\partial F_f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial F_f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F_f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0 \tag{4.25}$$

donde

$$\frac{\partial F_f}{\partial \sigma} = \frac{\text{sign}(\sigma)}{\sqrt{3}} \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial F_f}{\partial q} = -\frac{\text{sign}(q)}{\sqrt{3}} \quad (4.27)$$

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_p) \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial F_f}{\partial \alpha} = -\frac{K_c}{\sqrt{3}} \quad (4.29)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{3}} \quad (4.30)$$

Reemplazando las ecs.(4.20), (4.22), (4.26), (4.27), (4.28) y (4.29) en la ec.(4.25) y despejando  $\dot{\lambda}$  se obtiene que el multiplicador plástico consistente es

$$\dot{\lambda} = \frac{\sqrt{3} \text{sign}(\sigma - q) E \dot{\epsilon}}{E + (H + K_c)} \quad (4.31)$$

La ec.(4.31) representa el caso más general, se puede particularizar al multiplicador plástico consistente para plasticidad perfecta haciendo  $q = H = K_c = 0$

$$\dot{\lambda} = \sqrt{3} \text{sign}(\sigma) \dot{\epsilon} \quad (4.32)$$

#### 4.2.4. Módulo elastoplástico tangente

La relación constitutiva tangente se define como

$$\dot{\sigma} = E_{ep} \dot{\epsilon} \quad (4.33)$$

donde  $E_{ep}$  es el módulo elastoplástico tangente.

Partiendo de la ec.(4.28) y reemplazando en ella la regla de flujo dada por la ec.(4.12) se obtiene

$$\dot{\sigma} = E \left( \dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \frac{\text{sign}(\sigma - q)}{\sqrt{3}} \right) \quad (4.34)$$

Reemplazando en la ec.(4.34) el multiplicador plástico consistente dado por la ec.(4.31) se tiene

$$\dot{\sigma} = \left[ \frac{E(H + K_c)}{E + (H + K_c)} \right] \dot{\epsilon} \quad (4.35)$$

Comparando las ecs.(4.33) y (4.35), se deduce que el módulo elastoplástico tangente  $E_{ep}$  tiene la siguiente estructura

$$E_{ep} = \frac{E(H + K_c)}{E + (H + K_c)} \quad (4.36)$$

Es decir, en todo el proceso de carga, la relación constitutiva tangente varía según lo hace el módulo elastoplástico tangente

$$E_{ep} = \begin{cases} E & \text{si } \dot{\lambda} = 0 \\ \frac{E(H + K_c)}{E + (H + K_c)} & \text{si } \dot{\lambda} > 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

#### 4.2.5. Formulación numérica para elastoplasticidad

A continuación se realiza la formulación numérica del modelo constitutivo de elastoplasticidad con endurecimiento combinado [48] que es el más general, los demás modelos se pueden obtener como casos particulares de este. Se asume que se conoce en el instante  ${}^n t$  el estado local del problema, es decir se conocen las variables de estado en un instante  ${}^n t$

$$\{ {}^n \sigma, {}^n \alpha, {}^n q, {}^n \varepsilon_p \} \quad (4.38)$$

Entonces, el problema consiste en: dado un incremento de deformación  $\Delta \varepsilon$ , hallar las variables de estado en  ${}^{n+1} t$ .

$$\{ {}^{n+1} \sigma, {}^{n+1} \alpha, {}^{n+1} q, {}^{n+1} \varepsilon_p \} \quad (4.39)$$

A este modelo elastoplástico incremental se lo conoce como un proceso *strain-driven* (controlado por deformación) en el cual la deformación total es la única variable independiente. Las formulaciones numéricas que resuelven este tipo de problemas, se las conoce como *Algoritmos de Retorno*. De la *regla generalizada del punto medio* [48] se pueden deducir los esquemas clásicos de integración para problemas de valores iniciales.

#### Regla generalizada del punto medio

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave, se tiene en cuenta el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t)] \\ x(0) = {}^n x \end{cases} \quad \text{en } [0, T] \quad (4.40)$$



la regla generalizada del punto medio viene dada por

$$\begin{aligned} {}^{n+1}x &= {}^n x + \Delta t f({}^{n+\vartheta}x) \\ {}^{n+\vartheta}x &= \vartheta {}^{n+1}x + (1 - \vartheta) {}^n x; \vartheta \in [0, 1] \end{aligned} \quad (4.41)$$

y genera una familia de esquemas iterativos que vienen dados en función de  $\vartheta$  [10] [48]; los más conocidos son

$$\begin{aligned} \vartheta = 0 &\implies \text{Método de Euler explícito} \\ \vartheta = \frac{1}{2} &\implies \text{Regla del punto medio} \\ \vartheta = 1 &\implies \text{Método de Euler implícito} \end{aligned}$$

Para valores de  $\vartheta \geq \frac{1}{2}$  los esquemas de integración son incondicionalmente estables, para el caso particular que  $\vartheta = \frac{1}{2}$  se obtiene convergencia cuadrática; para valores de  $\vartheta < \frac{1}{2}$  los esquemas de integración son condicionalmente estables. En [10] se discute sobre la estabilidad y convergencia de cada uno de estos algoritmos.

### Problema de valor inicial elastoplástico incremental.

Adoptando  $\vartheta = 1$ , que corresponde al Método de Euler implícito, y teniendo en cuenta el cuadro de resumen de la formulación del modelo elastoplástico con endurecimiento combinado se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones incrementales

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\varepsilon_p &= {}^n \varepsilon_p + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} \text{sign}({}^{n+1}\sigma - {}^{n+1}q) \\ {}^{n+1}\alpha &= {}^n \alpha + {}^{n+1} \Delta\alpha = {}^n \alpha + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} \\ {}^{n+1}q &= {}^n q + {}^{n+1} \Delta q = {}^n q + H \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} \text{sign}({}^{n+1}\sigma - {}^{n+1}q) \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde  $\Delta\lambda = {}^{n+1}\lambda \Delta t \geq 0$  es la contrapartida algorítmica del multiplicador plástico  $\dot{\lambda}$  y

$${}^{n+1}\sigma = E({}^{n+1}\varepsilon - {}^{n+1}\varepsilon_p) \quad (4.43)$$

$${}^{n+1}\varepsilon = {}^n\varepsilon + \Delta\varepsilon$$

Las variables  $({}^{n+1}\sigma, {}^{n+1}\alpha, {}^{n+1}q)$  así como  $\Delta\lambda$  se encuentran condicionadas por la versión discreta de la condición de consistencia y las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker que vienen dada por

$$\begin{aligned} {}^{n+1}F_f &= \frac{|{}^{n+1}\sigma - {}^{n+1}q|}{\sqrt{3}} - \frac{(\sigma_Y^0 + K_c {}^{n+1}\alpha)}{\sqrt{3}} = 0 \\ \Delta\lambda &\geq 0 \\ \Delta\lambda {}^{n+1}F_f &= 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Se observa que  $\Delta\varepsilon$  es un valor conocido; por lo tanto, la ec.(4.43)<sub>2</sub> define a  ${}^{n+1}\varepsilon$ . Es más, se observa que aplicando Método de Euler implícito, se transforma el problema condicionado de evolución en un problema condicionado algebraico discreto para las variables  $\{{}^{n+1}\alpha, {}^{n+1}q, {}^{n+1}\varepsilon_p\}$ .

#### 4.2.6. Algoritmo de retorno. Endurecimiento combinado

Se define a la tensión relativa [48] como

$$\xi = \sigma - q \quad (4.45)$$

##### 4.2.6.1. Estado de prueba

El estado de prueba es aquel que se obtiene al congelar el flujo plástico en el intervalo  $[{}^nt, {}^{n+1}t]$  y se encuentra definido por

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\widehat{\sigma} &= E({}^{n+1}\varepsilon - {}^n\varepsilon_p) = {}^n\sigma + E\Delta\varepsilon \\ {}^{n+1}\widehat{\xi} &= {}^{n+1}\widehat{\sigma} - {}^nq \\ {}^{n+1}\widehat{\varepsilon}_p &= {}^n\varepsilon_p \\ {}^{n+1}\widehat{\alpha} &= {}^n\alpha \\ {}^{n+1}\widehat{q} &= {}^nq \\ {}^{n+1}\widehat{F}_f &= \frac{|{}^{n+1}\widehat{\xi}|}{\sqrt{3}} - \frac{\sigma_Y^0 - K_c {}^n\alpha}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Este estado se complementa mediante la forma algorítmica de las condiciones de carga y descarga dadas por

$${}^{n+1}\widehat{F}_f \begin{cases} \leq 0 & \implies \text{paso elástico } \Delta\lambda = 0 \\ \geq 0 & \implies \text{paso plástico } \Delta\lambda > 0 \end{cases} \quad (4.47)$$

#### 4.2.6.2. Formulación incremental de elastoplasticidad

Teniendo en cuenta las ecs.(4.42), (4.43) y (4.46) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$${}^{n+1}\sigma = {}^{n+1}\widehat{\sigma} - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} E \text{sign} ({}^{n+1}\xi) \quad (4.48)$$

$${}^{n+1}\varepsilon_p = {}^n\varepsilon_p + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} \text{sign} ({}^{n+1}\xi) \quad (4.49)$$

$${}^{n+1}\alpha = {}^n\alpha + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} \quad (4.50)$$

$${}^{n+1}\mathbf{q} = {}^n\mathbf{q} + H \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} \text{sign} ({}^{n+1}\xi) \quad (4.51)$$

$${}^{n+1}F_f = \frac{|{}^{n+1}\xi|}{\sqrt{3}} - \frac{(\sigma_Y^0 + K_c {}^{n+1}\alpha)}{\sqrt{3}} \quad (4.52)$$

donde

$${}^{n+1}\xi = {}^{n+1}\sigma - {}^{n+1}\mathbf{q} \quad (4.53)$$

Remplazando las ecs.(4.51), (4.48) y (4.46)<sub>2</sub> en la ec.(4.53) se tiene

$${}^{n+1}\xi = {}^{n+1}\widehat{\xi} - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} (E + H) \text{sign} ({}^{n+1}\xi) \quad (4.54)$$

#### 4.2.6.3. Multiplicador plástico algorítmico

Se puede reescribir a la ec.(4.54) de la siguiente manera

$$|{}^{n+1}\xi| \text{sign} ({}^{n+1}\xi) = |{}^{n+1}\widehat{\xi}| \text{sign} ({}^{n+1}\widehat{\xi}) - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} (E - H) \text{sign} ({}^{n+1}\xi) \quad (4.55)$$

Agrupando términos

$$\left( |{}^{n+1}\xi| + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}}(E + H) \right) \text{sign}({}^{n+1}\xi) = |{}^{n+1}\widehat{\xi}| \text{sign}({}^{n+1}\widehat{\xi}) \quad (4.56)$$

Como  $\Delta\lambda > 0$  y  $H + E > 0$ , se debe cumplir que  $\text{sign}({}^{n+1}\xi) > 0$ , por lo tanto

$$\text{sign}({}^{n+1}\xi) = \text{sign}({}^{n+1}\widehat{\xi}) \quad (4.57)$$

Entonces la ec.(4.56) queda,

$$|{}^{n+1}\xi| + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}}(E + H) = |{}^{n+1}\widehat{\xi}| \quad (4.58)$$

La ec.(4.52) se puede expresar como

$$\begin{aligned} {}^{n+1}F_f &= \frac{|{}^{n+1}\widehat{\xi}|}{\sqrt{3}} - \frac{\Delta\lambda}{3}(E + H) - \frac{(\sigma_Y^0 + K_c {}^{n+1}\alpha)}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{|{}^{n+1}\widehat{\xi}|}{\sqrt{3}} - \frac{\Delta\lambda}{3}(E + H) - \frac{(\sigma_Y^0 + K_c \alpha_n)}{\sqrt{3}} - \frac{K_c}{\sqrt{3}}({}^{n+1}\alpha - {}^n\alpha) \end{aligned} \quad (4.59)$$

dado que  ${}^{n+1}\alpha - {}^n\alpha = {}^{n+1}\Delta\alpha = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}}$ , entonces

$${}^{n+1}F_f = {}^{n+1}\widehat{F}_f - \frac{\Delta\lambda}{3}(E + H + K_c) \quad (4.60)$$

Debido a que en estado plástico se debe cumplir la condición de consistencia incremental  ${}^{n+1}F_f = 0$ , se puede despejar el multiplicador plástico algorítmico que viene dado por

$$\Delta\lambda = \frac{3 {}^{n+1}\widehat{F}_f}{E + H + K_c} \quad (4.61)$$

Notar que el multiplicador plástico algorítmico, difiere del multiplicador plástico consistente; esto se debe a que para calcular  $\dot{\lambda}$  se impone la condición de consistencia continua, mientras que para hallar  $\Delta\lambda$  se impone la condición de consistencia incremental  ${}^{n+1}F_f = 0$ .

### 4.2.7. Algoritmo de Retorno

Teniendo en cuenta todo lo expuesto, se construye un cuadro donde se muestra la estructura del *Algoritmo de Retorno* para un problema de elastoplasticidad unidimensional.

#### Algoritmo de Retorno unidimensional

1. Dado  $\{^n\varepsilon_p, ^n\alpha, ^nq\}$

2. Calcular la tensión de prueba:

$$^{n+1}\widehat{\sigma} = ^n\sigma + E \Delta\varepsilon; \quad ^{n+1}\widehat{\xi} = ^{n+1}\widehat{\sigma} - ^nq; \quad ^{n+1}\widehat{F}_f = \frac{|^{n+1}\widehat{\xi}|}{\sqrt{3}} - \frac{\sigma_Y^0 - K_c ^n\alpha}{\sqrt{3}}$$

3. SI  $^{n+1}\widehat{F}_f \leq 0 \implies \{^{n+1}\widehat{\sigma}, ^n\alpha, ^nq, ^n\varepsilon_p\}$ , EN OTRO CASO

a)  $\Delta\lambda = 3 \frac{^{n+1}\widehat{F}_f}{E + H + K_c} > 0;$

b)  $^{n+1}\sigma = ^{n+1}\widehat{\sigma} - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} E \text{sign} (^{n+1}\widehat{\xi});$

c)  $^{n+1}\varepsilon_p = ^n\varepsilon_p + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} \text{sign} (^{n+1}\widehat{\xi});$

d)  $^{n+1}q = ^nq + H \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} \text{sign} (^{n+1}\widehat{\xi});$

e)  $^{n+1}\alpha = ^n\alpha + \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}};$  & FIN.

### 4.2.8. Módulo algorítmico elastoplástico tangente.

Para completar el algoritmo, se calcula el módulo algorítmico elastoplástico tangente dado por

$$^{n+1}E_{ep} = \frac{\partial^{n+1}\sigma}{\partial^{n+1}\varepsilon} \quad (4.62)$$

que es necesario para asegurar la convergencia cuadrática del esquema iterativo global de Newton-Raphson que resuelve el problema de contorno no lineal mediante el Método de los Elementos Finitos; la noción de  $^{n+1}E_{ep}$  se introdujo por primera vez en Simo y Taylor (1986). El procedimiento que lleva a una forma cerrada para  $^{n+1}E_{ep}$  consiste en diferenciar a la expresión de  $^{n+1}\sigma$  dada por

$${}^{n+1}\sigma = {}^{n+1}\widehat{\sigma} - \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} E \operatorname{sign} \left( {}^{n+1}\widehat{\xi} \right) \quad (4.63)$$

donde

$${}^{n+1}\widehat{\xi} = {}^{n+1}\widehat{\sigma} - {}^n q \quad (4.64)$$

$${}^{n+1}\widehat{\sigma} = E \left( {}^{n+1}\varepsilon - {}^n \varepsilon_p \right) \quad (4.65)$$

Sumando y restando  ${}^n q$  en la ec.(4.63) y teniendo en cuenta la definición de la tensión relativa de prueba dada por ec.(4.64), se obtiene

$${}^{n+1}\sigma = {}^n q + \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda E}{|{}^{n+1}\widehat{\xi}|} \right] {}^{n+1}\widehat{\xi} \quad (4.66)$$

Entonces,

$$\frac{\partial {}^{n+1}\sigma}{\partial {}^{n+1}\varepsilon} = \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda E}{|{}^{n+1}\widehat{\xi}|} \right] \frac{\partial {}^{n+1}\widehat{\xi}}{\partial {}^{n+1}\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial {}^{n+1}\varepsilon} \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda E}{|{}^{n+1}\widehat{\xi}|} \right] \quad (4.67)$$

La derivada del primer término de la ec.(4.67) vale

$$\frac{\partial {}^{n+1}\widehat{\xi}}{\partial {}^{n+1}\varepsilon} = \frac{\partial {}^{n+1}\widehat{\sigma}}{\partial {}^{n+1}\varepsilon} = E \quad (4.68)$$

La derivada del segundo término de la ec.(4.67) vale

$$\frac{\partial}{\partial {}^{n+1}\varepsilon} \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda E}{|{}^{n+1}\widehat{\xi}|} \right] = \frac{\Delta\lambda E^2}{|{}^{n+1}\widehat{\xi}|} - \frac{E^2}{E + (K_c + H)} \quad (4.69)$$

Reemplazando las ecs.(4.68) y (4.69) en (4.67), se tiene

$$\frac{\partial {}^{n+1}\sigma}{\partial {}^{n+1}\varepsilon} = \frac{E (K_c + H)}{E + (K_c + H)} \quad (4.70)$$

Comparando las ecs.(4.70) y (4.36), se observa que el módulo algorítmico elastoplástico tangente coincide con el módulo elastoplástico tangente correspondiente a la formulación continua. Este hecho es válido sólo para el caso unidimensional pues, como se verá más adelante, para el caso tridimensional esta igualdad ya no se cumple.

### 4.2.9. Comportamiento del Algoritmo de Retorno

Se analiza la respuesta del algoritmo desarrollado bajo un régimen de carga cíclica (carga, descarga y recarga) y se presentan las diferentes respuestas para un material perfectamente plástico, con endurecimiento isotrópico, cinemático y combinado. Para todos los casos mencionados se presenta la respuesta del algoritmo para 1 ciclo, 5 ciclos y 10 ciclos de carga.

#### Material elastoplástico perfecto

En la Fig.4.1 se presenta la respuesta del algoritmo para un material elastoplástico perfecto con los siguientes parámetros materiales:  $\sigma_Y = 2400 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$  y  $E = 2,1 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ .

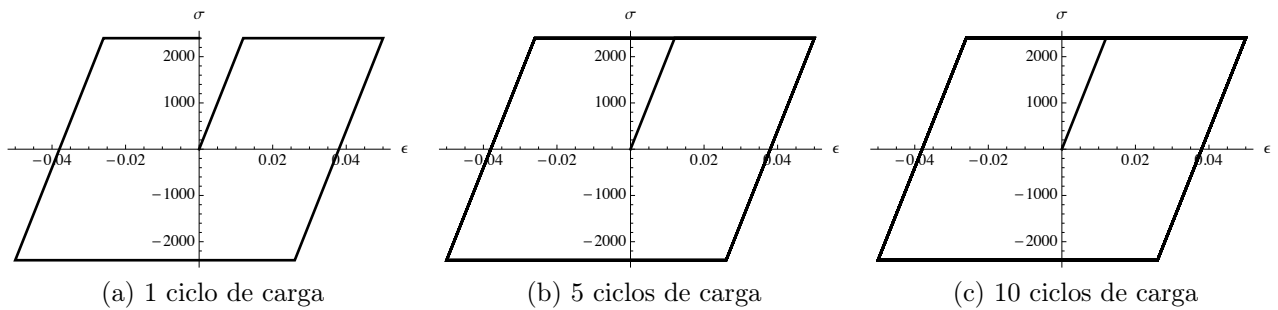


Figura 4.1: Respuesta del algoritmo. Material elastoplástico perfecto.

#### Material elastoplástico con endurecimiento isotrópico

En la Fig.4.2 se presenta las respuestas del algoritmo para un material elastoplástico con endurecimiento isotrópico con los siguientes parámetros materiales:  $\sigma_Y^0 = 2400 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $E = 2,1 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$  y  $K_c = 2,1 \times 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ .

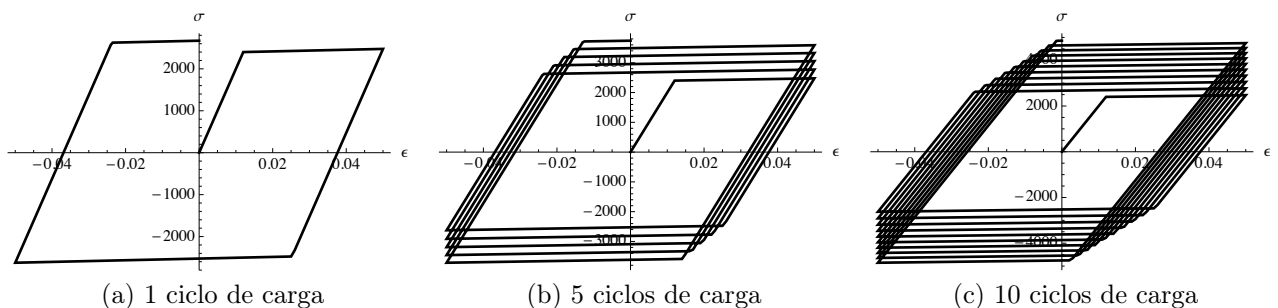


Figura 4.2: Respuesta del algoritmo. Material elastoplástico con endurecimiento isotrópico.

### Material elastoplástico con endurecimiento cinemático

En la Fig.4.3 se presenta la respuesta del algoritmo para un material elastoplástico con endurecimiento cinemático con los siguientes parámetros materiales:  $\sigma_Y = 2400 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $E = 2,1 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$  y  $H_c = 2,1 \times 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ .

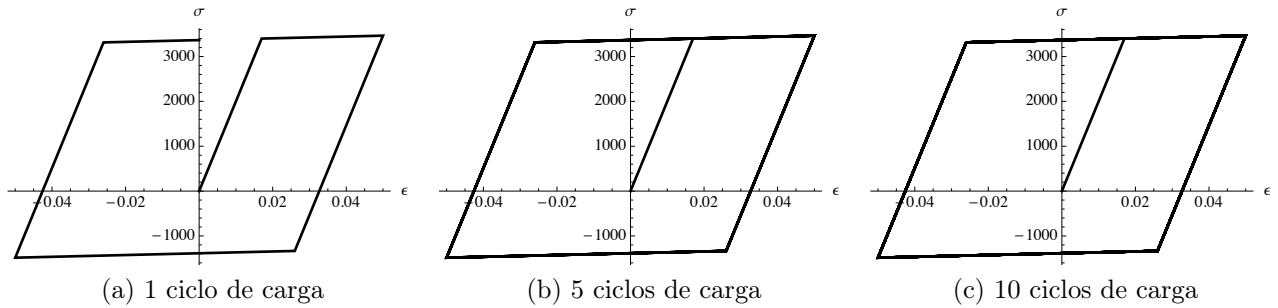


Figura 4.3: Respuesta del algoritmo. Material elastoplástico con endurecimiento cinemático.

### Material elastoplástico con endurecimiento combinado

En la Fig.4.4 se presenta la respuesta del algoritmo para un material elastoplástico con endurecimiento combinado con los siguientes parámetros materiales:  $\sigma_Y^0 = 2400 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $E = 2,1 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $K_c = 2,1 \times 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$  y  $H_c = 2,1 \times 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ .

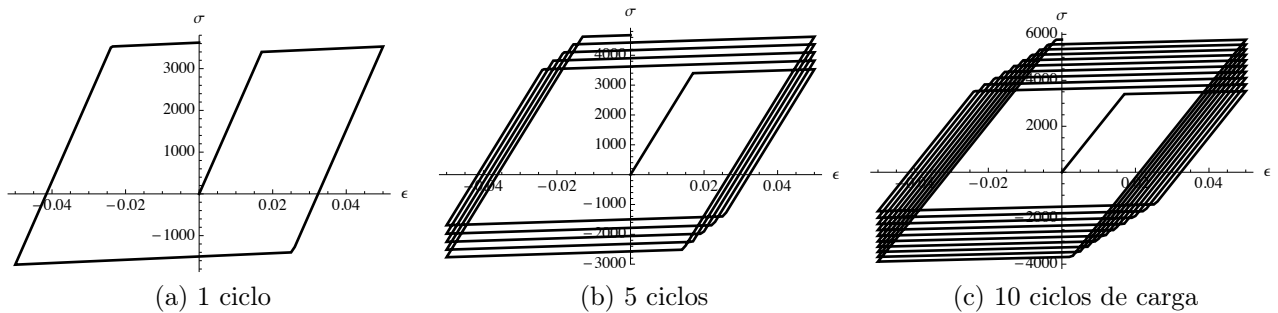


Figura 4.4: Respuesta del algoritmo. Material elastoplástico con endurecimiento combinado.

#### 4.2.10. Comentarios

En las Figs.4.5.a-c se grafican tres respuestas del algoritmo para un material perfectamente plástico; se observa que las respuestas no se ajustan a la curva teórica, esto se debe a que la cantidad de subincrementos de deformación no es suficiente para representar la totalidad de los puntos de la curva, sin embargo los puntos calculados son exactos y se corresponden con los valores teóricos.



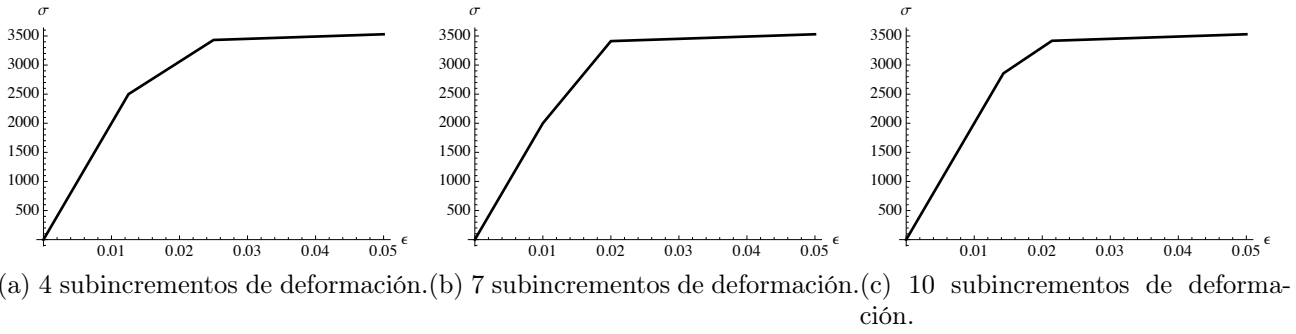


Figura 4.5: Respuesta del algoritmo. Dependencia de la cantidad de subincrementos de deformación.

## 4.3. Modelo constitutivo elastoplástico tridimensional

### 4.3.1. Generalidades

En esta Sección se generaliza el modelo unidimensional al caso tridimensional. Se supone que se cumplen las condiciones para un modelo constitutivo elastoplástico enumeradas en la Sección 4.2.1.

Se asume la cinemática correspondiente a deformaciones infinitesimales, en la que es válida la descomposición aditiva del tensor de deformaciones infinitesimales en una componente elástica y en otra componente plástica

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (4.71)$$

Para la respuesta elástica del material se adopta el modelo constitutivo elástico lineal que viene dado por

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (4.72)$$

Si se reemplaza la ec.(4.71) en la ec.(4.72) se obtiene

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{C}_e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (4.73)$$

donde  $\mathbf{C}_e$  es el tensor elástico de cuarto orden.

Para el caso un material isótropo,  $\mathbf{C}_e$  toma la forma dada en la ec.(3.3). Se asume que tanto el tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}_e$  y el tensor de deformaciones infinitesimales  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  son tensores simétricos, es decir  $\{\boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\varepsilon}_e\} \in \mathbb{S}$  donde  $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  es el subespacio de los tensores de segundo orden simétricos.

### 4.3.2. Formulación continua general para elastoplasticidad

Como se estableció en la Sección 4.2.2, para la formulación de un modelo para un material elastoplástico, se debe definir la función de fluencia, la regla de flujo y la ley de endurecimiento.

#### Función de fluencia

Sean  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\eta}$  el tensor de tensiones de Cauchy y un conjunto de variables internas que son función de  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  que captan la naturaleza disipativa del material [33] [48]. Se define una función  $F_f : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  llamada *función de fluencia o criterio de falla* y se fuerza a los estados admisibles definidos por  $\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}\} \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m$  en el espacio de tensiones, a caer dentro de un conjunto  $\mathbb{E}_\sigma$ , definido por

$$\mathbb{E}_\sigma = \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid F_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \leq 0\} \quad (4.74)$$

El interior del conjunto  $\mathbb{E}_\sigma$  se define como  $\text{int}(\mathbb{E}_\sigma)$  y viene dado por:

$$\text{int}(\mathbb{E}_\sigma) = \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid F_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) < 0\} \quad (4.75)$$

a este conjunto se lo llama *dominio elástico*.

La frontera del conjunto  $\mathbb{E}_\sigma$  se denomina *superficie de fluencia*, denota por  $\partial\mathbb{E}_\sigma$  y se define como

$$\partial\mathbb{E}_\sigma = \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid F_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = 0\} \quad (4.76)$$

Se debe cumplir que  $\mathbb{E}_\sigma = \text{int}(\mathbb{E}_\sigma) \cup \partial\mathbb{E}_\sigma$ , donde el operador  $\cup$  denota unión disjunta [24] [25]. Se observa que los estados  $\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}\}$  tales que  $F_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) > 0$  no son admisibles y son descartados en Plasticidad Clásica.

Se asume además que  $\mathbb{E}_\sigma$  cumple con las siguientes condiciones:

1. Es *Cerrado*, es decir, no se admiten estados de ruptura como parte de la frontera del dominio elástico.
2. Es *Convexo*, es decir, tomando dos estados que pertenezcan a  $\mathbb{E}_\sigma$  todos los estados  $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta})$  que se encuentran sobre la recta que los une pertenece a  $\mathbb{E}_\sigma$ . Matemáticamente esta condición se expresa como:

Sean dos estados definidos por

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}_1 &= (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\eta}_1) \in \mathbb{E}_\sigma \\ \mathbf{\Lambda}_2 &= (\boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\eta}_2) \in \mathbb{E}_\sigma\end{aligned}$$

Entonces  $\mathbf{\Lambda} = [\alpha \mathbf{\Lambda}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{\Lambda}_2] \in \mathbb{E}_\sigma, \forall \alpha \in [0, 1]$ .

Se adopta la función de fluencia de von Mises que, en forma general, se expresa de la siguiente manera

$$F_f = \|\mathbf{s}\| - k \quad (4.77)$$

donde  $\mathbf{s}$  es la componente deviatorica del tensor de tensiones definido en la ec.(1.4)<sup>1</sup> y  $k$  representa el radio de la sección deviatorica de la función de fluencia en el espacio de tensiones (ver Fig.4.6)

Cuando se alcanza la fluencia en un ensayo uniaxial, el tensor de tensiones vale

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \quad (4.78)$$

donde  $\underline{\mathbf{e}}^i, \underline{\mathbf{e}}^j$  son los vectores base del sistema de coordenadas cartesiano utilizado.

Si se descompone a este tensor en sus partes deviatorica y volumetrica, se obtiene:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_Y}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_Y & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_Y \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Entonces, las componentes del tensor deviatorico vienen dadas por:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_Y & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_Y & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_Y \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Por lo tanto  $\|\mathbf{s}\|$  vale

---

<sup>1</sup>Cuando se definió la componente deviatorica del tensor de tensiones se hizo para el tensor de tensiones efectivas. En este Capítulo se abandona a los materiales friccionales por un instante y se considera válida dicha definición para el tensor de tensiones de Cauchy.

$$\|\mathbf{s}\| = \sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}} = \sqrt{s^{ij}s_{ij}} = \sqrt{\sigma_Y \left( \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right)} = \sigma_Y \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4.81)$$

De la ec.(4.81) se deduce entonces que  $k = \sigma_Y \sqrt{\frac{2}{3}}$ . La gráfica de la función de fluencia en el espacio de tensiones principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  es un cilindro, y se muestra en la Fig.4.6.

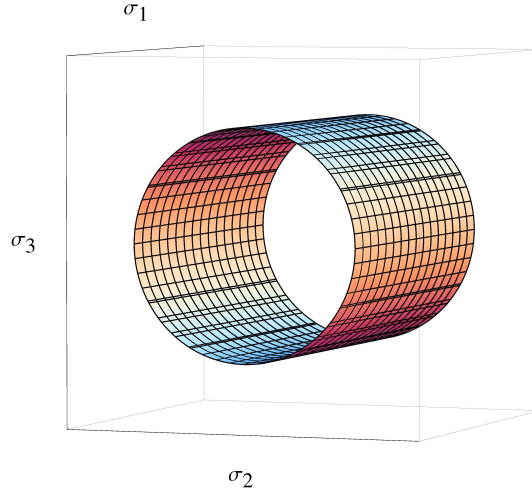


Figura 4.6: Función de fluencia de von Mises en el espacio de tensiones principales.

### Regla de flujo

En el Anexo C.1 se definió la Regla de flujo generalizada termodinámicamente consistente dada por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{k}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \quad (4.82)$$

donde  $\dot{\lambda} \geq 0$  es el multiplicador plástico y  $\mathbf{k} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}$  es un campo tensorial de segundo orden que define la dirección del flujo plástico. Se pueden presentar dos casos:

1. Plasticidad Asociada:

$$\mathbf{k}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.83)$$

2. Plasticidad No Asociada:

$$\mathbf{k}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \neq \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.84)$$

Las leyes de flujo asociadas son aquellas derivadas de la *Desigualdad de Clausius-Duhem* para una evolución puramente mecánica de las variables internas, sujeta a la *Condición de*

*máxima disipación plástica*, la cual garantiza una única dirección de evolución de las variables internas del problema (ver Anexo C.1). Sin embargo, existen materiales cuyo comportamiento experimental no responde a leyes asociadas, un ejemplo son los materiales friccionales. Es por eso que para poder construir un modelo constitutivo elastoplástico que describa el comportamiento de tipo de materiales son necesarias leyes de flujo no asociadas.

Por ahora, se estudian los modelos constitutivos elastoplásticos locales con leyes de flujo asociadas en los que, según la ec.(4.83), la dirección de flujo plástico coincide con la normal saliente a la superficie de fluencia.

Se define al tensor de dirección de flujo plástico como  $\mathbf{m}$  y a la normal saliente a la superficie de fluencia como  $\mathbf{n}$ , ambos son tensores de segundo orden. Se entiende que  $\mathbf{m} = \mathbf{n}$  implica asociatividad, mientras que  $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$  implica no asociatividad.

Con estas definiciones, la *regla de flujo* se escribe como

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m} \quad (4.85)$$

Se asume que el multiplicador plástico cumple con las condiciones complementarias de Khun-Tucker [20] [33] [48] que se enunciaron en la Sección 4.2.2; para el caso tridimensional se pueden escribir como

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad F_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \leq 0 \quad (4.86)$$

$$\dot{\lambda} F_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = 0$$

Además de estas condiciones, se pide que se cumpla con la condición de persistencia dada por

$$\dot{\lambda} \dot{F}_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = 0 \quad (4.87)$$

### Ley de endurecimiento

En el Anexo C.1 se deduce la Ley de endurecimiento termodinámicamente consistente, basada en la *Desigualdad de Clausius-Duhem* para una evolución puramente mecánica del sistema, bajo la *Condición de máxima disipación plástica*. A estas leyes de endurecimiento se las denomina *leyes de endurecimiento locales asociadas* con el mismo carácter que las reglas de flujo asociadas.

En el caso más general, se puede considerar una función  $\mathbf{h} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}$  que define la evolución de las variables internas  $\boldsymbol{\eta}$  las cuales describen el carácter disipativo del material

como

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = -\dot{\lambda} \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \quad (4.88)$$

Las variables internas  $\boldsymbol{\eta}$  del modelo en estudio son: la *deformación plástica equivalente*  $\alpha$  y el *tensor de back stress*  $\mathbf{q}$ ; ambos son función de  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ .

En este trabajo, se consideran cuatro leyes de endurecimiento: endurecimiento isotrópico, endurecimiento cinemático, endurecimiento combinado y una variante de ley de endurecimiento no lineal correspondiente a un modelo hiperbólico de naturaleza isotrópica. En la Fig.4.7 se muestra la diferencia entre los dos tipos de endurecimiento principales (isotrópico y cinemático). A continuación se enuncian las distintas leyes de endurecimiento, la evolución de las variables internas y como se modifica la función de fluencia por la incorporación de estas leyes:

### 1. Endurecimiento isotrópico:

Se considera la ley de endurecimiento lineal, dada por

$$K(\alpha) = \sigma_Y^0 + K_c \alpha \quad (4.89)$$

$$F_f(\mathbf{s}, \alpha) = \|\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K(\alpha) \quad (4.90)$$

donde  $K_c$  es el módulo de endurecimiento isotrópico y se lo considera constante. La deformación plástica equivalente se calcula como

$$\alpha(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p(\tau)\| d\tau \quad (4.91)$$

entonces, se deduce que la ecuación de evolución para la deformación plástica equivalente es

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4.92)$$

### 2. Endurecimiento cinemático:

El tensor de back stress  $\mathbf{q}$  define el desplazamiento del centro de la superficie de fluencia en el espacio de tensiones, entonces la función de fluencia para el caso de endurecimiento cinemático se escribe se la siguiente manera

$$F_f(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \|\mathbf{s} - \mathbf{q}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \quad (4.93)$$

la ecuación de evolución del tensor  $\mathbf{q}$  es

$$\dot{\mathbf{q}} = H \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = H \dot{\lambda} \mathbf{m} \quad (4.94)$$

donde  $H$  es el módulo de endurecimiento cinemático.

### 3. Endurecimiento combinado:

Teniendo en cuenta las ecs.(4.91) y (4.93), se puede modificar a la función de fluencia de la siguiente manera

$$F_f(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \alpha) = \|\mathbf{s} - \mathbf{q}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}K(\alpha) \quad (4.95)$$

donde  $K(\alpha)$  toma la forma funcional dada por la ec.(4.89).

Las ecuaciones de evolución de la deformación plástica equivalente y del tensor de back stress ya fueron definidas anteriormente.

### 4. Endurecimiento isotrópico hiperbólico combinado:

Para este caso, se modifica la ley de endurecimiento isotrópico por una ley no lineal hiperbólica, además se incluye endurecimiento cinemático. La ley de endurecimiento isotrópico esta dada por

$$K(\alpha) = \sigma_{Y0} + \frac{\alpha}{\frac{1}{E} + \frac{\alpha}{\sigma_{Y\infty}}} \quad (4.96)$$

donde,

$\sigma_{Y0}$ : Tensión de fluencia de referencia. Comúnmente es un valor pequeño.

$\sigma_{Y\infty}$ : Tensión de fluencia a tiempo infinito.

La estructura matemática de la función de fluencia tiene la forma funcional dada por la ec.(4.95). Las ecuaciones de evolución de la deformación plástica equivalente y del tensor de back stress ya fueron definidas anteriormente.

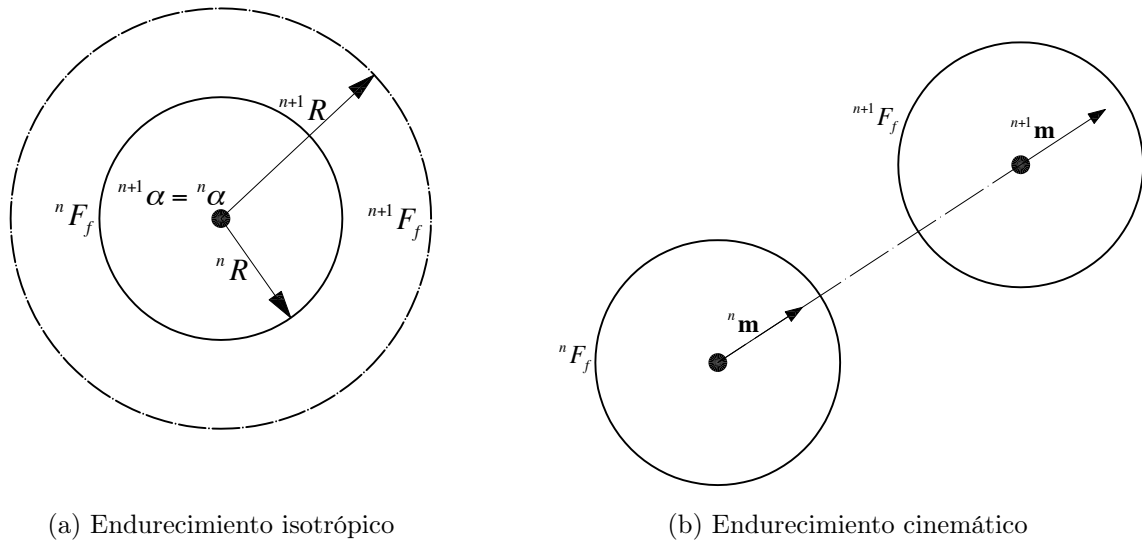


Figura 4.7: Leyes de endurecimiento.

En los siguientes cuadros se resumen las formulaciones de los modelos constitutivos para elastoplasticidad perfecta, con endurecimiento isotrópico, cinemático, combinado y no lineal para un problema tridimensional.

**Plasticidad Perfecta:**

1. Relación tensión-deformación elástica:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$
2. Dominio elástico:  $F_f = \|\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y \leq 0$
3. Regla de flujo:  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$
4. Condiciones complementarias de Khun-Tucker:  $\dot{\lambda} F_f(\mathbf{s}) = 0, \dot{\lambda} \geq 0, F_f(\mathbf{s}) \leq 0$
5. Condición de consistencia:  $\dot{\lambda} \dot{F}_f(\mathbf{s}) = 0$



### Plasticidad con endurecimiento isotrópico:

1. Relación tensión-deformación elástica:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$
2. Dominio elástico:  $F_f(\mathbf{s}, \alpha) = \|\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y^0 + K_c \alpha) \leq 0$
3. Regla de flujo y evolución de la deformación plástica equivalente:  
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m}$$
$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}}$$
4. Condiciones complementarias de Khun-Tucker:  
$$\dot{\lambda} F_f(\mathbf{s}, \alpha) = 0, \dot{\lambda} \geq 0, F_f(\mathbf{s}, \alpha) \leq 0$$
5. Condición de persistencia:  $\dot{\lambda} \dot{F}_f(\mathbf{s}, \alpha) = 0$

### Plasticidad con endurecimiento cinemático:

1. Relación tensión-deformación elástica:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$
2. Dominio elástico:  $F_f(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = \|\mathbf{s} - \mathbf{q}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \leq 0$
3. Regla de flujo y evolución del tensor de back stress:  
$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m}$$
$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} H \mathbf{m}$$
4. Condiciones complementarias de Khun-Tucker:  
$$\dot{\lambda} F_f(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = 0, \dot{\lambda} \geq 0, F_f(\mathbf{s}, \mathbf{q}) \leq 0$$
5. Condición de persistencia:  $\dot{\lambda} \dot{F}_f(\mathbf{s}, \mathbf{q}) = 0$

### Plasticidad con endurecimiento combinado:

1. Relación tensión-deformación elástica:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$
2. Dominio elástico:  $F_f(\mathbf{s}, \alpha, \mathbf{q}) = \|\mathbf{s} - \mathbf{q}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y^0 + K_c \alpha) \leq 0$
3. Regla de flujo:  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m}$
4. Evolución de la deformación plástica equivalente y del tensor de back stress:  
$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} H \mathbf{m}$$
5. Condiciones complementarias de Khun-Tucker:  
$$\dot{\lambda} F_f(\mathbf{s}, \alpha, \mathbf{q}) = 0, \dot{\lambda} \geq 0, F_f(\mathbf{s}, \alpha, \mathbf{q}) \leq 0$$
6. Condición de persistencia:  $\dot{\lambda} \dot{F}_f(\mathbf{s}, \alpha, \mathbf{q}) = 0$

### Plasticidad con endurecimiento no lineal hiperbólico:

1. Relación tensión-deformación elástica:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$
2. Dominio elástico:  $F_f(\mathbf{s}, \alpha, \mathbf{q}) = \|\mathbf{s} - \mathbf{q}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sigma_{Y0} + \frac{\alpha}{\frac{1}{E} + \frac{\alpha}{\sigma_{Y\infty}}} \right) \leq 0$
3. Regla de flujo:  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m}$
4. Evolución de la deformación plástica equivalente y del tensor de back stress:  
$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} H \mathbf{m}$$
5. Condiciones complementarias de Khun-Tucker:  
$$\dot{\lambda} F_f(\mathbf{s}, \alpha, \mathbf{q}) = 0, \dot{\lambda} \geq 0, F_f(\mathbf{s}, \alpha, \mathbf{q}) \leq 0$$
6. Condición de persistencia:  $\dot{\lambda} \dot{F}_f(\mathbf{s}, \alpha, \mathbf{q}) = 0$

### 4.3.3. Interpretación de las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker

Se consideran las siguientes situaciones:

1. Sea  $\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}\} \in \text{int}(\mathbb{E}_\sigma)$ , de acuerdo con la ec.(4.75),  $F_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) < 0$ . Entonces, si se tienen en cuenta las condiciones establecidas en las ecs.(4.86) se tiene que:

$$\dot{\lambda} F_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = 0 \implies \dot{\lambda} = 0 \quad (4.97)$$

De las ecs.(4.82) y (4.88) se establece que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = 0$  y  $\dot{\boldsymbol{\eta}} = 0$ . Entonces, la ec.(5.16) lleva a que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ ; en consecuencia la relación constitutiva tangente es

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (4.98)$$

A esta respuesta se la denomina *instantáneamente elástica*.

2. Sea  $\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}\} \in \partial\mathbb{E}_\sigma$ , lo cual implica, según la ec.(4.76), que  $F_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = 0$ . Entonces la ec.(4.86)<sub>2</sub> se satisface automáticamente por más que  $\dot{\lambda} > 0$ . Si  $\dot{\lambda}$  es positivo o cero se deduce de la ec.(5.29). Se pueden presentar dos situaciones:

- a) Si  $\dot{F}_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) < 0$ , la ec.(5.29) implica que:

$$\dot{\lambda} \dot{F}_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = 0 \implies \dot{\lambda} = 0 \quad (4.99)$$

De las ecs.(4.82) y (4.88) se establece que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = 0$  y  $\dot{\boldsymbol{\eta}} = 0$ . Como la ec.(4.98) se cumple y  $\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}\} \in \partial\mathbb{E}_\sigma$ , a una respuesta de este tipo se la conoce como *descarga desde un estado plástico*.

- b) Si  $\dot{F}_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = 0$ , la condición expresada por la ec.(5.29) se satisface aunque  $\dot{\lambda} > 0$ . Si esto ocurre se tiene que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \neq 0$  y  $\dot{\boldsymbol{\eta}} \neq 0$ . A esta situación se la conoce como *carga plástica*. El caso  $\dot{\lambda} = 0$  ( $\dot{F}_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = 0$ ) se lo conoce como carga neutra.

Se observa que el caso  $\dot{F}_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) > 0$  se excluyó del análisis pues si esto ocurriese para algún  $\{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}\} \in \partial\mathbb{E}_\sigma$  en algún tiempo  $t \in \mathbb{R}^+$ , la condición  $F_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) < 0$  puede violarse en algún entorno para el siguiente tiempo  $t$  [48].

### 4.3.4. Multiplicador plástico consistente.

Ahora se extiende el procedimiento para la determinación del multiplicador plástico descrito en la Sección 4.2.3 al caso tridimensional. Considerando la condición de persistencia

dada por la ec.(5.29), en el caso de carga plástica  $\dot{\lambda} > 0$ , se obtiene la condición de consistencia dada por

$$\dot{F}_f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = 0 \quad (4.100)$$

Si se supone un modelo elastoplástico con endurecimiento combinado, las variables internas adoptadas son  $\boldsymbol{\eta} = \{\mathbf{q}, \alpha\}$  y  $F_f$  tiene la estructura matemática que se muestra en la ec.(4.95) junto con la ec.(4.89); desarrollando  $\dot{F}_f$  utilizando la regla de la cadena para derivación se tiene

$$\dot{F}_f = \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_f}{\partial \mathbf{q}} : \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial F_f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad (4.101)$$

donde (Ver Anexo C.2)

$$\frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{s} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{s} - \mathbf{q}\|} = \mathbf{n} \quad (4.102)$$

$$\frac{\partial F_f}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\mathbf{s} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{s} - \mathbf{q}\|} = -\mathbf{n} \quad (4.103)$$

$$\frac{\partial F_f}{\partial \alpha} = -K_c \quad (4.104)$$

Las ecuaciones de evolución de las variables internas plásticas  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\alpha}$  ya fueron descritas en las ecs.(4.92) y (4.94) respectivamente. Entonces, reemplazando las ecs.(4.92), (4.94), (4.102), (4.103) y (4.104) en la ec.(4.101)

$$\dot{F}_f = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda} H \mathbf{n} : \mathbf{m} - \sqrt{\frac{2}{3}} K_c \dot{\lambda} \quad (4.105)$$

La tasa temporal del tensor de tensiones de Cauchy se puede expresar como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p) \quad (4.106)$$

Teniendo en cuenta la ec.(4.85), la ec.(4.105) se escribe de la siguiente manera

$$\dot{F}_f = \mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \dot{\lambda} \mathbf{m} - \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda} H \mathbf{n} : \mathbf{m} - \sqrt{\frac{2}{3}} K_c \dot{\lambda} = 0 \quad (4.107)$$

Para una regla de flujo asociada asociada,  $\mathbf{n} : \mathbf{m} = \|\mathbf{n}\| = 1$ ; despejando  $\dot{\lambda}$  de la ec.(4.107) se obtiene la siguiente expresión para el multiplicador plástico consistente

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m} + \sqrt{\frac{2}{3}}(H + K_c)} \quad (4.108)$$

La ec.(4.108) se puede particularizar al multiplicador plástico consistente para el caso de plasticidad perfecta haciendo  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  y  $K_c = H = 0$ , entonces

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m}} \quad (4.109)$$

### 4.3.5. Operador elastoplástico tangente

En la Sección 4.2.4 se estableció la relación constitutiva tangente para el caso unidimensional, donde se define al módulo elastoplástico tangente. Este concepto se puede generalizar al espacio de tensiones mediante

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.110)$$

donde  $\mathbf{C}_{ep}$  es el operador elastoplástico tangente.

Partiendo de la ec.(4.106) y reemplazando la regla de flujo dada por la ec.(4.85), se obtiene lo siguiente

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{ep} : \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{m} \right) \quad (4.111)$$

Reemplazando en la ec.(4.111) el multiplicador plástico consistente dado por la ec.(4.108) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}_e : \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m} + \sqrt{\frac{2}{3}}(H + K_c)} \mathbf{m} \right) \\ &= \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m} + \sqrt{\frac{2}{3}}(H + K_c)} \mathbf{C}_e : \mathbf{m} \end{aligned} \quad (4.112)$$

Ordenando términos y sacando factor común  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[ \mathbf{C}_e - \frac{\mathbf{C}_e : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{C}_e}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m} + \sqrt{\frac{2}{3}}(H + K_c)} \right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.113)$$

Comparando la ec.(4.113) con la ec.(4.110) se deduce que el operador elastoplástico tangente es

$$\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e - \frac{\mathbf{C}_e : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{C}_e}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m} + \sqrt{\frac{2}{3}}(H + K_c)} \quad (4.114)$$

En un modelo constitutivo asociado  $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ , entonces  $\mathbf{C}_{ep}$  es un tensor de cuarto orden que posee las siguientes simetrías

$$C_{epijkl} = C_{epjikl} = C_{epijlk} = C_{epklij} \quad (4.115)$$

En el caso de plasticidad perfecta, donde  $H = K_c = 0$  y  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  el operador elastoplástico tangente se expresa de la siguiente manera

$$\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e - \frac{\mathbf{C}_e : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{C}_e}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m}} \quad (4.116)$$

Dado que los términos disipativos desaparecieron,  $\mathbf{C}_{ep}$  es definido positivo [48].

## 4.4. Formulación numérica para elastoplasticidad asociada

En este apartado se extiende la formulación numérica desarrollada para el caso unidimensional, al caso tridimensional. Se estudian los modelos constitutivos elastoplásticos para un material perfectamente plástico, con endurecimiento combinado y con endurecimiento isotrópico hiperbólico y cinemático. En todos los casos se asume que se conoce en un instante  ${}^n t$  el estado local del problema es decir, se conocen las variables de estado en un instante  ${}^n t$ ; a este estado se lo conoce como *estado convergido del problema*.

Si se aplica un incremento de deformación total  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , el problema consiste en hallar las variables de estado en el instante  ${}^{n+1} t$ . Debido a que la fluencia de los aceros se manifiesta para un estado de tensiones deviatoricas, es conveniente, para la formulación numérica, descomponer al tensor de tensiones de Cauchy en su componente deviatorica y volumétrica. Para todos los casos se asume que la relación constitutiva para el comportamiento elástico de los aceros es la que se muestra en la ec.(4.72), y la regla de flujo viene dada por la ec.(4.85).

### 4.4.1. Plasticidad Perfecta

En el instante  ${}^n t$  las variables de estado son

$$\{^n\boldsymbol{\sigma}, ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p\} \quad (4.117)$$

Entonces dados  $\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, ^n\boldsymbol{\sigma}, ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p\}$ , se busca hallar  $\{^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, ^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_p\}$ .

Se define al *estado de prueba* al estado obtenido al congelar el flujo plástico. Este estado se define por medio de las siguientes ecuaciones

$$^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = ^n\boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.118)$$

$$^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (4.119)$$

$$^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e : ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (4.120)$$

donde  $^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$  es el tensor de tensiones de prueba; sus componentes deviatorica y volumétrica,  $^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}$  y  $^{n+1}\widehat{p}$ , vienen dadas por

$$^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} = 2G ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d \quad (4.121)$$

$$^{n+1}\widehat{p} = K ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^v \quad (4.122)$$

donde  $^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  es el tensor de deformaciones de prueba y  $^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d$  y  $^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^v$  son sus componentes deviatorica y volumétrica.

La formulación continua de elastoplasticidad se resume en el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m} \\ F_f = 0 \end{cases} \quad (4.123)$$

Se adopta el Método de Euler implícito y se integra el sistema de ecuaciones planteado de la siguiente manera

$$\begin{cases} ^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = ^n\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{C}_e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C}_e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p \\ ^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_p = ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p + \Delta\lambda ^{n+1}\mathbf{m} \\ ^{n+1}F_f = 0 \end{cases} \quad (4.124)$$

Teniendo en cuenta la ec.(4.77), se tiene que

$${}^{n+1}F_f = \|{}^{n+1}\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y \quad (4.125)$$

Expresando la ec.(4.124)<sub>1</sub> como

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}_e : ({}^n\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{C}_e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p \\ &= {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C}_e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.126)$$

Se tiene que la componente deviatorica del tensor de tensiones se calcula de la siguiente manera

$${}^{n+1}\mathbf{s} = \mathbf{I}^{dev} : {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} - 2G \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^d \quad (4.127)$$

donde,

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^d = \mathbf{I}^{dev} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p = \Delta\lambda \mathbf{I}^{dev} : {}^{n+1}\mathbf{m} = \Delta\lambda {}^{n+1}\mathbf{m} \quad (4.128)$$

Reemplazando la ec.(4.128) en la ec.(4.127) se tiene

$${}^{n+1}\mathbf{s} = {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} - 2G \Delta\lambda {}^{n+1}\mathbf{m} \quad (4.129)$$

Teniendo en cuenta que  ${}^{n+1}\mathbf{m} = \frac{{}^{n+1}\mathbf{s}}{\|{}^{n+1}\mathbf{s}\|}$  (ver Anexo C.2) y reemplazándolo en la ec.(4.129)

$$\left(1 + \frac{2G \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\mathbf{s}\|}\right) {}^{n+1}\mathbf{s} = {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} \quad (4.130)$$

La ec.(4.130), implica que  ${}^{n+1}\mathbf{s}$  y  ${}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}$  son colineales, entonces el tensor de dirección de flujo plástico se puede escribir indistintamente como

$${}^{n+1}\mathbf{m} = \frac{{}^{n+1}\mathbf{s}}{\|{}^{n+1}\mathbf{s}\|} = \frac{{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}}{\|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\|} \quad (4.131)$$

#### 4.4.1.1. Multiplicador plástico algorítmico

Si se utiliza el multiplicador plástico consistente definido por la ec.(4.109), su valor se ve sobre estimado. El valor correcto del multiplicador plástico se obtiene forzando la condición



de consistencia incremental  ${}^{n+1}F_f = 0$ . Teniendo en cuenta la ec.(4.131), la ec.(4.129) se escribe de la siguiente manera

$$\|{}^{n+1}\mathbf{s}\| {}^{n+1}\mathbf{m} = \|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\| {}^{n+1}\mathbf{m} - 2G \Delta\lambda {}^{n+1}\mathbf{m} \quad (4.132)$$

Posmultiplicando por el tensor de dirección de flujo plástico  ${}^{n+1}\mathbf{m}$  a ambos miembros de la ec.(4.132) se obtiene

$$\|{}^{n+1}\mathbf{s}\| = \|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\| - 2G \Delta\lambda \quad (4.133)$$

Restando  $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y$  a ambos miembros de la ec.(4.133)

$$\|{}^{n+1}\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y = \|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y - 2G \Delta\lambda \quad (4.134)$$

Ahora, teniendo en cuenta la ec.(4.124)<sub>3</sub> y que  ${}^{n+1}\widehat{F}_f = \|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y$  la ec.(4.134) se escribe como

$${}^{n+1}\widehat{F}_f - 2G \Delta\lambda = 0 \quad (4.135)$$

De la ec.(4.135) se deduce que el multiplicador plástico algorítmico viene dado por

$$\Delta\lambda = \frac{{}^{n+1}\widehat{F}_f}{2G} \quad (4.136)$$

#### 4.4.1.2. Algoritmo de Retorno Radial para plasticidad perfecta

Una vez calculado el multiplicador plástico algorítmico, se presenta el Algoritmo de Retorno Radial para el caso en estudio. Este algoritmo esta compuesto por dos fases: el predictor elástico, que abarca al cálculo del estado de prueba mediante el congelamiento del flujo plástico en las variables de estado y la verificación de la fluencia; y el corrector plástico que es el Algoritmo de Retorno Radial propiamente dicho, en el cual si el estado de prueba no es admisible ( ${}^{n+1}\widehat{F}_f > 0$ ) se procede a la corrección de las variables de estado mediante el retorno plástico. El Algoritmo de Retorno Radial para un modelo constitutivo elastoplástico perfecto tiene la estructura que se muestra en el siguiente cuadro:

### Algoritmo de Retorno Radial. Plasticidad Perfecta

1. Dado:  $\{ {}^n \boldsymbol{\sigma}, {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p^d, \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \}$ ;

2. Calcular la tensión de prueba:

$${}^n \boldsymbol{\varepsilon}^d = \frac{{}^n \mathbf{s}}{2G}; \quad {}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}^d = {}^n \boldsymbol{\varepsilon}^d + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^d; \quad {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} = 2G ({}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}^d - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p^d);$$

$${}^{n+1} \widehat{p} = {}^n p + K I_1 (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}); \quad {}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} + {}^{n+1} \widehat{p} \mathbf{1};$$

$${}^{n+1} \widehat{F}_f = \| {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} \| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y;$$

3. SI  ${}^{n+1} \widehat{F}_f \leq 0 \implies \{ {}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}, {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p \}$ , EN OTRO CASO

$$a) \Delta \lambda = \frac{{}^{n+1} \widehat{F}_f}{2G}; \quad {}^{n+1} \mathbf{m} = \frac{{}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}}}{\| {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} \|};$$

$$b) {}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}_p^d = {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p^d + \Delta \lambda {}^{n+1} \mathbf{m};$$

$$c) {}^{n+1} \mathbf{s} = {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} - 2G \Delta \lambda {}^{n+1} \mathbf{m};$$

$$d) {}^{n+1} p = {}^{n+1} \widehat{p};$$

$$e) {}^{n+1} \boldsymbol{\sigma} = {}^{n+1} \mathbf{s} + {}^{n+1} p \mathbf{1};$$

& FIN

#### 4.4.1.3. Operador elastoplástico tangente algorítmico

Para poder obtener convergencia cuadrática en el esquema iterativo global de Newton-Raphson planteado para la solución del problema de valores de contorno, mediante el Método de los Elementos Finitos, se debe calcular correctamente la matriz de rigidez tangente elemental [48]. La principal ventaja de los algoritmos derivados de la Regla del Punto Medio Generalizada es que son diferenciables, es decir permiten el cálculo del operador elastoplástico tangente consistente con el algoritmo de retorno utilizado [27] [33] [46] y [48]; estrategias como “*Cutting Plane Algorithms*” propuestas en [48] no presentan esta ventaja [33]. El operador elastoplástico consistente con el Algoritmo de Retorno Radial para un modelo constitutivo elastoplástico perfecto se calcula mediante

$${}^{n+1} \overset{\Delta}{\mathbf{C}}_{ep} = \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta \lambda}{\| {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} \|} \left[ \mathbf{I}^{dev} + \left( 1 - \frac{\| {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} \|}{2G \Delta \lambda} \right) {}^{n+1} \mathbf{m} \otimes {}^{n+1} \mathbf{m} \right] \quad (4.137)$$

La deducción de la ec.(4.137) puede verse en el Anexo C.3.1 . Si se compara esta última expresión con la que se obtuvo en la ec.(4.116) se observa que los operadores continuo y

algorítmico no coinciden.

#### 4.4.1.4. Respuesta del algoritmo

En la Fig.4.8 se grafican las curvas  $\|\mathbf{s}\| - \|\boldsymbol{\epsilon}^d\|$  para un ensayo de tracción isotrónica y distintos incrementos de deformación. Se adoptan los siguientes parámetros materiales:  $\sigma_Y = 2400 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $E = 2,1 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$  y  $\nu = 0,3$ . Se observa que el valor límite asociado se corresponde con  $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_Y = 1959,59 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ .

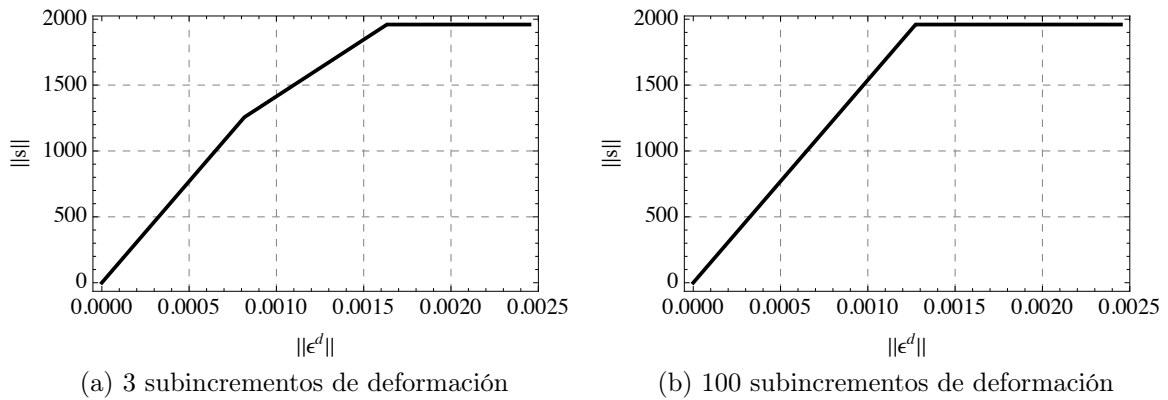


Figura 4.8: Curva  $\|\mathbf{s}\| - \|\boldsymbol{\epsilon}^d\|$

Si se superponen ambas respuestas (ver Fig.4.8) se deduce que la respuesta del algoritmo es independiente del tamaño de los subincrementos de deformación adoptados, la diferencia entre ambas curvas se debe a que, el caso de 3 subincrementos no se llega a representar la cantidad de puntos intermedios que si se logran captar con 100 subincrementos.

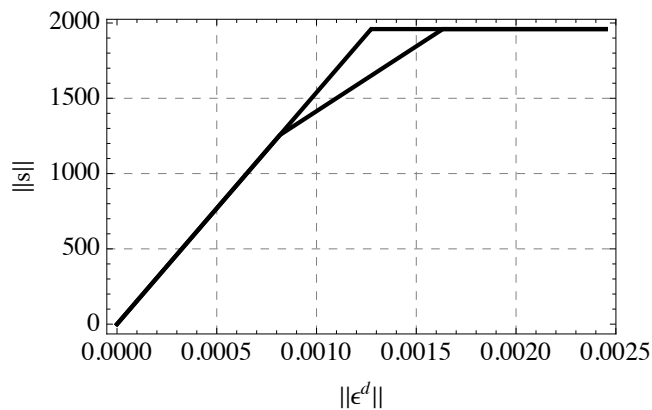


Figura 4.9: Superposición de las respuestas

#### 4.4.2. Plasticidad con endurecimiento combinado

Se supone que se conoce en el instante  ${}^n t$

$$\{ {}^n \boldsymbol{\sigma}, {}^n \boldsymbol{\epsilon}_p, {}^n \alpha, {}^n \mathbf{q} \} \quad (4.138)$$

El problema consiste en dados  $\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, {}^n \boldsymbol{\sigma}, {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p, {}^n \alpha, {}^n \mathbf{q}\}$ , hallar  $\{{}^{n+1} \boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}_p, {}^{n+1} \alpha, {}^{n+1} \mathbf{q}\}$ . La función de fluencia viene dada por la ec.(4.95) para la cual se adopta la ley de endurecimiento dada por la ec.(4.89). Se define al *tensor de tensiones relativo* [48] como

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{s} - \mathbf{q} \quad (4.139)$$

La función de fluencia se puede escribir en términos de este tensor como

$$F_f(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \alpha) = \|\boldsymbol{\xi}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K(\alpha) \quad (4.140)$$

Las ecuaciones de evolución de las variables plásticas  $\alpha$  y  $\mathbf{q}$  vienen dadas por las ecs.(4.92) y (4.94).

Para este caso, el estado de prueba se define mediante las ecs.(4.118), (4.119) y (4.120), a las que se le agregan

$${}^{n+1} \widehat{\alpha} = {}^n \alpha \quad (4.141)$$

$${}^{n+1} \widehat{\mathbf{q}} = {}^n \mathbf{q} \quad (4.142)$$

Debido a que la función de fluencia esta definida en términos del tensor de tensiones relativo, se define al *tensor de tensiones relativo de prueba* a

$${}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\xi}} = {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} - {}^n \mathbf{q} \quad (4.143)$$

donde  ${}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}}$  es la componente deviatorica de  ${}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}$  y viene dada por la ec.(4.121).

La formulación continua de elastoplasticidad se resume en el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m} \\ \dot{\alpha} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \frac{2}{3} H \mathbf{m} \\ F_f = 0 \end{cases} \quad (4.144)$$

Adoptando el Método de Euler implícito, se discretiza el sistema de ecuaciones planteado de la siguiente manera

$$\begin{cases} {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = {}^n\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{C}_e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C}_e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p \\ {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_p = {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_p + \Delta\lambda {}^{n+1}\mathbf{m} \\ {}^{n+1}\alpha = {}^n\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda \\ {}^{n+1}\mathbf{q} = {}^n\mathbf{q} + \frac{2}{3} \Delta\lambda H {}^{n+1}\mathbf{m} \\ {}^{n+1}F_f = 0 \end{cases} \quad (4.145)$$

Teniendo en cuenta la ec.(4.140), se tiene que

$${}^{n+1}F_f = \|{}^{n+1}\boldsymbol{\xi}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K ({}^{n+1}\alpha) \quad (4.146)$$

Partiendo de la ec.(4.139), se deduce que el tensor de tensiones relativo actualizado es

$${}^{n+1}\boldsymbol{\xi} = {}^{n+1}\mathbf{s} - {}^{n+1}\mathbf{q} \quad (4.147)$$

Reemplazando las ecs.(4.129) y (4.145)<sub>4</sub> en la ec.(4.147) se tiene

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\boldsymbol{\xi} &= {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} - {}^n\mathbf{q} - 2G \Delta\lambda {}^{n+1}\mathbf{m} - \frac{2}{3} \Delta\lambda H {}^{n+1}\mathbf{m} \\ &= {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} - 2G \Delta\lambda {}^{n+1}\mathbf{m} - \frac{2}{3} \Delta\lambda H {}^{n+1}\mathbf{m} \end{aligned} \quad (4.148)$$

Teniendo en cuenta que  ${}^{n+1}\mathbf{m} = \frac{{}^{n+1}\boldsymbol{\xi}}{\|{}^{n+1}\boldsymbol{\xi}\|}$  (ver Anexo C.2) y reemplazándolo en la ec.(4.148) se tiene

$$\left[ 1 + \frac{\Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\boldsymbol{\xi}\|} \left( 2G + \frac{2}{3} H \right) \right] {}^{n+1}\boldsymbol{\xi} = {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \quad (4.149)$$

Es decir que, al incluir el tensor de back stress  ${}^{n+1}\mathbf{q}$  en el modelo constitutivo, no se pierde el carácter colineal del estado de prueba y el estado actualizado. Entonces, el tensor de dirección de flujo plástico se puede escribir como

$${}^{n+1}\mathbf{m} = \frac{{}^{n+1}\boldsymbol{\xi}}{\|{}^{n+1}\boldsymbol{\xi}\|} = \frac{{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \quad (4.150)$$

#### 4.4.2.1. Multiplicador plástico algorítmico

Teniendo en cuenta la ec.(4.150), la ec.(4.148) se reescribe de la siguiente manera

$$\|^{n+1}\boldsymbol{\xi}\|^{n+1}\mathbf{m} = \left\|^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\right\|^{n+1}\mathbf{m} - \left(2G \Delta\lambda + \frac{2}{3} \Delta\lambda H\right)^{n+1}\mathbf{m} \quad (4.151)$$

Posmultiplicando por el tensor de dirección del flujo plástico a ambos miembros de la ec.(4.151) se obtiene

$$\|^{n+1}\boldsymbol{\xi}\| = \left\|^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\right\| - \left(2G \Delta\lambda + \frac{2}{3} \Delta\lambda H\right) \quad (4.152)$$

Restando  $\sqrt{\frac{2}{3}}K^{(n+1)\alpha}$  a ambos miembros de la ec.(4.152)

$$\|^{n+1}\boldsymbol{\xi}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}K^{(n+1)\alpha} = \left\|^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\right\| - \sqrt{\frac{2}{3}}K^{(n+1)\alpha} - \left(2G \Delta\lambda + \frac{2}{3} \Delta\lambda H\right) \quad (4.153)$$

donde  $K^{(n+1)\alpha} = \sigma_Y^0 + K_c^{n+1}\alpha$ .

Reemplazando la ec.(4.145)<sub>3</sub> en la ec.(4.153)

$$\left\|^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\right\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y^0 + K_c^n \alpha) - \frac{2}{3}K_c \Delta\lambda - 2G \Delta\lambda - \frac{2}{3}H \Delta\lambda = 0 \quad (4.154)$$

como  $^{n+1}\widehat{F}_f = \left\|^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\right\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y^0 + K_c^n \alpha)$ , reordenando los términos de la ecuación anterior se tiene

$$^{n+1}\widehat{F}_f = \Delta\lambda 2G \left(1 + \frac{H + K_c}{3G}\right) \quad (4.155)$$

De la ec.(4.155) se deduce que el multiplicador plástico algorítmico viene dado por

$$\Delta\lambda = \frac{^{n+1}\widehat{F}_f}{2G \left(1 + \frac{H + K_c}{3G}\right)} \quad (4.156)$$

#### 4.4.2.2. Algoritmo de Retorno Radial

En este caso, se agregan variables plásticas las cuales están involucradas con la evolución de la superficie de fluencia a medida que se moviliza flujo plástico en el material. En la Fig.4.10 se muestra como opera el algoritmo de retorno para este caso donde la superficie de fluencia varia su diámetro (endurecimiento isotrópico) y cambia su centro (endurecimiento

cinemático) con la evolución del flujo plástico. El algoritmo de retorno tiene la estructura que se muestra en el cuadro que se muestra a continuación.

### Algoritmo de Retorno Radial. Plasticidad con endurecimiento Isotrópico-Cinemático

1. Dado:  $\{ {}^n \boldsymbol{\sigma}, {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p^d, {}^n \alpha, {}^n \mathbf{q}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \}$ ;

2. Calcular la tensión de prueba:

$${}^n \boldsymbol{\varepsilon}^d = \frac{{}^n \mathbf{s}}{2G}; \quad {}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}^d = {}^n \boldsymbol{\varepsilon}^d + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^d; \quad {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} = 2G ({}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}^d - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p^d);$$

$$\widehat{p} = {}^n p + K I_1 (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}); \quad {}^{n+1} \widehat{\alpha} = {}^n \alpha; \quad {}^{n+1} \widehat{\mathbf{q}} = {}^n \mathbf{q}; \quad {}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\xi}} = {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} + {}^n \mathbf{q};$$

$${}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} + {}^{n+1} \widehat{p} \mathbf{1}; \quad {}^{n+1} \widehat{F}_f = \left\| {}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K ({}^{n+1} \widehat{\alpha});$$

3. SI  ${}^{n+1} \widehat{F}_f \leq 0 \implies \{ {}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}, {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p, {}^{n+1} \widehat{\alpha}, {}^{n+1} \widehat{\mathbf{q}} \}$ , EN OTRO CASO

$$a) \Delta \lambda = \frac{{}^{n+1} \widehat{F}_f}{2G \left( 1 + \frac{H + K_c}{3G} \right)};$$

$$b) {}^{n+1} \mathbf{m} = \frac{{}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\xi}}}{\left\| {}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\|};$$

$$c) {}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}_p^d = {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p^d + \Delta \lambda {}^{n+1} \mathbf{m};$$

$$d) {}^{n+1} \mathbf{s} = {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} - 2G \Delta \lambda {}^{n+1} \mathbf{m};$$

$$e) {}^{n+1} p = {}^{n+1} \widehat{p};$$

$$f) {}^{n+1} \alpha = {}^n \alpha + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda;$$

$$g) {}^{n+1} \mathbf{q} = {}^n \mathbf{q} + \frac{2}{3} H \Delta \lambda {}^{n+1} \mathbf{m};$$

$$h) {}^{n+1} \boldsymbol{\sigma} = {}^{n+1} \mathbf{s} + {}^{n+1} p \mathbf{1};$$

& FIN

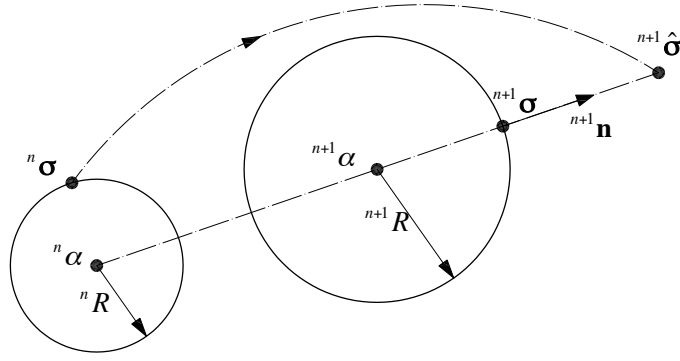


Figura 4.10: Algoritmo de Retorno Radial. Endurecimiento Isotrópico-Cinemático.

#### 4.4.2.3. Operador elastoplástico tangente algorítmico

Al incluir las leyes de endurecimiento isotrópico y cinemático, se modifica tanto el multiplicador plástico algorítmico como el operador elastoplástico consistente con el algoritmo de retorno. Para este caso el operador elastoplástico algorítmico se calcula mediante

$${}^{n+1}\hat{\mathbf{C}}_{ep} = \mathbf{C}_e - \frac{4G^2\Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\xi}}\|} \left\{ \mathbf{I}^{dev} + \left[ 1 - \frac{3\|{}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\xi}}\|}{2\Delta\lambda(3G + H + K_c)} \right] {}^{n+1}\mathbf{m} \otimes {}^{n+1}\mathbf{m} \right\} \quad (4.157)$$

Si se compara esta expresión con la ec.(4.114) se observa que para este caso también no coinciden. La deducción de la ec.(4.157) puede verse en el Anexo C.3.2.

#### 4.4.2.4. Respuesta del algoritmo

En la Fig.4.8 se grafican las curvas  $\|\mathbf{s}\| - \|\boldsymbol{\varepsilon}^d\|$  para un ensayo de tracción isotrópica y distintos incrementos de deformación. Se adoptan los siguientes parámetros materiales:  $\sigma_Y^0 = 2400 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $E = 2,1 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $H_c = 2,1 \times 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$  y  $K_c = 2,1 \times 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$

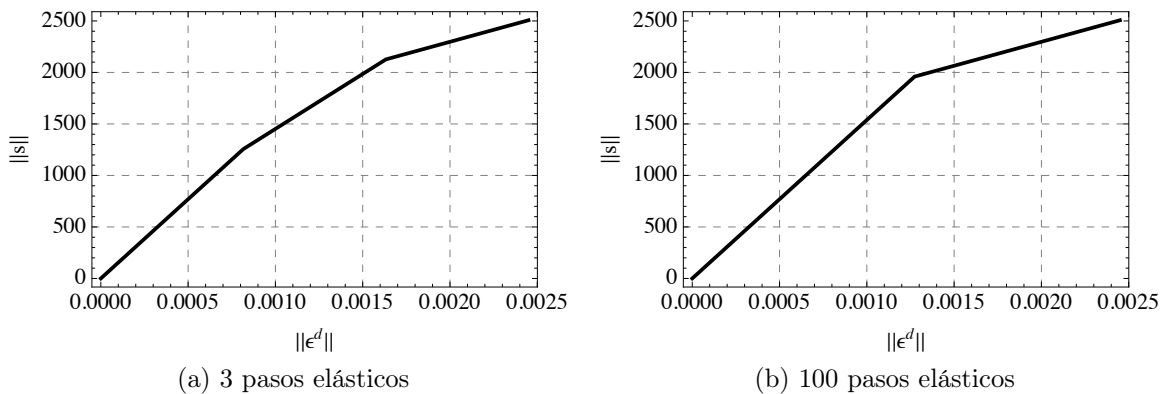


Figura 4.11: Curva  $\|\mathbf{s}\| - \|\boldsymbol{\varepsilon}^d\|$



Se observa que el modelo responde con a la hipótesis con la que fue formulado; a partir de un valor límite la curva de respuesta cambia de pendiente y el material endurece. Debido a que no se realizó un ensayo cíclico no se manifiesta el efecto Bauschinger. Si se superponen ambas respuestas (Fig.4.11) se observa la misma es independiente del tamaño de los incrementos de deformación adoptados, la diferencia entre ambas curvas se debe a que, el caso de 3 subincrementos no se llega a representar la cantidad de puntos intermedios que si se logran captar con 100 subincrementos.

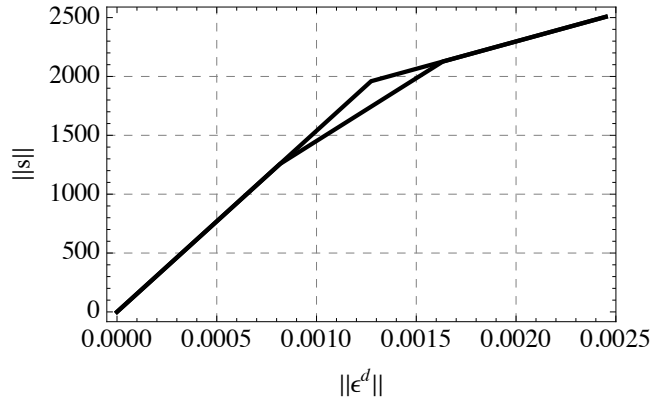


Figura 4.12: Superposición de las respuestas

### 4.4.3. Plasticidad con endurecimiento cinemático e isotrópico hiperbólico

La estructura matemática del problema es la misma que se planteó en la Sección 4.4.2. La principal diferencia reside en que en este caso se adopta una ley de endurecimiento isotrópico hiperbólica, que al ser de carácter no lineal, no se puede hallar el multiplicador plástico algorítmico en forma cerrada.

#### 4.4.3.1. Multiplicador plástico algorítmico

Para el caso en estudio la función de fluencia de von Mises se escribe según la ec.(4.140), donde ahora la función de endurecimiento isotrópico  $K(\alpha)$  viene dada por la ec.(4.96).

Tomando la ec.(4.152) y restando a ambos miembros  $\sqrt{\frac{2}{3}}K^{(n+1)\alpha}$  se tiene

$$\|^{n+1}\xi\| - \sqrt{\frac{2}{3}}K^{(n+1)\alpha} = \|^{n+1}\hat{\xi}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}K^{(n+1)\alpha} - \left(2G + \frac{2}{3}H\right)\Delta\lambda \quad (4.158)$$

Como se debe cumplir la condición de consistencia incremental  $^{n+1}F_f = 0$ , entonces

$$\|^{n+1}\hat{\xi}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}K^{(n+1)\alpha} - \left(2G + \frac{2}{3}H\right)\Delta\lambda = 0 \quad (4.159)$$

que junto con la ec.(4.145)<sub>3</sub> forman el sistema no lineal a resolver. Si se define

$$g(\Delta\lambda) = \left\| {}^{n+1}\widehat{\xi} \right\| - \sqrt{\frac{2}{3}}K [{}^{n+1}\alpha(\Delta\lambda)] - \left( 2G + \frac{2}{3}H \right) \Delta\lambda \quad (4.160)$$

se halla  $\Delta\lambda$  mediante  $g(\Delta\lambda) = 0$  utilizando el método de Newton-Raphson. En el siguiente cuadro se muestra el listado del algoritmo para hallar el multiplicador plástico algorítmico  $\Delta\lambda$ .

**(Algoritmo 1) Multiplicador plástico algorítmico.**

1. Inicialización:

$$\Delta\lambda^{(0)} = 0;$$

$${}^{n+1}\alpha^{(0)} = {}^n\alpha;$$

$$k = 0;$$

2. MIENTRAS  $|g(\Delta\lambda^{(k)})| < \text{TOL}$ ,

$$a) \quad {}^{n+1}\alpha^{(k)} = {}^n\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\lambda^{(k)};$$

$$b) \quad K({}^{n+1}\alpha^{(k)}) = \sigma_Y^0 + \frac{{}^{n+1}\alpha^{(k)}}{\frac{1}{E} + \frac{{}^{n+1}\alpha^{(k)}}{\sigma_Y^\infty}};$$

$$c) \quad g(\Delta\lambda^{(k)}) = \left\| {}^{n+1}\widehat{\xi} \right\| - \sqrt{\frac{2}{3}}K [{}^{n+1}\alpha(\Delta\lambda)] - \left( 2G + \frac{2}{3}H \right) \Delta\lambda;$$

$$d) \quad Dg(\Delta\lambda^{(k)}) = \left. \frac{\partial g}{\partial \Delta\lambda} \right|_{\Delta\lambda^{(k)}} = \frac{2}{3} \frac{E \sigma_Y^\infty \alpha_{n+1}^{(k)}}{\sigma_Y^\infty + E};$$

$$e) \quad \Delta\lambda^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k)} + \frac{g(\Delta\lambda^{(k)})}{Dg(\Delta\lambda^{(k)})};$$

$$f) \quad \Delta\lambda^{(k)} = \Delta\lambda^{(k+1)};$$

g) Se incrementa  $k$  y se itera;

**4.4.3.2. Algoritmo de Retorno Radial**

Teniendo en cuenta el **Algoritmo 1**, se presenta el Algoritmo de retorno Radial para el caso en estudio. Debido a que  $\Delta\lambda$  no se puede hallar en forma cerrada, se modifica el Algoritmo de Retorno radial planteado para el modelo constitutivo elastoplástico con

endurecimiento combinado, incluyendo un módulo de iteración local de Newton-Raphson que resuelve la no linealidad. En [27] se muestran estrategias de integración de ecuaciones constitutivas con funciones de endurecimiento con grandes no linealidades, todas basadas en la Regla del Trapecio Generalizada y métodos de interpolación inversa. La estructura general del algoritmo se presenta en el siguiente cuadro.

### Algoritmo de Retorno Radial. Plasticidad con endurecimiento Isotrópico Hiperbólico

1. Dado:  $\{ {}^n \boldsymbol{\sigma}, {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p^d, {}^n \alpha, {}^n \mathbf{q}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \}$ ;

2. Calcular el estado de prueba:

$${}^n \boldsymbol{\varepsilon}^d = \frac{{}^n \mathbf{s}}{2G}; \quad {}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}^d = {}^n \boldsymbol{\varepsilon}^d + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^d; \quad {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} = 2G ({}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}^d - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p^d);$$

$${}^{n+1} \widehat{p} = {}^n p + K I_1 (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}); \quad {}^{n+1} \widehat{\alpha} = {}^n \alpha; \quad {}^{n+1} \widehat{\mathbf{q}} = {}^n \mathbf{q}; \quad {}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\xi}} = {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} + {}^n \mathbf{q};$$

$${}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} + {}^{n+1} \widehat{p} \mathbf{1}; \quad {}^{n+1} \widehat{F}_f = \left\| {}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K ({}^{n+1} \widehat{\alpha});$$

3. SI  ${}^{n+1} \widehat{F}_f \leq 0 \implies \{ {}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}, {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p, {}^{n+1} \widehat{\alpha}, {}^{n+1} \widehat{\mathbf{q}} \}$ , EN OTRO CASO

$$a) \quad {}^{n+1} \mathbf{m} = \frac{{}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\xi}}}{\left\| {}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\|};$$

b) Calculo:  $\Delta \lambda$  y  ${}^{n+1} \alpha$  (Algoritmo 1)

$$c) \quad {}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}_p^d = {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p^d + \Delta \lambda {}^{n+1} \mathbf{m};$$

$$d) \quad {}^{n+1} \mathbf{s} = {}^{n+1} \widehat{\mathbf{s}} - 2G \Delta \lambda {}^{n+1} \mathbf{m};$$

$$e) \quad {}^{n+1} p = {}^{n+1} \widehat{p};$$

$$f) \quad {}^{n+1} \mathbf{q} = {}^n \mathbf{q} + \frac{2}{3} H \Delta \lambda {}^{n+1} \mathbf{m};$$

$$g) \quad {}^{n+1} \boldsymbol{\sigma} = {}^{n+1} \mathbf{s} + {}^{n+1} p \mathbf{1};$$

& FIN

#### 4.4.3.3. Operador elastoplástico tangente algorítmico

Al incluir una ley de endurecimiento no lineal, el Algoritmo de Retorno Radial no pierde en carácter de diferenciable y por lo tanto es posible hallar el operador elastoplástico

algorítmico mediante

$${}^{n+1}\mathbf{C}_{ep}^{\Delta} = \mathbf{C}_e - \frac{4G^2\Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \left\{ \mathbf{I}^{dev} + \left[ 1 - \frac{3\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|}{2\Delta\lambda \left( 3G + \frac{\partial K({}^{n+1}\alpha)}{\partial {}^{n+1}\alpha} + H \right)} \right] {}^{n+1}\mathbf{m} \otimes {}^{n+1}\mathbf{m} \right\} \quad (4.161)$$

donde

$$\frac{\partial K({}^{n+1}\alpha)}{\partial {}^{n+1}\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{{}^{n+1}\alpha}{\sigma_Y^\infty}} - \frac{{}^{n+1}\alpha}{\sigma_Y^\infty \left( \frac{1}{E} + \frac{{}^{n+1}\alpha}{\sigma_Y^\infty} \right)^2} \quad (4.162)$$

La deducción de la ec.(4.161) puede verse en el Anexo C.3.2.

#### 4.4.3.4. Respuesta del algoritmo

En la Fig.4.13 se grafican las curvas  $\|\mathbf{s}\| - \|\boldsymbol{\varepsilon}^d\|$  para un ensayo de tracción isotrópica y distintos incrementos de deformación. Se adoptan los siguientes parámetros materiales  $\sigma_Y^0 = 10 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $\sigma_Y^\infty = 2400 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $E = 2,1 \times 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $\nu = 0,3$  y  $K_c = 2,1 \times 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$

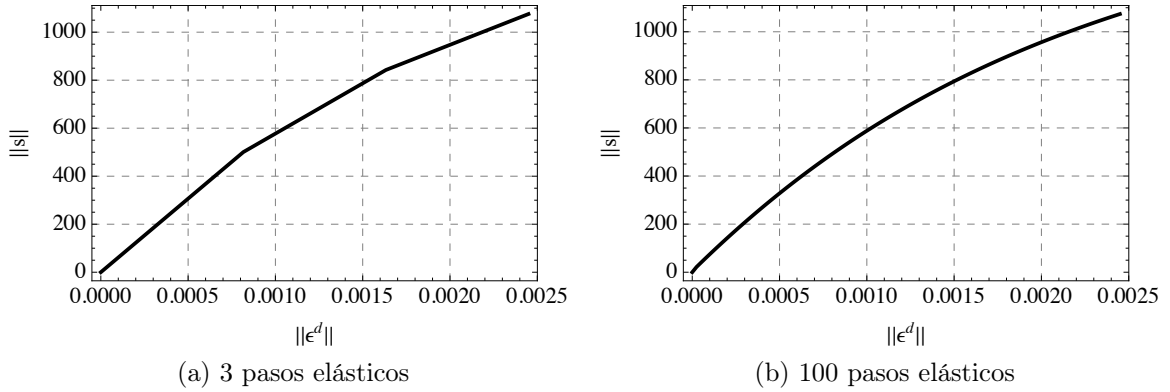


Figura 4.13: Curva  $\|\mathbf{s}\| - \|\boldsymbol{\varepsilon}^d\|$

Se observa que la respuesta del modelo no presenta un quiebre entre el estado elástico y el estado plástico. Esto se debe a que se usó una ley de endurecimiento no lineal. Debido a que no se realizó un ensayo cíclico no se manifiesta el efecto Bauschinger. Si se superponen ambas respuestas (Fig.4.11) se observa que la respuesta del algoritmo es independiente del tamaño de los incrementos de deformación adoptados, la diferencia entre ambas curvas se debe a que, el caso de 3 subincrementos no se llega a representar la cantidad de puntos intermedios que si se logran captar con 100 subincrementos.

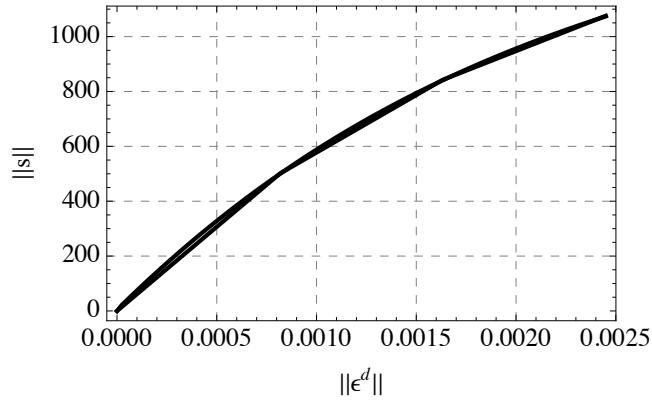


Figura 4.14: Superposición de las respuestas

## 4.5. Interpretación geométrica del Algoritmo de Retorno Radial

En las secciones anteriores, se plantearon los algoritmos de retorno para distintos modelos constitutivos elastoplásticos. Para materiales con respuesta elástica lineal, es decir para materiales en los que la relación constitutiva viene dada por la ec.(5.17), el tensor de tensiones actualizado puede hallarse mediante

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \Delta\lambda \mathbf{C}_e : {}^{n+1}\mathbf{m} \quad (4.163)$$

En este caso, el tensor de tensiones actual, el cual se obtiene mediante el Algoritmo de Retorno Radial, es la proyección del tensor de tensiones de prueba  ${}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$  sobre la superficie de fluencia en la dirección dada por  $\mathbf{C}_e : {}^{n+1}\mathbf{m}$  (ver Fig.4.15)

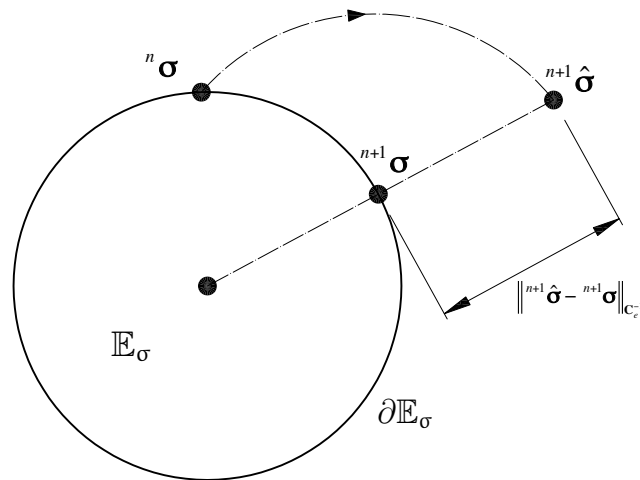


Figura 4.15: Interpretación geométrica del algoritmo de retorno implícito

Para materiales perfectamente plásticos y ley de flujo asociada, el algoritmo de retorno

puede ser interpretado como la proyección más cercana del tensor de tensiones de prueba sobre el conjunto

$$\mathbb{E}_\sigma = \{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid F_f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \} \quad (4.164)$$

Si se define a la norma energética como

$$\| \boldsymbol{\sigma} \|_{\mathbf{C}_e} = \sqrt{ \boldsymbol{\sigma} : [\mathbf{C}_e]^{-1} : \boldsymbol{\sigma} } \quad (4.165)$$

y la medida de distancia asociada entre dos estados de tensión genéricos esta dada por

$$d(\boldsymbol{\sigma}_a, \boldsymbol{\sigma}_b) \equiv \| \boldsymbol{\sigma}_a - \boldsymbol{\sigma}_b \|_{\mathbf{C}_e} \quad (4.166)$$

se deduce que el tensor de tensiones actual es el estado de tensión más cercano al estado de prueba, es decir

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \text{ARG} \left\{ \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{E}_\sigma} [d(\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}})] \right\} \quad (4.167)$$

La interpretación del algoritmo de retorno como la proyección más cercana del estado de tensión de prueba se mantiene válida para materiales con leyes de endurecimiento lineal debido a que se puede introducir una definición correcta de la distancia en el espacio de tensiones [48].

# Capítulo 5

## Plasticidad aplicada a materiales friccionales

### 5.1. Introducción

En el Capítulo 4, se desarrollaron diferentes modelos elastoplásticos, locales y asociados basados en el criterio de von Mises que es uno de los más simples pues la superficie de fluencia generada por este criterio posee simetría radial; por lo tanto, presenta variación de curvatura constante en su sección deviatórica. Esta característica es la que permite la formulación del Algoritmo de Retorno Radial.

En este Capítulo, se estudia un modelo elastoplástico, local y no asociado para materiales granulares. El modelo debe captar sensibilidad a la presión y endurecimiento/ablandamiento por deformación. Para su desarrollo se adopta la función de fluencia de Matsuoka-Nakai introducida por Matsuoka y Nakai en [30] y utilizada por Sfriso en [49]; sus principales características son: i) dependencia de  $J_3$ , que provoca pérdida de simetría en el plano deviatórico y ii) grandes cambios de curvatura de su sección en dicho plano. Estas particularidades son la razón por la cual ya no se pueden aplicar estrategias de retorno convencionales.

Se presentan dos casos: Plasticidad Perfecta y Plasticidad con endurecimiento/ablandamiento. El primer caso se plantea para introducir el modelo y plantear la estrategia de retorno, la que se utiliza en el segundo caso que tiene como objeto modelar la falla por corte de una arena.

Este Capítulo se organiza de la siguiente manera: primero se estudian las características de dos funciones de fluencia para materiales friccionales, luego se introduce la función de fluencia de Matsuoka-Nakai y se presentan sus principales aspectos. Posteriormente se plantea la estructura matemática del modelo y se realiza la formulación numérica para los casos de plasticidad perfecta y plasticidad con endurecimiento/ablandamiento.

## 5.2. Funciones de fluencia para materiales friccionales

El criterio de falla más conocido y estudiado para materiales friccionales, es el criterio de Mohr-Coulomb el cual viene dado por

$$F_f = \left[ \cos(\phi) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta) \sin(\phi) \right] \sqrt{J_2} + 3p \quad (5.1)$$

donde  $J_2$  es el segundo invariante del tensor de tensiones deviatoricas y  $\theta$  es el ángulo de Lode. En este trabajo se adopta la siguiente expresión para  $\theta$

$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( \frac{-3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \right) \quad (5.2)$$

$J_3$  es el tercer invariante del tensor de tensiones deviatoricas.

Por otro lado, Matsuoka y Nakai [30] presentaron un criterio de falla que se puede expresar de la siguiente manera

$$\frac{I_1 I_2}{I_3} = M_f \quad (5.3)$$

donde  $I_1$ ,  $I_2$  y  $I_3$  son los tres invariantes canónicos del tensor de tensiones efectivas  $\boldsymbol{\sigma}^1$  y  $M_f$  es un parámetro que para compresión triaxial vale

$$M_f = 9 + 8 \tan^2(\phi) \quad (5.4)$$

Se pueden interpretar a este par de funciones de fluencia como la extensión a los materiales friccionales de los criterios de Tresca y von Mises.

---

<sup>1</sup>Notar que en este Capítulo se adopta el concepto de tensor de tensiones efectivas y se abandona al tensor de tensiones de Cauchy.



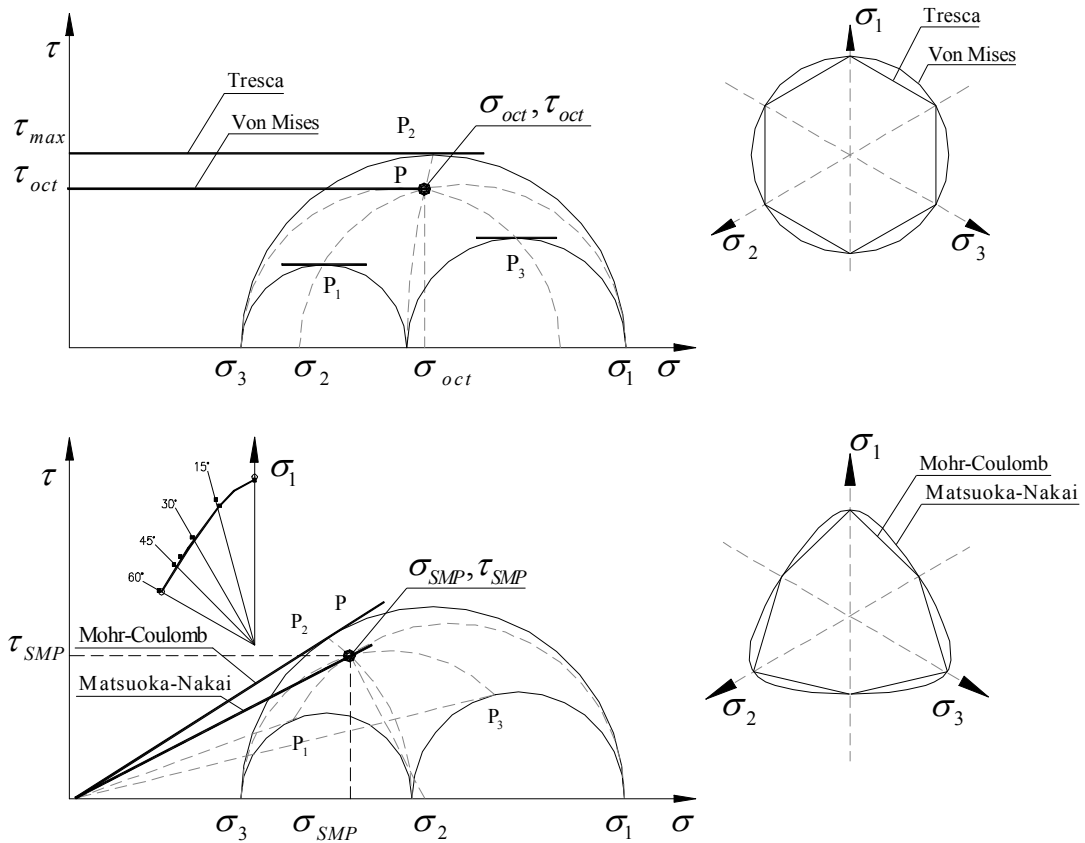


Figura 5.1: Comparación entre los criterios de Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb y Matsuoka-Nakai [30]

En la Fig.5.1 se grafican las funciones de fluencia de Mohr-Coulomb, Matsuoka-Nakai, von Mises y Tresca se observa que así como el criterio de von Mises es la forma suavizada del criterio de Tresca, el criterio de Matsuoka-Nakai es la forma suavizada del criterio de Mohr-Coulomb.

En [49], se establece que la falla de los materiales friccionales ocurre cuando se alcanza la resistencia al corte en el plano espacial movilizado (SMP), que es el punto P de la mitad inferior de la Fig.5.1, que es análogo al plano octaédrico de von Mises que se define en el punto P de la mitad superior de la misma figura. También se puede observar que  $J_3$  provoca que la sección deviatorica no posea simetría radial y manifieste grandes cambios de curvatura.

Se puede reescribir al criterio de falla de Matsuoka-Nakai de la siguiente manera

$$F_f = I_1 I_2 - M_f I_3 \quad (5.5)$$

La ec.(5.5) predice que el cociente  $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)_f$  en extensión triaxial es igual al de compresión triaxial. En este trabajo se adopta la forma funcional para la función de fluencia de Matsuoka-Nakai propuesta por Sfriso en [49], la que se expresa como

$$F_f = (\mu_f + 6) J_{2r} - (\mu_f + 9) J_{3r} - \mu_f \quad (5.6)$$

donde  $J_{2r}$  y  $J_{3r}$  son el segundo y el tercer invariante del tensor de oblicuidad de tensiones  $\mathbf{r}$  dado por la ec.(1.6) respectivamente;  $\mu_f$  es una función de estado dada por

$$\mu_f = 8 \tan^2(\phi) \quad (5.7)$$

Al utilizar el tensor de oblicuidad de tensiones, se reescala la superficie de fluencia en el espacio de tensiones; esta técnica es muy utilizada en modelos constitutivos para materiales sensibles a la presión pues permite obtener expresiones matemáticas análogas a la que se obtiene en el criterio de von Mises. Como ejemplo, a continuación se muestra como se escribe la función de fluencia de Drucker-Prager, la cual pertenece a la familia de funciones de fluencia  $J_2$ , en términos del tensor de oblicuidad de tensiones.

La función de fluencia de Drucker-Prager se puede escribir como [33]

$$F_f = \sqrt{J_2} - \eta p \quad (5.8)$$

donde  $\eta$  es un parámetro del material que se elige para aproximar al criterio de Mohr-Coulomb. Teniendo en cuenta la definición de segundo invariante de  $\mathbf{s}$  dada por la ec.(A.8), la ec.(5.10) se puede reescribir de la siguiente forma

$$F_f = \frac{\|\mathbf{s}\|}{p} - \sqrt{2} \eta \quad (5.9)$$

Como  $\|\mathbf{r}\| = \frac{\|\mathbf{s}\|}{p} = r$ , entonces

$$F_f = r - \sqrt{2} \eta \quad (5.10)$$

Se puede observar la similitud en la estructura matemática entre la ec.(5.10) y la ec.(4.77). La oblicuidad  $r$  es una medida de tensión que esta directamente relacionada con la curvatura de la superficie de fluencia en el plano deviatórico; teniendo en cuenta la ec.(5.10),  $F_f = 0$  implica que  $r = \sqrt{2} \eta = \text{cte}$ .

### 5.3. Función de fluencia de Matsuoka-Nakai

En este apartado se estudia con más profundidad la función de fluencia de Matsuoka-Nakai dada por la ec.(5.6). En la Fig.5.2 se muestra una vista tridimensional de dicha superficie. La curvatura del plano deviatórico está controlada por la dependencia de  $F_f$  respecto

de  $J_{3r}$ , mientras que la curvatura en la dirección hidrostática esta dada por la dependencia del ángulo de fricción interna  $\phi$  respecto de la presión.

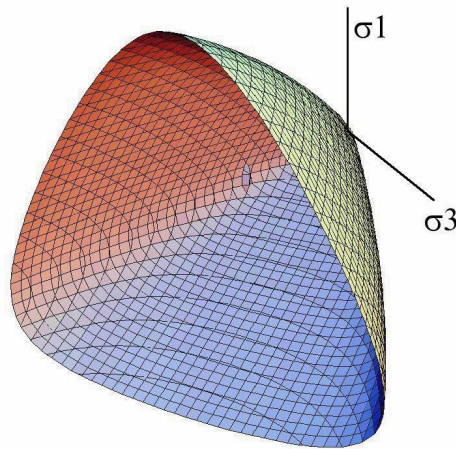


Figura 5.2: Superficie de fluencia, ec.(5.6)[29] [30].

En la Fig.5.2, se grafica sólo la rama admisible de la función de fluencia; sin embargo, la función presenta otras ramas que, si bien no tienen significado físico, existen matemáticamente y presentan complicaciones a la hora reformular el algoritmo de retorno. La solución completa de la ec.(5.6) se representa en la Fig.5.3.

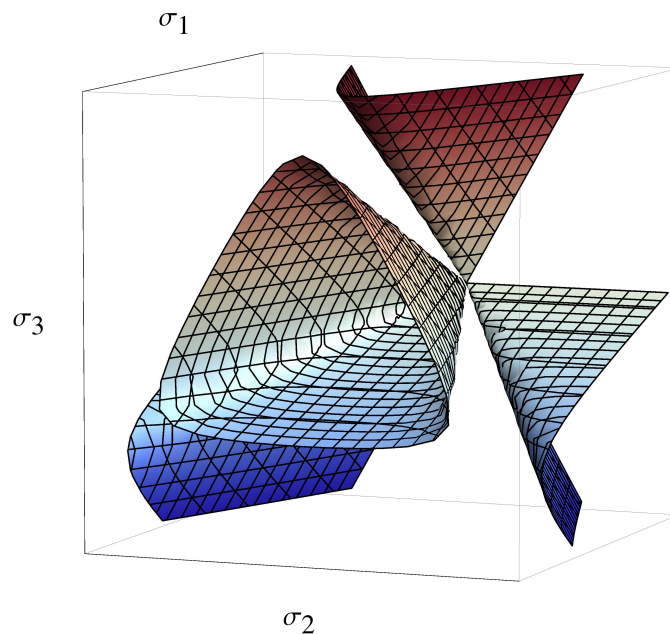


Figura 5.3: Solución completa de la ec.(5.6).

Puede observarse que  $F_f = 0$  genera una familia de superficies, de las cuales sólo una está orientada en el eje  $p > 0$ ; esta característica de la función de fluencia es incompatible con la mayoría de algoritmos de retorno convencionales.

La función de estado  $\mu_f$  evoluciona de acuerdo a

$$\dot{\mu}_f = \frac{\partial \mu_f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial e_0} \dot{e}_0 + \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} \right) \quad (5.11)$$

donde se recuerda que  $\psi$  es el ángulo de dilatancia.

Si se considera una trayectoria a presión constante, la ec.(5.12), toma la forma

$$\dot{\mu}_f = \frac{\partial \mu_f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial e_0} \dot{e}_0 \quad (5.12)$$

Las derivadas parciales de la ec.(5.12) cumplen con las condiciones

$$\frac{\partial \mu_f}{\partial \phi} > 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \psi} > 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial e_0} < 0 \quad (5.15)$$

Por lo tanto, el signo de  $\dot{\mu}_f$  depende del signo de  $\dot{e}_0$ . Pueden distinguirse dos situaciones: i) una muestra suelta reduce su relación de vacíos, por lo que  $\dot{e}_0 < 0$  y por lo tanto  $\dot{\mu}_f > 0$ , o sea el cono se expande y la muestra endurece; y ii) una muestra densa dilata, por lo que  $\dot{e}_0 > 0$  y por lo tanto  $\dot{\mu}_f < 0$ , o sea, el cono se contrae y la muestra ablanda. En la Fig.5.4 se grafica la función de fluencia para tres valores de  $\mu_f$ .

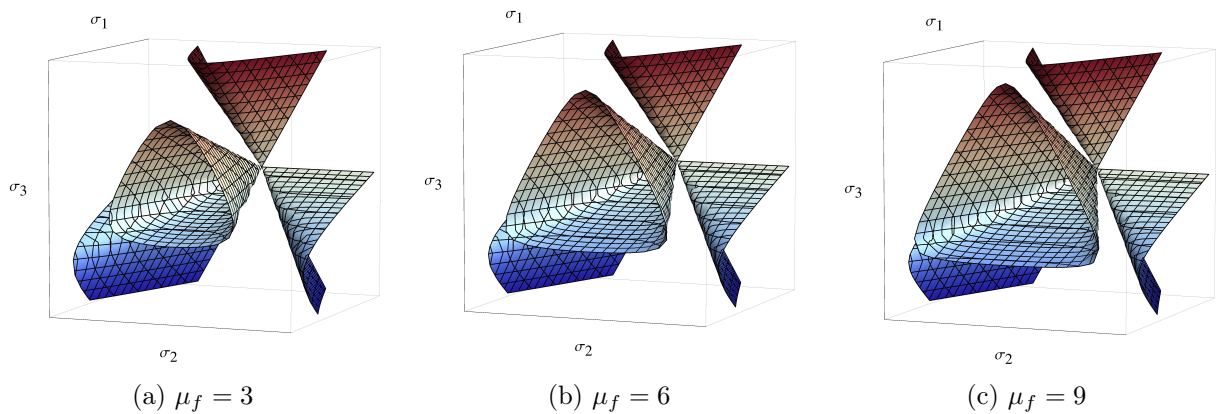


Figura 5.4: Evolución de la función de fluencia dada por la ec.(5.6) respecto a  $\mu_f$ [49].

La curvatura y pérdida de simetría de la sección deviatorica se encuentra controlada por  $J_{3r}$  y se puede cuantificar mediante la oblicuidad  $r$ . Esta característica es típica en las funciones de fluencia para materiales granulares que tienen una fuerte dependencia respecto al ángulo de Lode. En [39] se discute sobre la influencia del tercer invariante en la curvatura de la sección deviatorica de las funciones de fluencia que dependen de  $J_3$ . En las funciones

que dependen de  $J_2$ , esto último no ocurre pues la oblicuidad permanece constante y por lo tanto la sección deviatorica presenta simetría radial. En la Fig.5.5 se grafica a la sección deviatorica de la superficie  $F_f = 0$  para tres valores de la oblicuidad; se observa que a medida que la oblicuidad crece la variación de curvatura se hace cada vez más pronunciada.

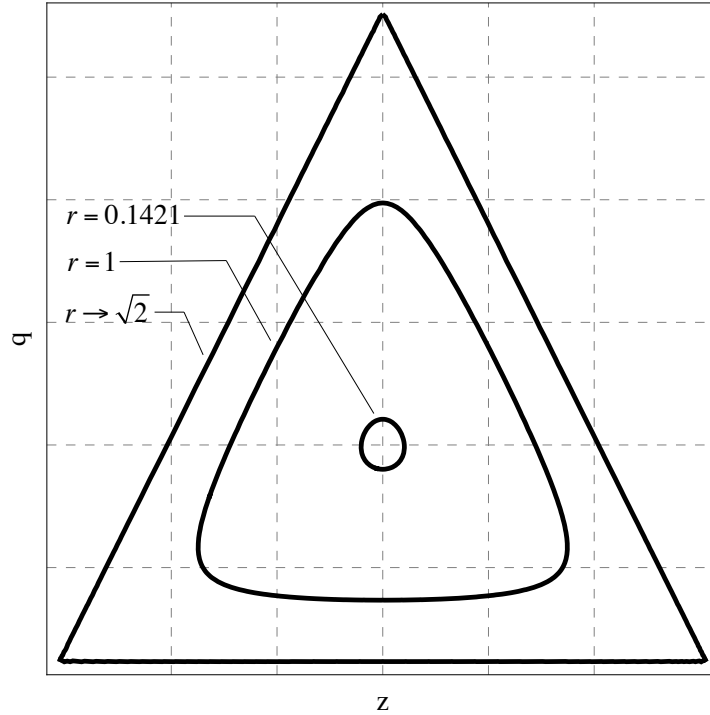


Figura 5.5: Secciones deviatoricas de la ec.(5.6) para distintos valores de  $r$ .

## 5.4. Estructura matemática del modelo

La estructura matemática básica de un modelo para un material elastoplástico local, ya fue descrita para el caso plasticidad asociada en el Capítulo 4. En este apartado se enumeran los componentes fundamentales del modelo.

### 5.4.1. Cinemática

Se asume que válida la cinemática de las deformaciones infinitesimales, donde es válida la descomposición aditiva del tensor de deformaciones en una componente elástica y otra componente plástica como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (5.16)$$

en la que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformaciones totales,  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  es el tensor de deformación elástica y  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  es el tensor de deformación plástica.

### 5.4.2. Variables de estado

El estado del material se caracteriza mediante el tensor de tensiones efectivas  $\boldsymbol{\sigma}$  y la relación de vacíos para presión nula  $e_0$ . Para el caso de plasticidad perfecta sólo habrá evolución de  $\boldsymbol{\sigma}$  pues  $e_0$  es una variable plástica.

### 5.4.3. Relación tensión deformación

Se adopta por simplicidad que el comportamiento elástico del material es lineal, y está dado por la siguiente ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{C}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (5.17)$$

donde  $\mathbf{C}_e$  viene dado por la ec.(3.3).

### 5.4.4. Función de fluencia

La función de fluencia ya fue descrita en la Sección 5.3, la misma se puede escribir en forma genérica de la siguiente manera

$$F_f(\boldsymbol{\sigma}, e_0) = 0 \quad (5.18)$$

### 5.4.5. Regla de flujo.

La *Desigualdad de Clausius-Duhem* conduce, junto con la *condición de máxima disipación plástica* a reglas de flujo asociadas (ver Anexo C.1). Durante el flujo plástico, los materiales friccionales exhiben un comportamiento dilatante cuando el empaquetamiento es denso; la predicción de la dilatancia mediante una regla de flujo asociada se ve sobreestimada, es por esta razón que es necesario utilizar una regla de flujo no asociada la cual, matemáticamente, se escribe de la siguiente manera

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m} \quad (5.19)$$

donde  $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$  es el tensor de dirección del flujo plástico.

Para tener en cuenta el comportamiento dilatante del material, se adopta asociatividad deviatorica y no asociatividad volumétrica. El tensor de dirección de flujo plástico  $\mathbf{m}$  se calcula mediante

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^d + \beta \mathbf{1} \quad (5.20)$$

donde  $\beta$  es un parámetro de dilatación, y

$$\mathbf{m}^d = \frac{\mathbf{n}^d}{\|\mathbf{n}^d\|} \quad (5.21)$$

es un tensor unitario deviatorico,

$$\mathbf{n}^d = \mathbf{I}^{dev} : \mathbf{n} \quad (5.22)$$

donde

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.23)$$

En el Anexo D.1 se hallan las expresiones para  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{n}^d$  dadas por

$$\mathbf{n} = \frac{1}{p} \left\{ [r^2 + (\mu_f + 9) J_{3r}] \mathbf{1} + (\mu_f + 6) \mathbf{r} - (\mu_f + 9) \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right\} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{n}^d = \frac{1}{p} \left\{ (\mu_f + 9) \frac{r^2}{3} \mathbf{1} + (\mu_f + 6) \mathbf{r} - (\mu_f + 9) \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right\} \quad (5.25)$$

Se observa que la regla de flujo adoptada mantiene la dirección de la componente deviatorica de la normal saliente  $\mathbf{n}$  y se adopta una componente volumétrica mediante el parámetro de dilatación  $\beta$ . En el Anexo D.3 se realiza el análisis termodinámico de la regla de flujo adoptada.

#### 5.4.6. Variable interna plástica

Se adopta, como variable interna plástica, a la relación de vacíos a presión nula  $e_0$ , cuya ecuación de evolución se escribe de la siguiente manera [49]

$$\dot{e}_0 = -(1 + e_0) \dot{\xi}_p^v \quad (5.26)$$

donde

$$\dot{\xi}_p^v = \dot{\lambda} \beta \quad (5.27)$$

### 5.4.7. Condiciones de carga y descarga.

Se adoptan las condiciones complementarias de Khun-Tucker

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad F_f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad (5.28)$$

$$\dot{\lambda} F_f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

Además de estas condiciones, se requiere que se cumpla con la condición de persistencia dada por

$$\dot{\lambda} \dot{F}_f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (5.29)$$

## 5.5. Formulación para plasticidad perfecta

En el caso de plasticidad perfecta se cumple que  $\dot{\epsilon}_p^v = \dot{\lambda} \beta = 0$ , como en estado plástico  $\dot{\lambda} > 0$ , se debe cumplir que  $\beta = 0$ . A su vez, si observamos la ec.(D.74), para el caso de plasticidad perfecta se debe cumplir que

$$\dot{e}_0 = 0 \iff e_0 = \text{cte} \quad (5.30)$$

Al mantener a la relación de vacíos a presión nula constante, se fija a la función de fluencia pues la función de estado  $\mu_f = \mu_f(e_0, p)$ . De la ec.(5.20) se obtiene que

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^d \quad (5.31)$$

Es decir, se tiene asociatividad deviatorica solamente sin evolución de la deformación volumétrica plástica.

### 5.5.1. Multiplicador plástico consistente

Teniendo en cuenta la condición de persistencia dada por la ec.(5.29) y que en flujo plástico se debe cumplir que  $\dot{\lambda} > 0$ , se obtiene la condición de consistencia  $\dot{F}_f = 0$ . Teniendo en cuenta la regla de la cadena para la derivación, la condición de consistencia se puede escribir como

$$\dot{F}_f = \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_e : \dot{\lambda} \mathbf{m} = 0 \quad (5.32)$$



donde  $\frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n} \neq \mathbf{m}$  (regla de flujo no asociada), es la normal saliente a  $F_f$ . De la ec.(5.32) se despeja el multiplicador plástico consistente  $\dot{\lambda}$ ,

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m}} \quad (5.33)$$

### 5.5.2. Operador elastoplástico tangente

La relación constitutiva tangente viene dada por

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.34)$$

donde  $\mathbf{C}_{ep}$  es el operador elastoplástico tangente.

El  $\mathbf{C}_{ep}$  para un material perfectamente plástico viene dado por (ver Sección 4.3.5)

$$\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e - \frac{\mathbf{C}_e : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{C}_e}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m}} \quad (5.35)$$

Se observa que la ec.(5.35) tiene la misma estructura matemática que la ec.(4.116) hallada para plasticidad asociada. Sin embargo, estas son diferentes pues en este caso  $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$  y; por lo tanto, el operador en sólo conserva las siguientes simetrías

$$\mathbf{C}_{epijkl} = \mathbf{C}_{epijlk} = \mathbf{C}_{epjilk} \quad (5.36)$$

Es decir, que la simetría mayor no se conserva ( $\mathbf{C}_{epijkl} \neq \mathbf{C}_{epklij}$ ) para un modelo elastoplástico no asociado; dado que los términos disipativos son nulos,  $\mathbf{C}_{ep}$  es definido positivo.

### 5.5.3. Formulación numérica

En el instante  ${}^n t$  las variables de estado son

$$\{ {}^n \boldsymbol{\sigma}, {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p \} \quad (5.37)$$

Se supone que  $\phi$ ,  $E$  y  $\nu$  son conocidos y son constantes del material. Al adoptar  $\phi$  como un parámetro externo se fija la superficie de fluencia y al no haber evolución de la misma el comportamiento es perfectamente plástico.

Entonces, el problema consiste en hallar  $\{ {}^{n+1} \boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}_p \}$  dados  $\{ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, {}^n \boldsymbol{\sigma}, {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p \}$ .

El estado de prueba se encuentra definido por

$${}^{n+1} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.38)$$

$${}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (5.39)$$

$${}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e : {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (5.40)$$

La formulación continua de elastoplasticidad se resume en el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m} \\ F_f = 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

Aplicando el Método de Euler implícito, se obtiene

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : ({}^n \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (5.42)$$

sujeta a la restricción

$${}^{n+1}F_f = F_f ({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}\mu_f) = 0 \quad (5.43)$$

donde para el caso de plasticidad perfecta

$${}^{n+1}\mu_f = {}^n \mu_f \quad (5.44)$$

es decir, se fija la función de fluencia en toda la integración. Las ecs.(5.46) y (5.44) están expresadas en términos del tensor de deformación plástica incremental

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \lambda \mathbf{m} ({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}) \quad (5.45)$$

que tiene una única variable independiente  $\lambda$ , por lo que en un paso elastoplástico, la ec.(5.46) se reduce a

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}(\lambda) \quad (5.46)$$

sujeto a la restricción

$$\tilde{F}_f(\lambda) = 0 \quad (5.47)$$

Existen dos tipos de algoritmos diferentes para resolver este operador: el algoritmo directo o de nivel simple y el algoritmo indirecto o multinivel. En el primero el multiplicador plástico  $\lambda$  se resuelve en forma directa en un sólo bucle iterativo que involucra una actualización simultánea del estado de tensión y de las variables internas. El multiplicador plástico se obtiene de la condición de consistencia incremental no lineal  ${}^{n+1}F_f = F(\lambda)$  mediante el Método de Newton-Raphson. En cambio, en el algoritmo indirecto se realiza una iteración de dos niveles para actualizar las variables de estado. En [1] [6] [7] [8] [9] [27] [46], se describen una familia de métodos de integración multinivel, diferente a la mayoría de los algoritmos de actualización de tensiones convencionales, en los que se itera sobre un conjunto de variables simultáneas. En [17] se discute sobre los algoritmos de nivel simple y múltiple, haciendo especial énfasis en los algoritmos de integración de dos niveles.

En este trabajo se adopta una estrategia de integración directa para las variables de estado en la que se plantea un bucle de iteración que proyecta el estado de prueba sobre la superficie de fluencia para obtener  ${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}$ . Debido a que la superficie adoptada no es cuádrica, se plantea un método multipaso para hallar el multiplicador plástico [41].

#### 5.5.4. Problemas numéricos asociados a la función de Matsuoka-Nakai

La superficie de fluencia de Matsuoka-Nakai, por su definición matemática, presenta una serie de inconvenientes los cuales se pueden resumir en: i) existencia de ramas que no son compatibles con el sentido físico del problema; y ii) grandes variaciones de curvatura en su Sección deviatórica.

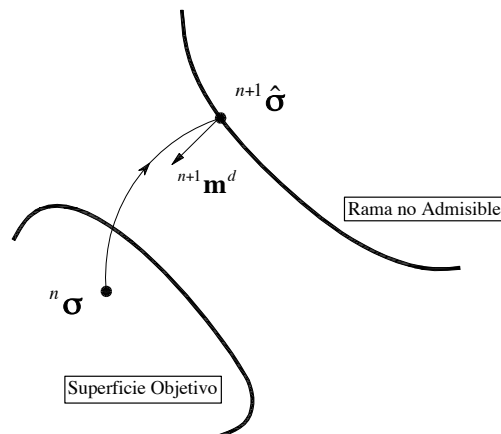


Figura 5.6: Problema numérico debido a la aparición de más de una rama en la función de fluencia.

En la Fig.5.6 se puede observar un esquema de la primera situación; para un incremento del tensor de deformaciones infinitesimales arbitrario  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , es posible que el tensor de tensiones de prueba  ${}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$  se encuentre sobre una rama no admisible, en ese caso el tensor  $\mathbf{m}^d$  no se encuentra bien definido y no apunta a la superficie objetivo.

Este problema se puede solucionar, si se evalúa al tensor  $\mathbf{m}^d$  en una sección deviatorica homotética a la sección correspondiente a la superficie objetivo. La homotecia<sup>2</sup> se logra al encontrar el incremento de presión  $\Delta p$ , tal que

$$F_f(\boldsymbol{\sigma}^*) = 0 \quad (5.48)$$

donde

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{s} + p^*\mathbf{1} \quad (5.49)$$

y  $p^* = p + \Delta p$  es una presión ficticia.

Al reemplazar la ec.(5.49) en la ec.(5.3) se obtiene un polinomio cuya variable independiente es  $p^*$ . En la Fig.5.7 se grafica el polinomio resultante en la que se observa que la única presión ficticia físicamente admisible es la que corresponde a la mayor raíz del mismo.

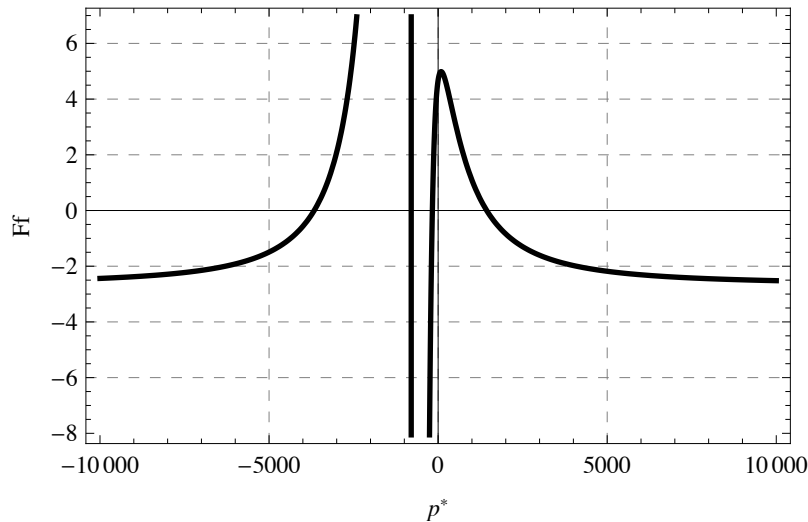


Figura 5.7: Presión ficticia.

La homotecia expande la sección deviatorica de la superficie de fluencia mediante un incremento de presión hasta un cierto estado de tensión conservando su curvatura, luego se evalúa allí una estimación del tensor  $\mathbf{m}^d$ .

La presión ficticia  $p^*$  corresponde a otra traza de la función de fluencia, a medida que el método converge hacia la superficie objetivo, se debe cumplir que  $p^* \rightarrow {}^{n+1}p$ .

<sup>2</sup>Homotecia: es una transformación afín que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor.

Si bien, con este artificio se logra definir el sentido correcto de el tensor  $\mathbf{m}^d$ , no se controlan las fuertes variaciones en su dirección debido a los cambios bruscos de curvatura que presenta la sección deviatórica. En la Fig.5.8<sup>3</sup> se observa que, al aplicar la homotecia de  $F_f$ , la dirección de  $\mathbf{m}^d$  varía fuertemente debido a los cambios de curvatura que presenta en la sección deviatórica y por lo tanto, se propaga un error de inclinación en el tensor  $\mathbf{m}^d$  (comparar al tensor correcto  ${}^{n+1}\mathbf{m}_{corr}^{d(i+1)}$  y  ${}^{n+1}\mathbf{m}^{d(i+1)}$ ).

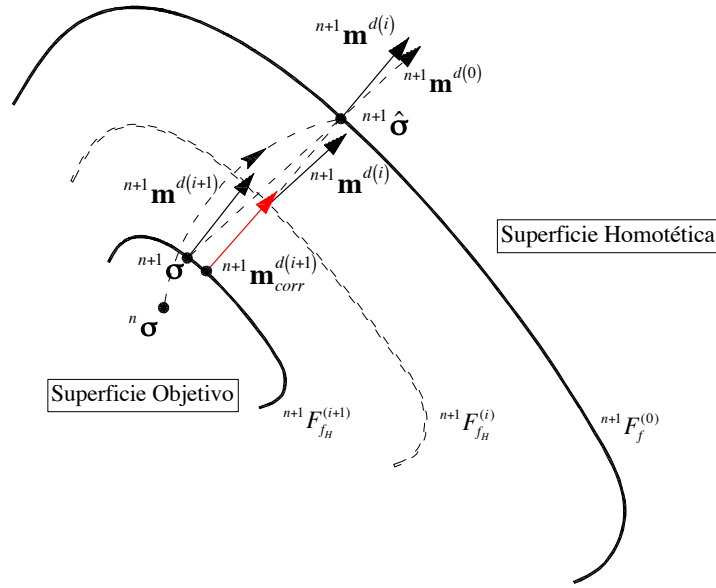


Figura 5.8: Inestabilidad en la técnica de retorno debido a las variaciones de curvatura de la superficie de fluencia.

En la Fig.5.9 se muestra la influencia que tienen las variaciones de curvatura en el plano deviatórico junto con la magnitud del multiplicador plástico  $\lambda$  en los cambios de dirección del tensor  $\mathbf{m}^d$ . Se observa que si la presión ficticia es demasiado elevada como para que la sección homotética esté demasiado alejada de la objetivo, la influencia de los cambios de curvatura se amplifica y se combina con la magnitud del multiplicador plástico provocando grandes variaciones en la dirección de  $\mathbf{m}^d$ , generando oscilaciones en el algoritmo de retorno.

Para solucionar este problema, se propone una corrección para  $\mathbf{m}^d$  que consiste en interpolar a  $\mathbf{m}^{d(i+1)}$  siempre que el ángulo entre  $\mathbf{m}^{d(i)}$  y  $\mathbf{m}^{d(i+1)}$  sea mayor que el ángulo de Lode máximo ( $60^\circ$ ). La interpolación que se propone es

$$\mathbf{m}^{d(i+1)} = \frac{|\Delta\lambda^{(i+1)}| \mathbf{m}^{d(i+1)} + \lambda^{(i+1)} \mathbf{m}^{d(i)}}{\| |\Delta\lambda^{(i+1)}| \mathbf{m}^{d(i+1)} + \lambda^{(i+1)} \mathbf{m}^{d(i)} \|} \quad (5.50)$$

donde  $\Delta\lambda^{(i+1)}$  es el incremento del multiplicador plástico y  $\lambda^{(i+1)}$  es el multiplicador plástico actualizado, los cuales se definen más adelante; se coloca  $|\bullet|$  en el incremento del multiplicador plástico porque este podría ser negativo en ciertos casos. En la ec.(5.50), por claridad se omite

<sup>3</sup> $F_{fH}$  es la función de fluencia homotética

el superíndice  $n+1$  ( $\bullet$ ).

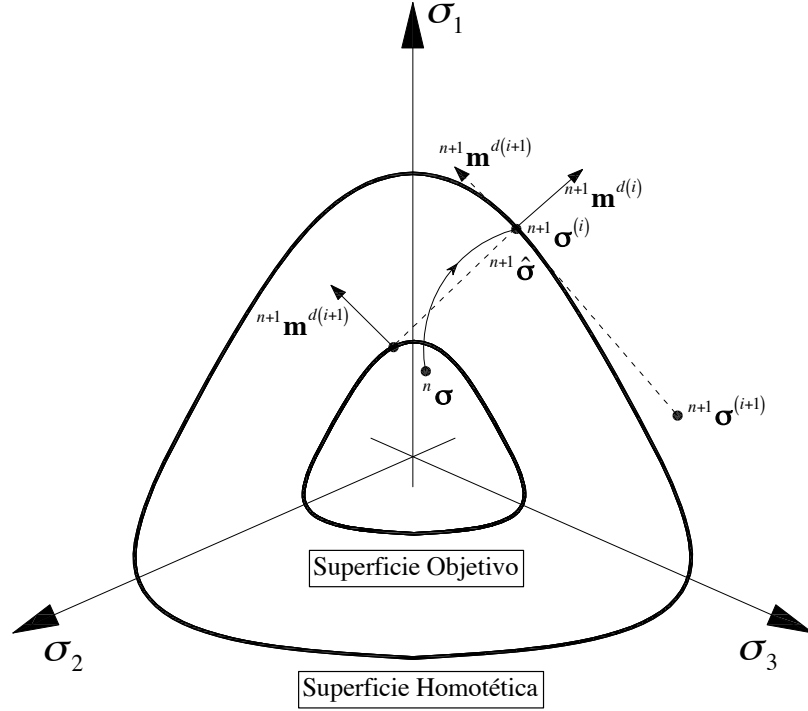


Figura 5.9: Efectos de los cambios de curvatura y del multiplicador plástico en los cambios de dirección de  $\mathbf{m}^d$ .

Por otro lado, en la Fig.5.10, se grafica a  $F_f$  y  $\|\mathbf{n}\|$  en función de  $r$  para compresión triaxial. Se puede observar que la función de fluencia tiene más de un cero (el segundo cero es el plano definido por una tensión principal nula) y que la norma de la normal tiene un cero intermedio. Claramente se ve que  $F_f$  tiene un máximo local cuando  $\|\mathbf{n}\| = 0$  y un segundo cero cuando  $r = \sqrt{6}$ .

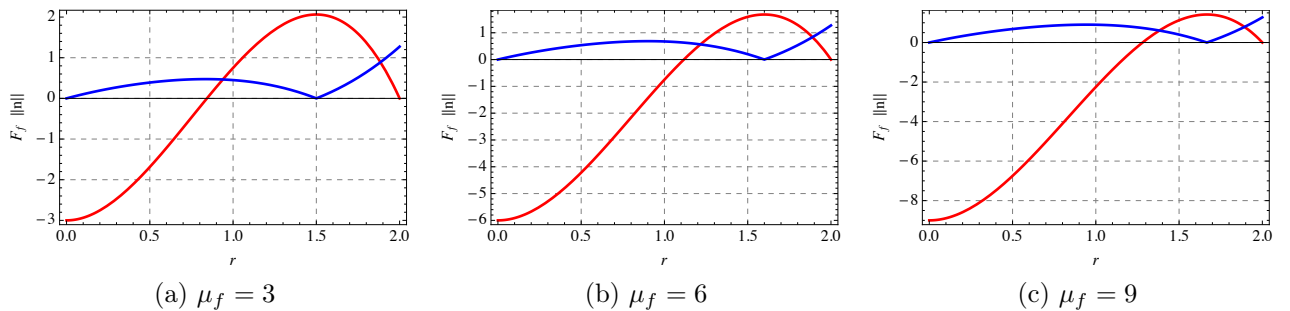


Figura 5.10: Función de fluencia y norma de la normal saliente en función de  $r$  para tres valores de  $\mu_f$  [49].

Sfriso propone en [49] una linealización de la ec.(5.3) para salvar el problema del segundo cero dada por

$$r < r_{lim} \rightarrow F_f = \frac{\mu_f + 6}{2} r^2 - (\mu_f + 9) J_{3r} - \mu_f = 0 \quad (5.51)$$

$$r > r_{lim} \rightarrow F_f = \frac{\mu_f + 6}{2} r_{lim} r - (\mu_f + 9) \frac{r_{lim}^2}{r^2} J_{3r} - \mu_f = 0 \quad (5.52)$$

donde  $r_{lim}$  es un valor umbral para la oblicuidad  $r$  denominado *oblicuidad límite*.

En este trabajo se adopta  $r_{lim} = \sqrt{2}$  pues es el valor para el cual la sección deviatorica de la superficie de fluencia cambia de triangular con sus vértices suavizados a una triangular (ver Fig.5.5). En la Fig.5.11 se grafica la función de fluencia linealizada y la función de fluencia original superpuestas.

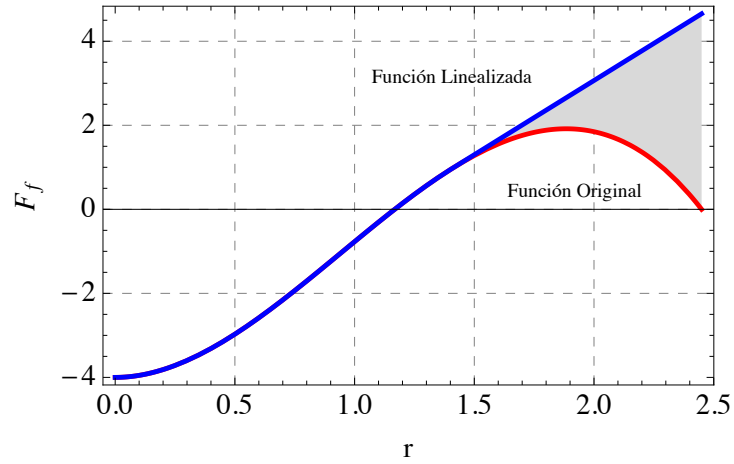


Figura 5.11: Función de fluencia original y linealizada para el caso de compresión triaxial [49].

### 5.5.5. Multiplicador plástico algorítmico

La respuesta numérica de ecuaciones constitutivas para materiales que dependen de la presión es muy sensible a los cambios de la dirección de flujo plástico. Debido a la no asociatividad, en el retorno plástico el tensor  $\mathbf{m}$  no es perpendicular a la superficie de fluencia objetivo y no es colineal con el incremento de deformación plástica. La perpendicularidad del tensor  $\mathbf{m}$  y la colinealidad son características de reglas de flujo asociadas e implican una gran simplificación en su formulación numérica.

En el trabajo de Promono y Willam [41] se desarrollaron dos procedimientos distintos para el cálculo del incremento del multiplicador plástico algorítmico para incrementos finitos de la condición de consistencia plástica.

La idea básica consiste en forzar en  $t = {}^{n+1}t$ , la condición de consistencia incremental  ${}^{n+1}F_f = 0$ ; debido a que esta condición es no lineal se hace un desarrollo en serie de Taylor centrado en  ${}^n t$  del campo escalar  ${}^{n+1}F_f$

$${}^{n+1}F_f = {}^n F_f + \Delta F_f + \frac{1}{2} \Delta F_f^2 + \dots + E(O^n) = 0 \quad (5.53)$$

Este planteo permite plantear dos posibilidades; la primer posibilidad consiste en truncar la ec.(5.53) en el término lineal lo cual resulta en la forma tradicional de la condición de consistencia linealizada

$${}^{n+1}F_f \approx F_f|_{\boldsymbol{\sigma}^*; \boldsymbol{\eta}^*} + \left. \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}^*; \boldsymbol{\eta}^*} : ({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^*) + \left. \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}^*; \boldsymbol{\eta}^*} : ({}^{n+1}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^*) \quad (5.54)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}^*$  y  $\boldsymbol{\eta}^*$  son los valores del tensor de tensiones y de las variables internas plásticas donde se centra el desarrollo en serie de Taylor, para el caso de plasticidad perfecta  $\boldsymbol{\eta}^* = {}^{n+1}\boldsymbol{\eta} = 0$ .

Este razonamiento conduce a una serie de algoritmos multipaso acumulativos denominados *Cutting Plane Algorithms* los cuales se pueden estudiar en [33] y [48]. El principal inconveniente de este tipo de estrategias es que no son diferenciables y no permiten el cálculo del operador elastoplástico tangente algorítmico para poder obtener convergencia cuadrática en el esquema iterativo de Newton-Raphson desarrollado para el Método de los Elementos Finitos.

El segundo método consiste en resolver la ecuación no lineal  ${}^{n+1}F_f(\lambda) = 0$  lo cual conduce al algoritmo denominado *Closest Point Proyection Method* (CPPM) el cual se puede estudiar en [17] [33] [46] y [48]. En el caso de funciones de fluencia cuádricas esta alternativa se puede implementar fácilmente y se resuelve la condición de consistencia incremental por el Método de Newton-Raphson, sin embargo, en funciones que no son cuádricas la implementación de esta alternativa no es trivial.

En este trabajo se adopta una variante de la forma linealizada de la condición de consistencia plástica que consiste en centrar el Desarrollo en Serie de Taylor de la ec.(5.53), manteniendo fijas a la superficie de fluencia, en  ${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$  de  ${}^{n+1}F_f^{(i+1)}$ , entonces se obtiene la siguiente expresión

$${}^{n+1}F_f^{(i+1)} \approx {}^{n+1}F_f^{(i)} + \left. \frac{\partial {}^{n+1}F_f}{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}} \right|_{{}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}} : ({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} - {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}) \quad (5.55)$$

donde

$$\left. \frac{\partial {}^{n+1}F_f}{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}} \right|_{{}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)}} = {}^{n+1}\mathbf{n}^{(i)} \quad (5.56)$$

y

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} = {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \lambda^{(i+1)} \mathbf{C}_e : {}^{n+1}\mathbf{m}^{(i)} \quad (5.57)$$



$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \lambda^{(i)} \mathbf{C}_e : {}^{n+1}\mathbf{m}^{(i)} \quad (5.58)$$

Combinando las ecs.(5.58) y (5.57), se tiene

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} - {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = -\Delta\lambda^{(i+1)} \mathbf{C}_e : {}^{n+1}\mathbf{m}^{(i)} \quad (5.59)$$

Reemplazando la ec.(5.59) en la ec.(5.60), se tiene

$${}^{n+1}F_f^{(i+1)} \approx {}^{n+1}F_f^{(i)} - \Delta\lambda^{(i+1)} {}^{n+1}\mathbf{n}^{(i)} : \mathbf{C}_e : {}^{n+1}\mathbf{m}^{(i)} \quad (5.60)$$

Entonces, despejando  $\Delta\lambda$  de la ec.(5.60)

$$\Delta\lambda^{(i+1)} \approx \frac{{}^{n+1}F_f^{(i)}}{{}^{n+1}\mathbf{n}^{(i)} : \mathbf{C}_e : {}^{n+1}\mathbf{m}^{(i)}} \quad (5.61)$$

donde para el caso de plasticidad perfecta  ${}^{n+1}\mathbf{m}^{(i)} = {}^{n+1}\mathbf{m}^{d(i+1)}$ .

El multiplicador plástico algorítmico se obtiene mediante el siguiente esquema iterativo

$$\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} + \Delta\lambda^{(i+1)} \quad (5.62)$$

Se observa que en la ec.(5.61) se escribió "  $\approx$  " y no " = ", esto se debe a que se realizó una linealización en una función que no admite linealización exacta. Como en la iteración se congela la evolución de la superficie de fluencia (en plasticidad perfecta la superficie se mantiene fija desde un principio), la ec.(5.61) se utiliza también para el modelo que capta dilatancia.

### 5.5.6. Algoritmo de retorno

En este apartado se presenta el algoritmo de integración del modelo entre el paso  $n$  y el paso  $n + 1$  para el caso de plasticidad perfecta. Al combinar la homotecia con la ec.(5.62), se obtiene por definición un esquema iterativo de Newton-Raphson donde se resuelve el operador de integración definido por las ec.(5.46) sujeto a la ec.(5.47). En el siguiente cuadro se muestra la estructura general del algoritmo.

### Algoritmo de retorno para plasticidad perfecta no asociada

1. Dado  $\{^n\boldsymbol{\sigma}, ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}$ ;
2. Calcular el estado de prueba:  

$$^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = ^n\boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}; \quad ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p; \quad ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e : ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e;$$

$$^{n+1}\widehat{F}_f = ^{n+1}F_f(^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}});$$
3. SI  $^{n+1}\widehat{F}_f \leq 0 \implies \{^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}, ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p\}$  Y FIN;
4. SI  $^{n+1}\widehat{F}_f > 0$ , ENTONCES
  - a) Se estima una cota inferior del multiplicador  $\lambda^{(0)}$ ;
  - b) Se calcula la presión ficticia  $p^*$  mediante  $F_f(p^*) = 0$ ;
  - c) Se calcula  $^{n+1}\mathbf{m}^{(0)} = ^{n+1}\mathbf{m}^{d(0)}$  en la superficie homotética mediante la ec.(5.21);
  - d) Se halla  $^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_p^{(0)} = ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p + \lambda^{(0)} ^{n+1}\mathbf{m}^{(0)}$ ;
  - e) Se halla  $^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{C}_e : (^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - ^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_p^{(0)})$ ;
  - f) Se inicializa  $^{n+1}F_f^{(0)} = ^{n+1}F_f(^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(0)})$ ;
  - g) MIENTRAS  $\left| ^{n+1}F_f^{(i)} \right| > \text{TOL}$ ,
    - 1) Se calcula la presión ficticia  $p^*$  mediante  $F_f(p^*) = 0$ ;
    - 2) Se calcula  $^{n+1}\mathbf{m}^{(i)}$  en la superficie homotética mediante la ec.(5.21);
    - 3) Se calcula el incremento del multiplicador plástico mediante la ec.(5.61);
    - 4) Se actualiza el multiplicador  $\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} + \Delta\lambda^{(i+1)}$ ;
    - 5) Se compara  $^{n+1}\mathbf{m}^{(i-1)}$  y  $^{n+1}\mathbf{m}^{(i)}$  y si  $^{n+1}\mathbf{m}^{(i-1)} : ^{n+1}\mathbf{m}^{(i)} \geq \frac{1}{2}$  se corrige  $^{n+1}\mathbf{m}^{(i)}$  mediante la ec.(5.50);
    - 6) Se actualiza  $^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} = ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C}_e : \lambda^{(i+1)} ^{n+1}\mathbf{m}^{(i)}$ ;
    - 7) Se actualiza  $^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_p = ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p + \lambda^{(i+1)} ^{n+1}\mathbf{m}^{(i)}$ ;
    - 8) Se incrementa  $i$  y se itera;
5. FIN;

### 5.5.7. Estimación de $\lambda^{(0)}$

En la Fig.5.3 se observa que existen varias ramas de la superficie de fluencia en el espacio generado por  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ , en las que  ${}^{n+1}\widehat{F}_f < 0$ . De todas las ramas existentes sólo la orientada en el eje  $p > 0$  kPa tiene sentido físico. Esta solución se encuentra circunscripta en la función de fluencia de Drucker-Prager dada por la ec.(5.8), si la reescribimos de la siguiente manera

$$F_f = \|\mathbf{s}\| - \rho_{DP} p \quad (5.63)$$

donde  $\rho_{DP}$  viene dada [49] por

$$\rho_{DP} = \frac{2\sqrt{6}\mu_f}{3\sqrt{\mu_f + 8} - \sqrt{\mu_f}} \quad (5.64)$$

y es el valor de diámetro del cono dado por la ec.(5.63) tal que circunscribe a la función de fluencia de Matsuoka-Nakai.

Se puede calcular la primera estimación de  $\lambda$  mediante un retorno radial. Teniendo en cuenta lo explicado en el Capítulo 4 se calculan

$${}^{n+1}\mathbf{s}^{(0)} = {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} - 2G \frac{{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}}{\|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\|} \lambda^{(0)} \quad (5.65)$$

$${}^{n+1}p^{(0)} = {}^{n+1}\widehat{p} \quad (5.66)$$

Entonces el multiplicador plástico total inicial viene dado por

$$\lambda^{(0)} = \frac{\|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\| - \rho_{DP} {}^{n+1}\widehat{p}}{2G} \quad (5.67)$$

### 5.5.8. Operador elastoplástico tangente algorítmico

Para completar el algoritmo presentado, se calcula el operador elastoplástico algorítmico para poder obtener convergencia cuadrática en el esquema iterativo de Newton-Raphson en el Método de los Elementos Finitos. En el Anexo (D.5) se deduce la expresión del operador que viene dado por

$${}^{n+1}\mathbf{C}_{ep}^{\Delta} = \frac{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}_e^* - \frac{\mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}\mathbf{m} \otimes {}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^*}{{}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}\mathbf{m}} \quad (5.68)$$

donde

$$\mathbf{C}_e^* = [\mathbf{C}_e^{-1} + \lambda^{n+1} \boldsymbol{\Xi}]^{-1} \quad (5.69)$$

y  $\boldsymbol{\Xi}$  es el *tensor Hessiano de cuarto orden* dado por

$$\boldsymbol{\Xi} = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\|\mathbf{n}^d\|} [\mathbf{I} - \mathbf{m}^d \otimes \mathbf{m}^d] : \frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.70)$$

La derivada de la componente deviatórica de la normal saliente  $\mathbf{n}^d$  se deduce en el Anexo D.2.2 y vale

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{p^2} & \left[ -(\mu_f + 9) \frac{r^2}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 \mathbf{1} \otimes \mathbf{r} + (\mu_f + 9) \frac{2}{3} \mathbf{r} \otimes \mathbf{1} + (\mu_f + 6) \mathbf{I}^{dev} + \right. \\ & \left. (\mu_f + 9) \mathbf{1} \otimes \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - (\mu_f + 9) (\delta_{ik} r_{lj} + r_{ik} \delta_{lj}) \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \otimes \underline{\mathbf{e}}^k \otimes \underline{\mathbf{e}}^l \right] \quad (5.71) \end{aligned}$$

En las ecs.(5.70) y (5.71) se omite por claridad el superíndice  $n+1$  ( $\bullet$ ).

### 5.5.9. Interpretación gráfica del algoritmo de retorno

En la Fig.5.12 se muestra como opera el algoritmo planteado. Se observa que esta estrategia de retorno se basa en la corrección plástica del estado de prueba no admisible el cual se mantiene fijo; por lo tanto, el algoritmo desarrollado es una variante del CPPM planteado en [17] [33] [46] y [48]. Otro aspecto interesante es que sólo se utiliza la homotecia para hallar al tensor de dirección de flujo plástico, y con el mismo se proyecta sobre la superficie de fluencia objetivo el estado de prueba, incrementando al multiplicador plástico consistente paulatinamente y corrigiendo la presión ficticia. Debido a que, para plasticidad perfecta,  $\dot{\epsilon}_p^v = 0$ , el tensor de dirección de flujo plástico  $\mathbf{m}$  no posee componente volumétrica, por lo tanto la distancia desde el estado de prueba no admisible y la superficie objetivo se ve en verdadera magnitud en el plano deviatórico.

Cuando el esquema iterativo llegó a su fin se cumple que la sección deviatórica homotética coincide con la superficie de fluencia objetivo y, por lo tanto,  $^{n+1}p = p^*$ . La interpretación que se presenta aquí no pierde generalidad y es válida tanto para plasticidad perfecta como para plasticidad con dilatación.

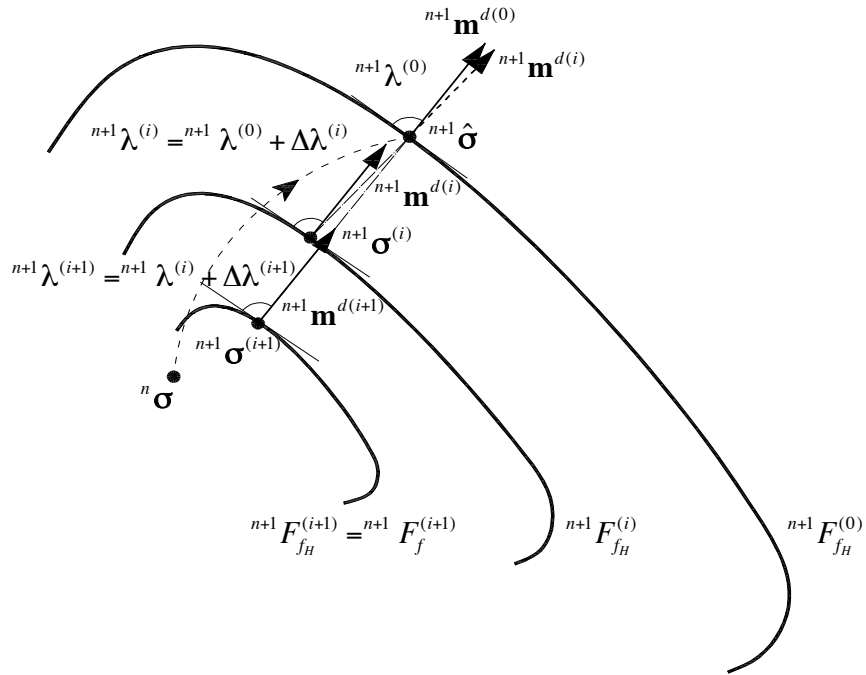


Figura 5.12: Interpretación gráfica del algoritmo de retorno planteado.

### 5.5.10. Respuesta del algoritmo

Para evaluar la respuesta del algoritmo se realizó un ensayo convencional de compresión triaxial drenado a presión de confinamiento constante y para un punto de integración. En la Fig.5.13 se grafican el cociente  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$  y la deformación volumétrica  $\varepsilon^v$  en función de  $\varepsilon_1$ . Se adoptan los siguientes parámetros materiales:  $E = 2 \times 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $\nu = 0,3$  y  $\phi = 30^\circ$ . Se observa que  $\varepsilon^v$  se mantiene constante en el rango plástico pues se congeló la evolución de  $e_0$ . La respuesta que se obtiene para el cociente  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$  responde a un material perfectamente plástico.

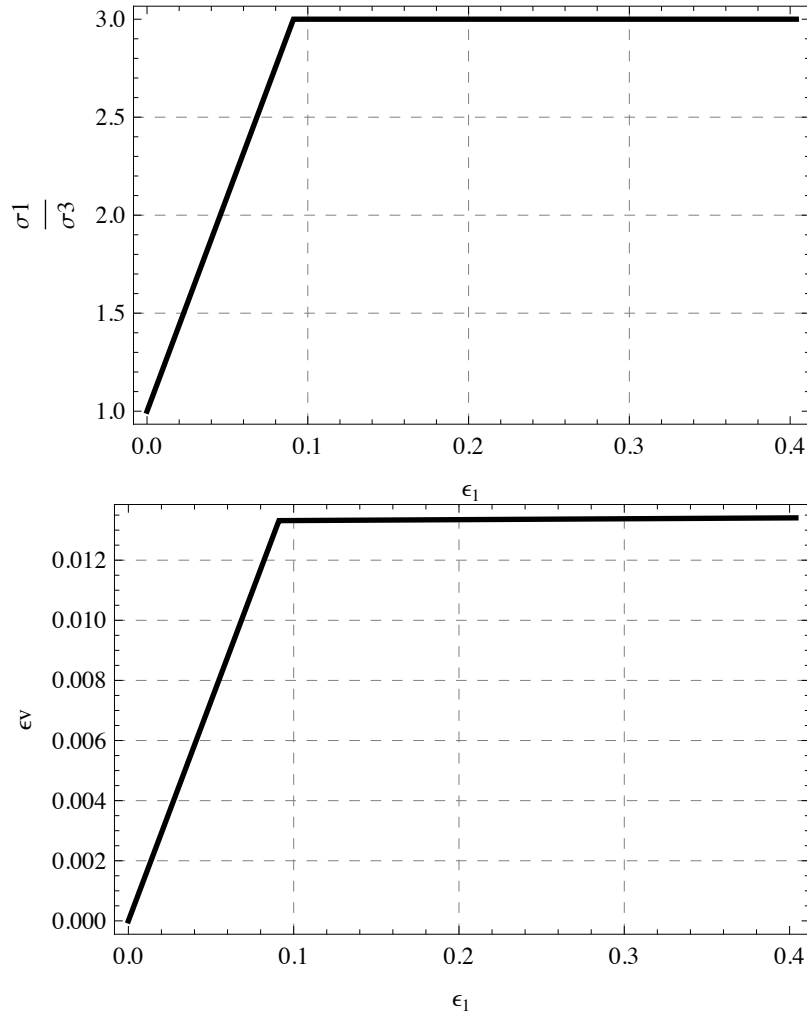


Figura 5.13: Respuesta del algoritmo de retorno para el caso de plasticidad perfecta.

### 5.5.11. Precisión del algoritmo. Mapas de isoerror

En esta Sección se analiza la precisión del algoritmo planteado. Para ello, es usual que se construyan mapas de isoerror basados en un problema homogéneo de deformación controlada. Esta técnica es útil para evaluar la precisión promedio del algoritmo y estudiar como influye el tamaño y dirección del incremento del tensor de deformación  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  en el retorno plástico.

Para construir los mapas de isoerror se toman tres puntos sobre la superficie de fluencia. El punto A corresponde al caso estado de tensión de compresión triaxial ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ), el punto C corresponde al estado de tensión de extensión triaxial ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ) y el punto B corresponde a un estado de tensión intermedio ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) para un ángulo de Lode de  $30^\circ$ . En cada punto sobre la superficie fluencia se toma una secuencia de incrementos de deformación normalizados cuyas direcciones varían desde normal hasta tangencial a la misma. Luego, aplicando el algoritmo se calcula el tensor de tensiones efectivas actualizado para cada incremento de deformación normalizado. El error de cada estado de tensión actualizado se calcula como

$$\delta = \frac{\|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)\|}{\|\boldsymbol{\sigma}^*\|} \quad (5.72)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  se calcula aplicando el algoritmo, mientras que  $\boldsymbol{\sigma}^*$  es la solución exacta correspondiente al incremento de deformación específico, que se obtiene aplicando el algoritmo reiterativamente con un número creciente de subincrementos hasta que la respuesta numérica permanezca constante; para este caso se aplicaron 250 subincrementos. En la Fig.5.14 se muestran los puntos para los cuales se hallan los mapas de isoerror con los respectivos incrementos en la dirección tangencial y normal.

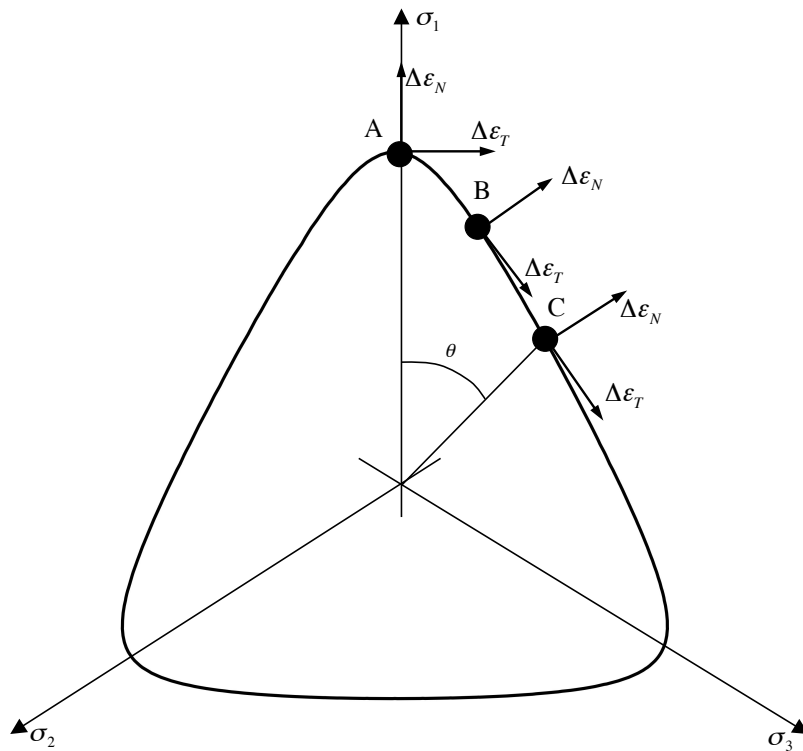


Figura 5.14: Construcción de los mapas de isoerror.

En las Figs.5.15-5.17 se muestran los mapas de isoerror correspondientes a los puntos A, B y C respectivamente, se observa que a medida que estado de tensión se va acercando a la zona de compresión triaxial la respuesta del algoritmo se vuelve más sensible al tamaño del incremento de deformación y entonces aumenta el valor del error, sin embargo los valores de error obtenidos son bajos y se concluye que el algoritmo posee poca sensibilidad respecto al tamaño del incremento de deformación.

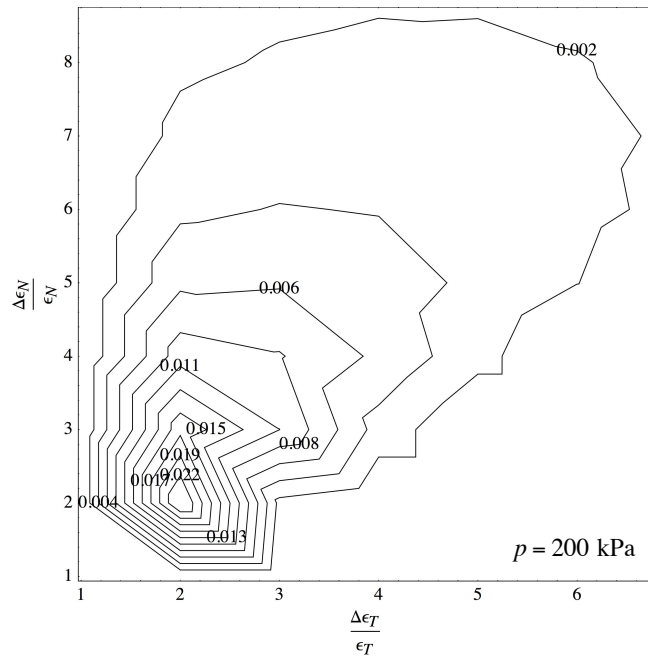


Figura 5.15: Mapa de isoerror para compresión triaxial. Plasticidad perfecta. (Punto A).

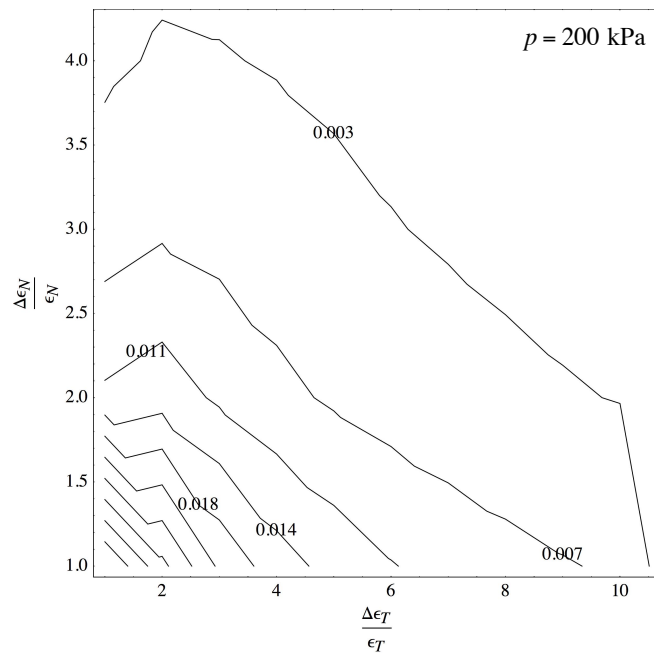


Figura 5.16: Mapa de isoerror para un caso intermedio. Plasticidad perfecta. (Punto B).



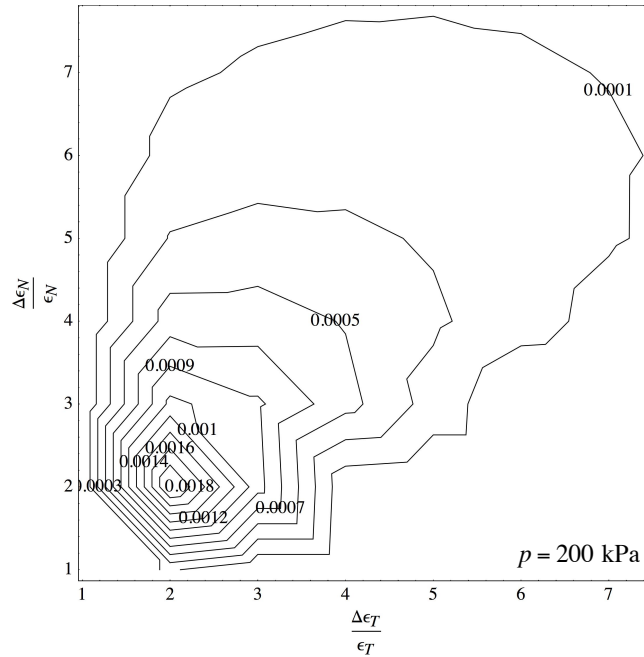


Figura 5.17: Mapa de isoerror para extensión triaxial. Plasticidad perfecta. (Punto C).

## 5.6. Formulación para plasticidad con dilatancia

En este apartado se extiende el modelo constitutivo elastoplástico local planteado en la Sección 5.5 mediante la incorporación de la evolución de la relación de vacíos a presión nula, que es la variable interna plástica del modelo y el parámetro de dilatancia  $\beta$ .

Como  $\dot{e}_0 \neq 0$ , la función de fluencia no se mantiene fija y el cono se expande o se contrae según lo explicado en la Sección 5.3. El tensor de dirección de flujo plástico viene dado por la ec.(5.20).

El parámetro de dilatancia  $\beta$  que se adopta para este trabajo se calcula mediante

$$\beta = -\sin(\psi) \quad (5.73)$$

donde  $\psi$  es el ángulo de dilatancia dado por

$$\psi = -3^\circ D_r \ln\left(\frac{p}{p_{ult}}\right) - 2^\circ \quad (5.74)$$

y  $p_{ult}$  esta dada por la ec.(2.17). La ec.(5.74) es la expresión dada por Bolton [4] [5] modificada por Sfriso en [49].

La forma funcional adoptada para  $\beta$  si bien, es una simplificación, se considera que para los alcances de este trabajo es suficiente (ver [49]). En el Anexo D.3 se justifica termodinámicamente a la regla de flujo no asociada adoptada.

### 5.6.1. Multiplicador plástico consistente

Teniendo en cuenta la condición de consistencia  $\dot{F}_f = 0$  y aplicando la regla de la cadena para la derivación se obtiene

$$\dot{F}_f = \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_f}{\partial \mu_f} \dot{\mu}_f = 0 \quad (5.75)$$

La ec.(5.75) se puede expresar de la siguiente manera

$$\dot{F}_f = \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} (J_{2r} - J_{3r} - 1) H = 0 \quad (5.76)$$

donde  $H$  es el *módulo intrínseco de endurecimiento/ablandamiento* dado por (ver Anexo D.4)

$$H = 16 \sec^2(\phi) \tan(\phi) \beta \left[ \left( 2,5 D_r \frac{3^\circ}{e_0} - \frac{3^\circ}{e_{max} - e_{min}} \ln(\chi) \right) (1 + e_0) + 3 K D_r \frac{3^\circ}{p} \right] \quad (5.77)$$

Desarrollando la ec.(5.78) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{F}_f &= \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p) + \dot{\lambda} (J_{2r} - J_{3r} - 1) H \\ &= \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p + \dot{\lambda} (J_{2r} - J_{3r} - 1) H \\ &= \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m} + \dot{\lambda} (J_{2r} - J_{3r} - 1) H = 0 \end{aligned} \quad (5.78)$$

donde  $\frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n} \neq \mathbf{m}$  (regla de flujo no asociada) y su valor viene dado por la ec.(5.24).

Despejando  $\dot{\lambda}$  de la ec.(5.78) el multiplicador plástico consistente viene dado por

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m} - (J_{2r} - J_{3r} - 1) H} \quad (5.79)$$

### 5.6.2. Operador elastoplástico tangente

Teniendo en cuenta la relación constitutiva tangente dada por la ec.(5.34) y la expresión hallada para el multiplicador plástico consistente, se puede hallar el operador elastoplástico tangente  $\mathbf{C}_{ep}$  de manera análoga a los casos ya vistos; para este caso viene dado por

$$\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e - \frac{\mathbf{C}_e : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{C}_e}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m} - (J_{2r} - J_{3r} - 1) H} \quad (5.80)$$

El operador  $\mathbf{C}_{ep}$  posee las simetrías dadas por la ec.(5.36), en la que se observa que no se conserva la simetría mayor. En este caso se incluye un término disipativo, entonces, ya no se puede asegurar que el operador elastoplástico tangente sea definido positivo.

### 5.6.3. Formulación numérica

En el instante  ${}^n t$  la variables de estado son

$$\{{}^n \boldsymbol{\sigma}, {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p, {}^n e_0\} \quad (5.81)$$

Se supone que  $E$  y  $\nu$  son conocidos y son constantes del material. Entonces, el problema consiste en hallar  $\{{}^{n+1} \boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}_p, {}^{n+1} e_0\}$  dados  $\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, {}^n \boldsymbol{\sigma}, {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_p, {}^n e_0\}$ .

El estado de prueba viene por las ecs.(5.38), (5.39) y (5.40); a las que se le agrega la relación de vacíos a presión nula de prueba dada por

$${}^{n+1} \widehat{e}_0 = {}^n e_0 \quad (5.82)$$

La formulación continua de elastoplasticidad se resume en el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m} \\ \dot{e}_0 = -(1 + e_0) \dot{\varepsilon}_p^v \\ F_f = 0 \end{cases} \quad (5.83)$$

Aplicando el Método de Euler implícito, se discretiza el sistema y se obtiene

$${}^{n+1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : ({}^n \boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (5.84)$$

Sfriso en [49] dedujo una expresión para la integración de  $\dot{e}_0$ , que viene dada por

$${}^{n+1} e_0 = (1 + {}^n e_0) \exp(-\Delta \varepsilon_p^v) - 1 \quad (5.85)$$

donde  $\Delta \varepsilon_p^v$  es la deformación volumétrica plástica del paso.

Las ecs.(5.84) y (5.85) se encuentra sujetas a la restricción

$${}^{n+1}F_f = F_f({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}\mu_f) = 0 \quad (5.86)$$

Para este caso  ${}^{n+1}\mu_f \neq {}^n\mu_f$ . Las ecs.(5.84)-(5.86) están expresadas en términos del tensor de deformación plástica

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_p = \lambda [\mathbf{m}_d({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}e_0) + {}^{n+1}\beta({}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}, {}^{n+1}e_0) \mathbf{1}] \quad (5.87)$$

que tiene una única variable independiente  $\lambda$ , por lo que, en un paso elastoplástico, el conjunto de ecs.(5.88)-(5.90) se reduce a

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\lambda) \quad (5.88)$$

$${}^{n+1}e_0 = \tilde{e}_0(\lambda) \quad (5.89)$$

con lo que la ec.(5.90) se reduce a

$$\tilde{F}_f(\lambda) = 0 \quad (5.90)$$

En la Sección 5.5.3, se explican diferentes alternativas de solución. En el caso de plasticidad con incorporación de dilatancia lo único que se agrega es la evolución de la superficie de fluencia, por lo que los problemas numéricos asociados a la función de Matsuoka-Nakai que se definieron en la Sección 5.5.3 y sus respectivas soluciones se mantienen para el caso en estudio.

Debido a que la superficie de fluencia permanece fija<sup>4</sup> durante el retorno plástico, el incremento del multiplicador plástico se halla de la misma manera que se planteó en la Sección 5.5.5.

---

<sup>4</sup>Pues una vez hallado  ${}^{n+1}\phi$  se calcula  ${}^{n+1}\mu_f$

### 5.6.4. Algoritmo de retorno

Se presenta el algoritmo de integración del modelo entre el paso  $n$  y el paso  $n + 1$ . En el siguiente cuadro se muestra la estructura del mismo.

#### Algoritmo de retorno para plasticidad con endurecimiento/ablandamiento no asociada

1. Dado  $\{^n\boldsymbol{\sigma}, ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p, ^ne_0, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}$ ;

2. Calcular estado de prueba:

$$\begin{aligned} ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e &= ^n\boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}; & ^{n+1}\widehat{e}_0 &= ^ne_0; & ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p &= ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p; & ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}_e : ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e; \\ ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}_e : ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e; & ^{n+1}\widehat{F}_f &= ^{n+1}F_f(^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}); \end{aligned}$$

3. Calculo el ángulo de fricción interna y el ángulo de dilatación:

$$\begin{aligned} ^{n+1}D_r &= \frac{e_{max} - ^ne_0}{e_{max} - e_{min}}; & ^{n+1}\chi &= \frac{^ne_0^{2.5} p}{p_r p_{ref}}; & ^{n+1}\psi &= -3^\circ ^{n+1}D_r \ln(^{n+1}\chi) - \\ &2^\circ; & ^{n+1}\phi &= \phi_c + ^{n+1}\psi; \end{aligned}$$

$$^{n+1}\mu_f = 8 \tan^2(^{n+1}\phi); \quad ^{n+1}\beta = -\sin(^{n+1}\psi);$$

4. SI  $^{n+1}\widehat{F}_f \leq 0 \implies \{^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}, ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p, ^ne_0\}$  Y FIN;

5. SI  $^{n+1}\widehat{F}_f > 0$ , ENTONCES

a) Se estima una cota inferior del multiplicador  $\lambda^{(0)}$ ;

b) Se calcula la presión ficticia  $p^*$  mediante  $F_f(p^*) = 0$ ;

c) Se calcula  $^{n+1}\mathbf{m}^{d(0)}$  en la superficie homotética mediante la ec.(5.21);

d) Se halla  $^{n+1}\mathbf{m}^{(0)} = ^{n+1}\mathbf{m}^{d(0)} + ^{n+1}\beta \mathbf{1}$ ;

e) Se halla  $^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_p^{(0)} = ^n\boldsymbol{\varepsilon}_p + \lambda^{(0)} ^{n+1}\mathbf{m}^{(0)}$ ;

f) Se halla  $^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{C}_e : \left( ^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - ^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_p^{(0)} \right)$ ;

g) Se inicializa  $^{n+1}F_f^{(0)} = ^{n+1}F_f(^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(0)}; ^{n+1}\mu_f)$ ;

h) MIENTRAS  $\left| ^{n+1}F_f^{(i)} \right| > \text{TOL}$ ,

1) Se calcula la presión ficticia  $p^*$  mediante  $F_f(p^*) = 0$ ;

2) Se calcula  $^{n+1}\mathbf{m}^{d(i)}$  en la superficie homotética mediante la ec.(5.21);

3) Se Calcula  $^{n+1}\mathbf{m}^{(i)} = ^{n+1}\mathbf{m}^{d(i)} + ^{n+1}\beta \mathbf{1}$ ;

4) Se calcula el incremento del multiplicador plástico mediante la ec.(5.61);

- 5) Se actualiza el multiplicador  $\lambda^{(i+1)} = \lambda^{(i)} + \Delta\lambda^{(i+1)}$ ;
- 6) Se compara  ${}^{n+1}\mathbf{m}^{(i-1)}$  y  ${}^{n+1}\mathbf{m}^{(i)}$  y si  ${}^{n+1}\mathbf{m}^{(i-1)} : {}^{n+1}\mathbf{m}^{(i)} \geq \frac{1}{2}$  se corrige  ${}^{n+1}\mathbf{m}^{(i)}$  mediante la ec.(5.50);
- 7) Se actualiza  ${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} = {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C}_e : \lambda^{(i+1)} {}^{n+1}\mathbf{m}^{(i)}$ ;
- 8) Se actualiza  ${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_p = {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_p + \lambda^{(i+1)} {}^{n+1}\mathbf{m}^{(i)}$ ;
- 9) Se actualiza  ${}^{n+1}e_0^{(i+1)} = (1 + {}^n e_0) \exp(-\lambda^{(i+1)} {}^{n+1}\beta) - 1$ ;
- 10) Se incrementa  $i$  y se itera;

6. FIN;

### 5.6.5. Operador elastoplástico tangente algorítmico

Para completar el algoritmo presentado, se calcula el operador elastoplástico algorítmico para poder obtener convergencia cuadrática en el esquema iterativo de Newton-Raphson aplicado implementado en el Método de los Elementos Finitos. En el Anexo (D.5) se deduce la expresión del operador que viene dado por

$${}^{n+1}\mathbf{C}_{ep}^{\Delta} = \frac{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}_e^* - \frac{\mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}\mathbf{m} \otimes {}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^*}{{}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}\mathbf{m} - (J_{2r} - J_{3r} - 1)H} \quad (5.91)$$

donde  $H$  es el módulo de endurecimiento/ablandamiento dado por la ec.(D.77) y

$$\mathbf{C}_e^* = [\mathbf{C}_e^{-1} + \lambda {}^{n+1}\boldsymbol{\Xi}]^{-1} \quad (5.92)$$

donde el tensor Hessiano de cuarto orden viene dado por

$$\boldsymbol{\Xi} = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\|\mathbf{n}^d\|} [\mathbf{I} - \mathbf{m}^d \otimes \mathbf{m}^d] : \frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \cos(\psi) 3^\circ D_r \frac{p_{ult}}{3p} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (5.93)$$

La derivada de la componente deviatorica de la normal saliente  $\mathbf{n}^d$  se deduce en el Anexo D.2.2 y vale

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = & \frac{1}{p^2} \left[ -(\mu_f + 9) \frac{r^2}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mathbf{1} \otimes \mathbf{r} + (\mu_f + 9) \frac{2}{3} \mathbf{r} \otimes \mathbf{1} + (\mu_f + 6) \mathbf{I}^{dev} + \right. \\ & \left. (\mu_f + 9) \mathbf{1} \otimes \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - (\mu_f + 9) (\delta_{ik} r_{lj} + r_{ik} \delta_{lj}) \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \otimes \underline{\mathbf{e}}^k \otimes \underline{\mathbf{e}}^l \right] \quad (5.94) \end{aligned}$$

En las ecs.(5.93) y (5.94) se omite por claridad el superíndice  $n+1$  ( $\bullet$ ).

### 5.6.6. Estimación de $\lambda^{(0)}$

Teniendo en cuenta lo planteado en el caso de plasticidad perfecta, la solución físicamente admisible se encuentra circunscripta en la función de fluencia de Drucker-Prager dada por la ec.(5.63).

Se puede calcular la primera estimación de  $\lambda$  mediante un retorno radial. Teniendo en cuenta lo explicado en el Capítulo 4, se calculan el tensor deviatorico de tensiones efectivas  $n+1\mathbf{s}^{(0)}$  dado por la ec.(5.65) y la presión  $n+1p^{(0)}$ , que para este caso se modifica para incluir la influencia de la dilatación mediante

$$n+1p^{(0)} = n+1\hat{p} - 3K n+1\beta \lambda^{(0)} \quad (5.95)$$

Entonces el multiplicador plástico total inicial viene dado por

$$\lambda^{(0)} = \frac{\|n+1\hat{\mathbf{s}}\| - \rho_{DP} n+1\hat{p}}{2G - 3K \rho_{DP} n+1\beta} \quad (5.96)$$

### 5.6.7. Respuesta del algoritmo

Para evaluar la respuesta del algoritmo se realizó un ensayo convencional de compresión triaxial drenado a presión de confinamiento constante y para un punto de integración y un ensayo de compresión plana. Se adoptaron los siguientes parámetros materiales:  $e_{min} = 0,63$ ,  $e_{max} = 1,03$ ,  $p_r = 50$ ,  $E = 2 \times 10^5 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $\nu = 0,3$  y  $\phi_c = 33^\circ$ . En las Figs.5.18-5.21 se presentan las curvas  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \varepsilon_1$  y  $\varepsilon^v - \varepsilon_1$  para un ensayo de compresión triaxial con densidades relativas de 0 %, 25 %, 50 %, 70 % y 80 %, y cuatro presiones de confinamiento distintas. En la Fig.5.22 se presentan las curvas  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \varepsilon_1$  y  $\varepsilon^v - \varepsilon_1$  para un ensayo de compresión plana. Se observa que las características que se reproducen correctamente son: i) el valor máximo de  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$  depende de la presión y de la densidad relativa; ii) todas las simulaciones tienden a un mismo valor final; y iii) la tendencia dilatar crece con la densidad relativa y disminuye con el aumento de la presión media. Puede observarse que las curvas  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$  aún no alcanzan el estado crítico teórico dado por

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)_c = \tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi_c}{2}\right) = 3,12 \quad (5.97)$$

Esto se debe a que la función de estado  $\phi(p, e_0)$  tiende asintóticamente al estado crítico, entonces, teóricamente, la deformación necesaria para alcanzarlo es infinita. Las simulaciones

se realizaron hasta una deformación  $\varepsilon_1 = 200\%$  para mostrar que los resultados obtenidos se corresponden con la teoría

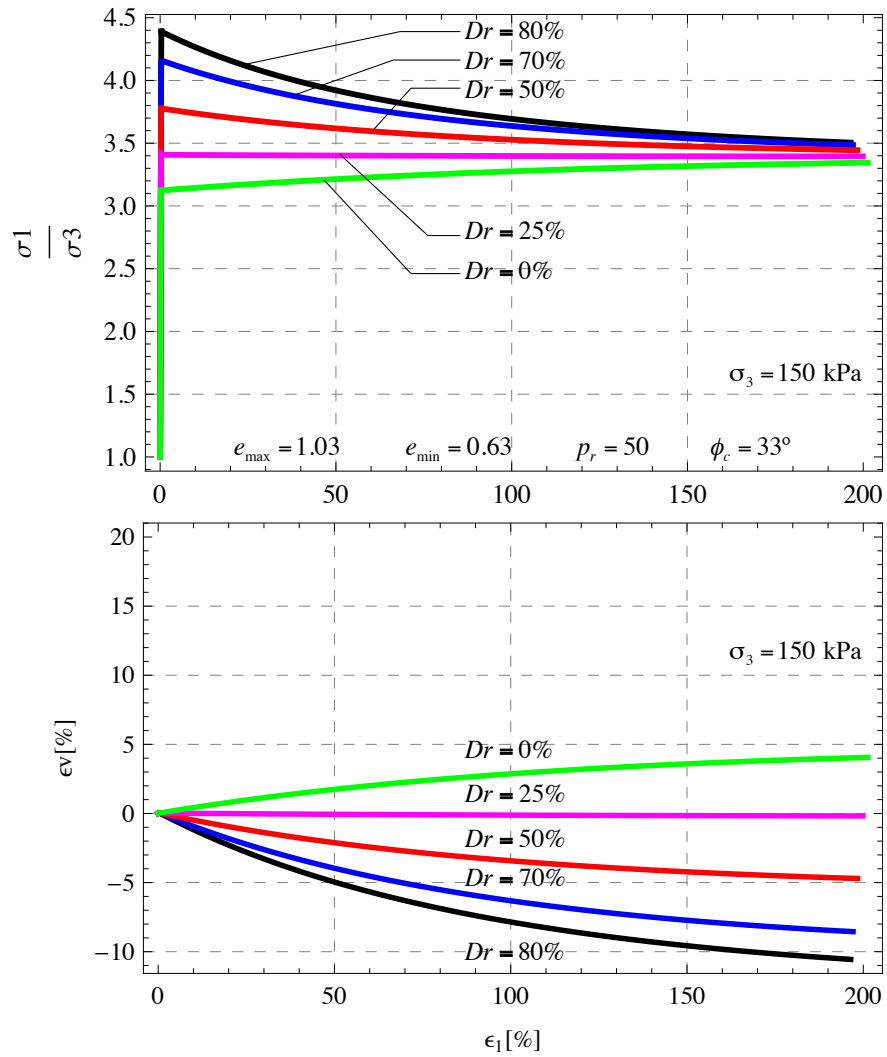


Figura 5.18: Curvas  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \varepsilon_1$  y  $\varepsilon^v - \varepsilon_1$  para cinco densidades relativas y una presión de confinamiento de  $\sigma_3 = 150 \text{ kPa}$ . Ensayo triaxial.



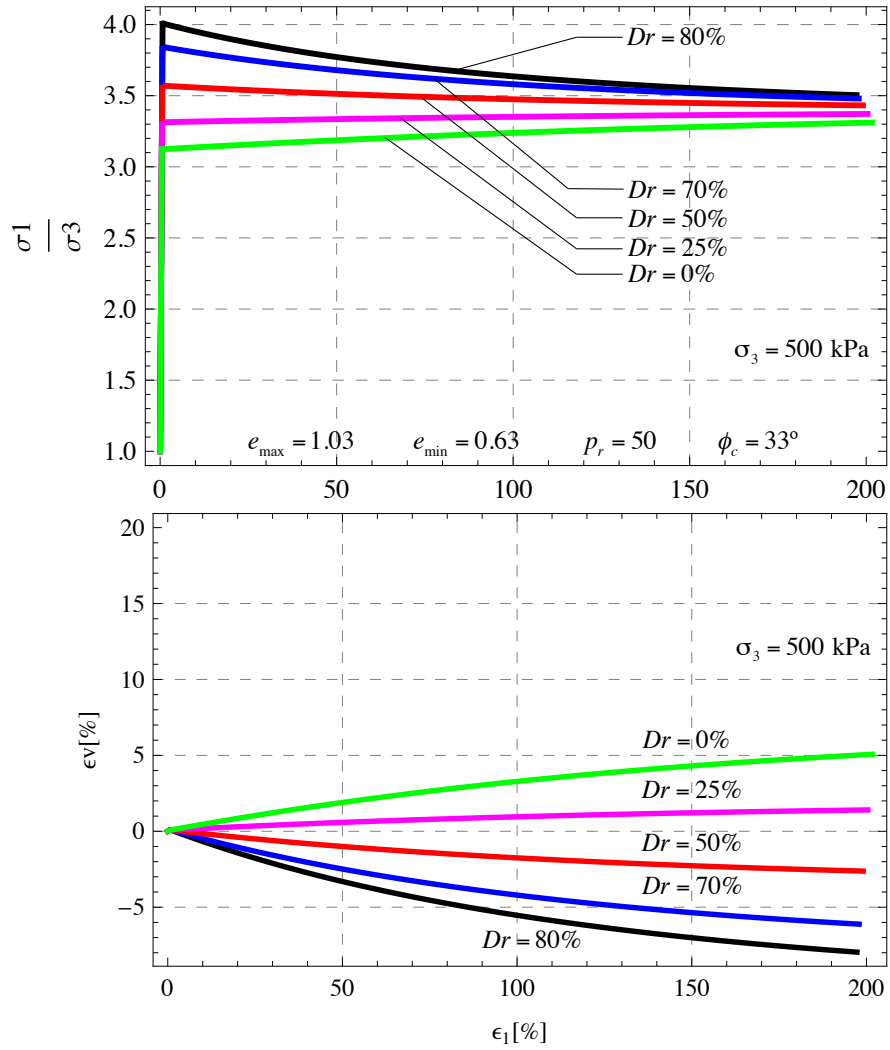


Figura 5.19: Curvas  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \epsilon_1$  y  $\epsilon^v - \epsilon_1$  para cinco densidades relativas y una presión de confinamiento de  $\sigma_3 = 500 \text{ kPa}$ . Ensayo triaxial.

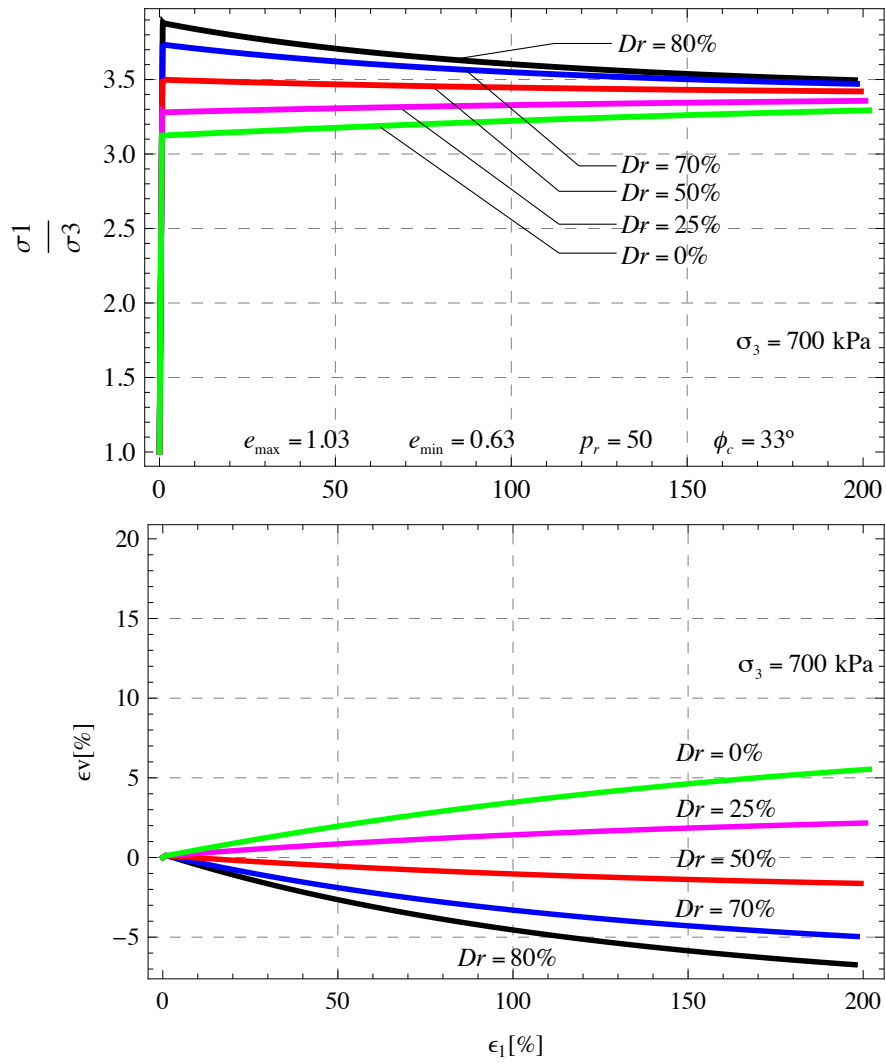


Figura 5.20: Curvas  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \epsilon_1$  y  $\epsilon^v - \epsilon_1$  para cinco densidades relativas y una presión de confinamiento de  $\sigma_3 = 700 \text{ kPa}$ . Ensayo triaxial.

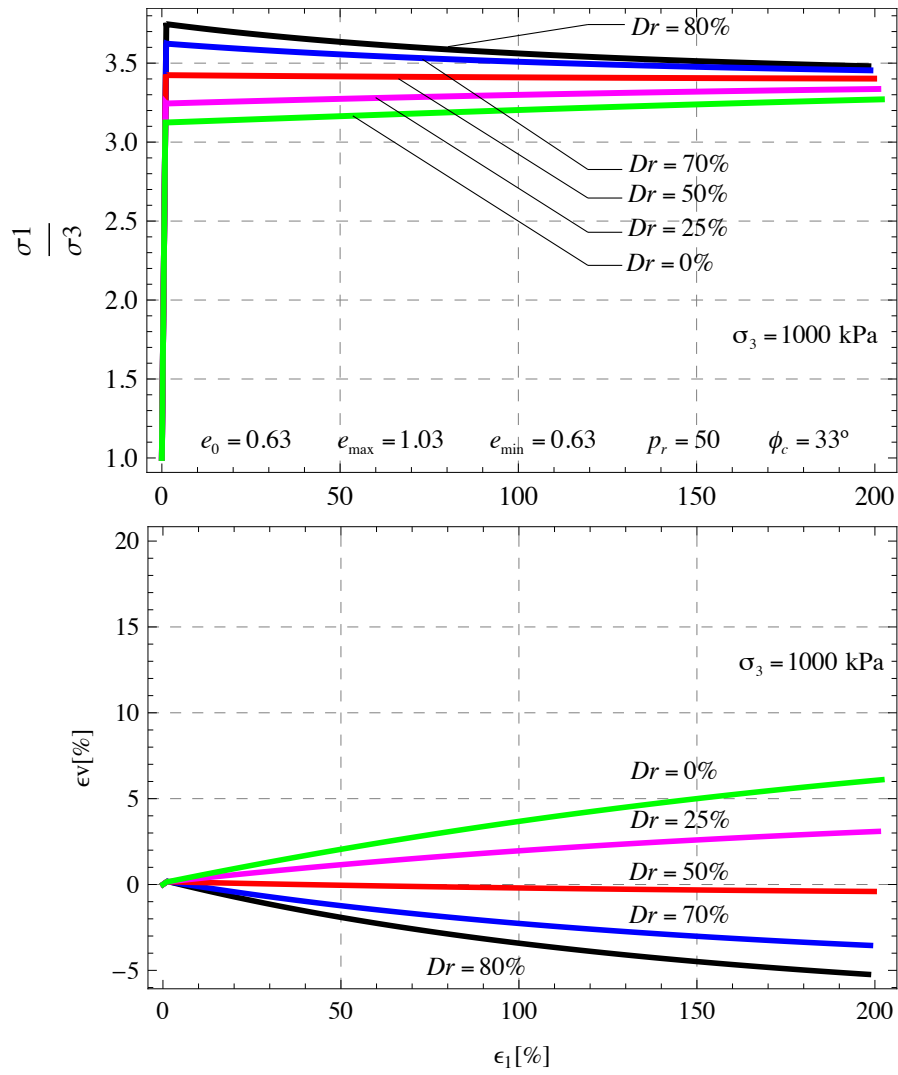


Figura 5.21: Curvas  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \epsilon_1$  y  $\epsilon^v - \epsilon_1$  para cinco densidades relativas y una presión de confinamiento de  $\sigma_3 = 1000$  kPa. Ensayo triaxial.

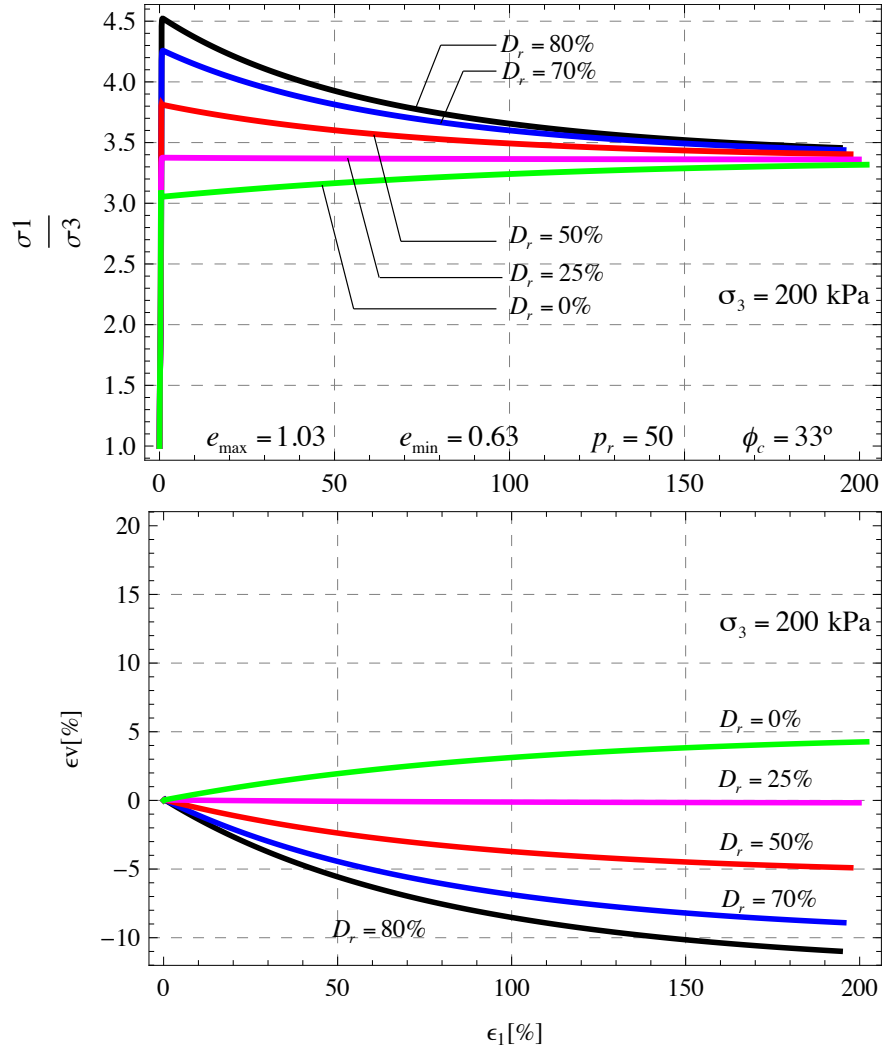


Figura 5.22: Curvas  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \epsilon_1$  y  $\epsilon^v - \epsilon_1$  para cinco densidades relativas y una presión de confinamiento de  $\sigma_3 = 200$  kPa. Ensayo de Compresión Plana.

En las Figs.5.23 y 5.24 se muestra el efecto que tiene la presión de confinamiento en la respuesta del modelo sobre un ensayo de compresión triaxial para dos densidades relativas; se observa que la relación  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$  y la deformación volumétrica  $\epsilon^v$  disminuye a medida que aumenta la presión de confinamiento para una densidad relativa constante, este comportamiento reproduce la característica sensibilidad a la presión que poseen los materiales friccionales en general.

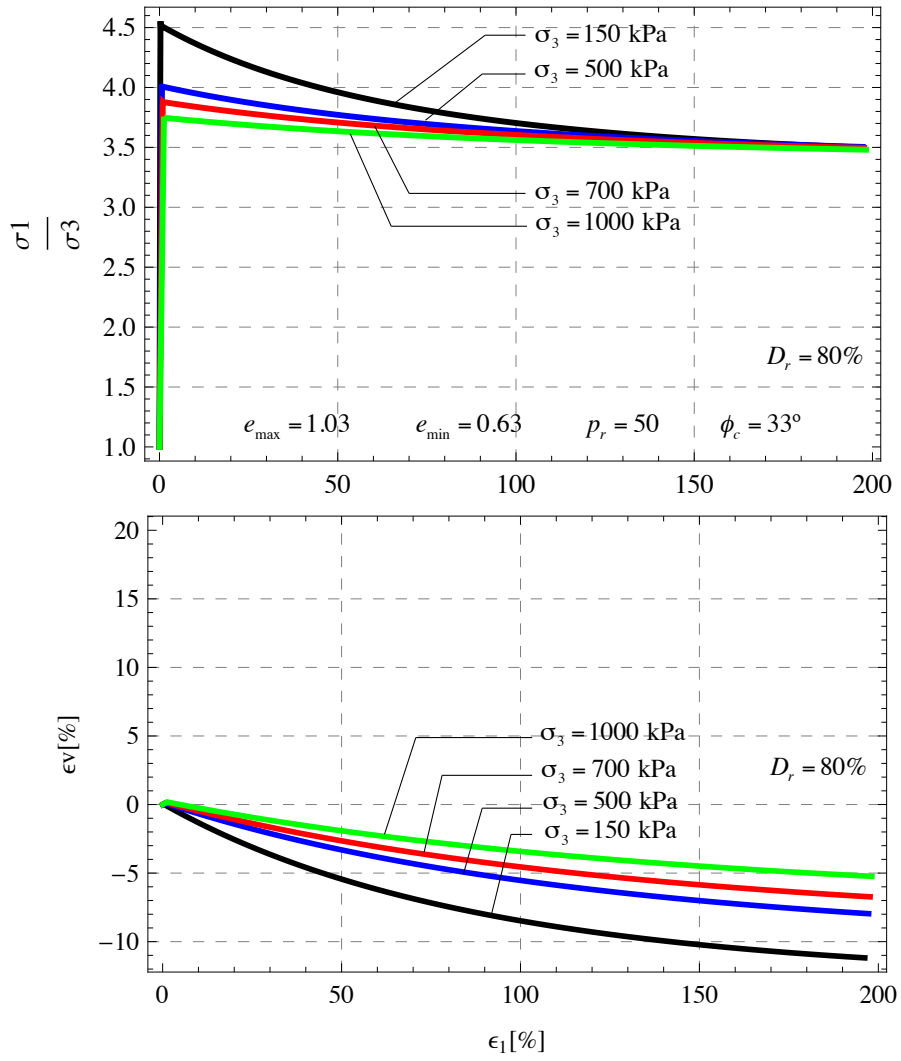


Figura 5.23: Sensibilidad del modelo a la presión de confinamiento. Ensayo triaxial  $D_r = 80\%$ .

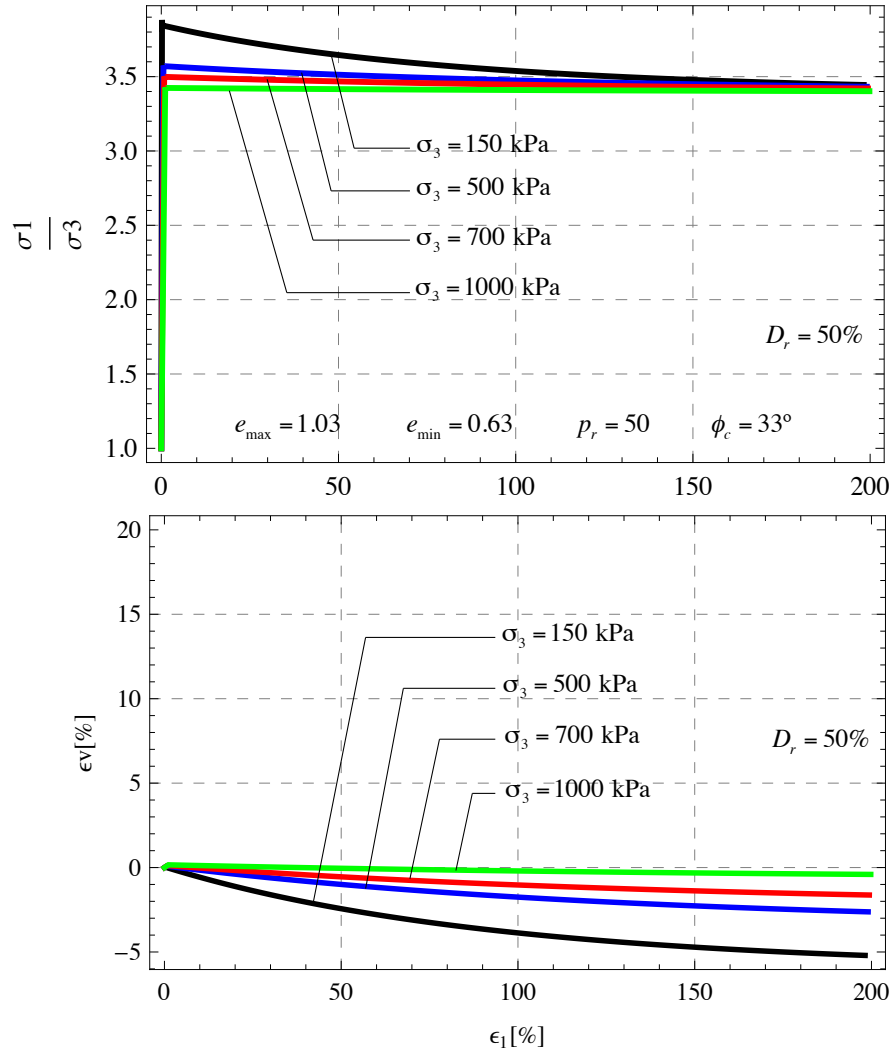


Figura 5.24: Sensibilidad a la presión de confinamiento. Ensayo triaxial  $D_r = 50\%$ .

Como las simulaciones se efectuaron en un punto de integración, la respuesta de la rama descendente de las curvas  $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} - \epsilon_1$  no se puede comparar con los resultados experimentales.

### 5.6.8. Precisión del algoritmo. Mapas de isoerror

En la Sección 5.5.11 se explicó como se construyen los mapas de isoerror; para este caso se toman los mismos puntos sobre la superficie de fluencia que se tomaron para el caso de plasticidad perfecta (ver Fig.5.14), es decir, el punto A correspondiente a un estado de tensión de compresión triaxial ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ), el punto B correspondiente a un estado de tensión intermedio ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) donde el ángulo de Lode vale  $30^\circ$  y el punto C correspondiente a un estado de tensión de extensión triaxial ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ). Se aplicaron 250 subincrementos de deformación, al igual que en el caso de plasticidad perfecta, para obtener la solución exacta y se adoptaron los siguientes parámetros materiales:  $e_{min} = 0,63$ ,  $e_{max} = 1,03$ ,  $p_r = 50$  y  $\phi_c = 31^\circ$ .

En las Figs.5.25-5.27 se muestran los mapas de isoerror correspondientes a los puntos A,

B y C respectivamente para valores de  $e_0$  de 0,63, 0,83 y 1,03. Se observa que los mapas de error son sensibles a los cambios de la relación de vacíos y que al incorporar el parámetro de dilatancia  $\beta$ , aumenta la sensibilidad del algoritmo respecto al tamaño del incremento de deformación a medida que los estados de tensión son cercanos al estado de compresión triaxial, en donde se producen fuertes cambios de curvatura en la sección deviatorica. Sin embargo, se observa que los error máximo obtenido es del 2% por lo tanto, se tiene una buena precisión en el retorno plástico para incrementos de deformación moderados.

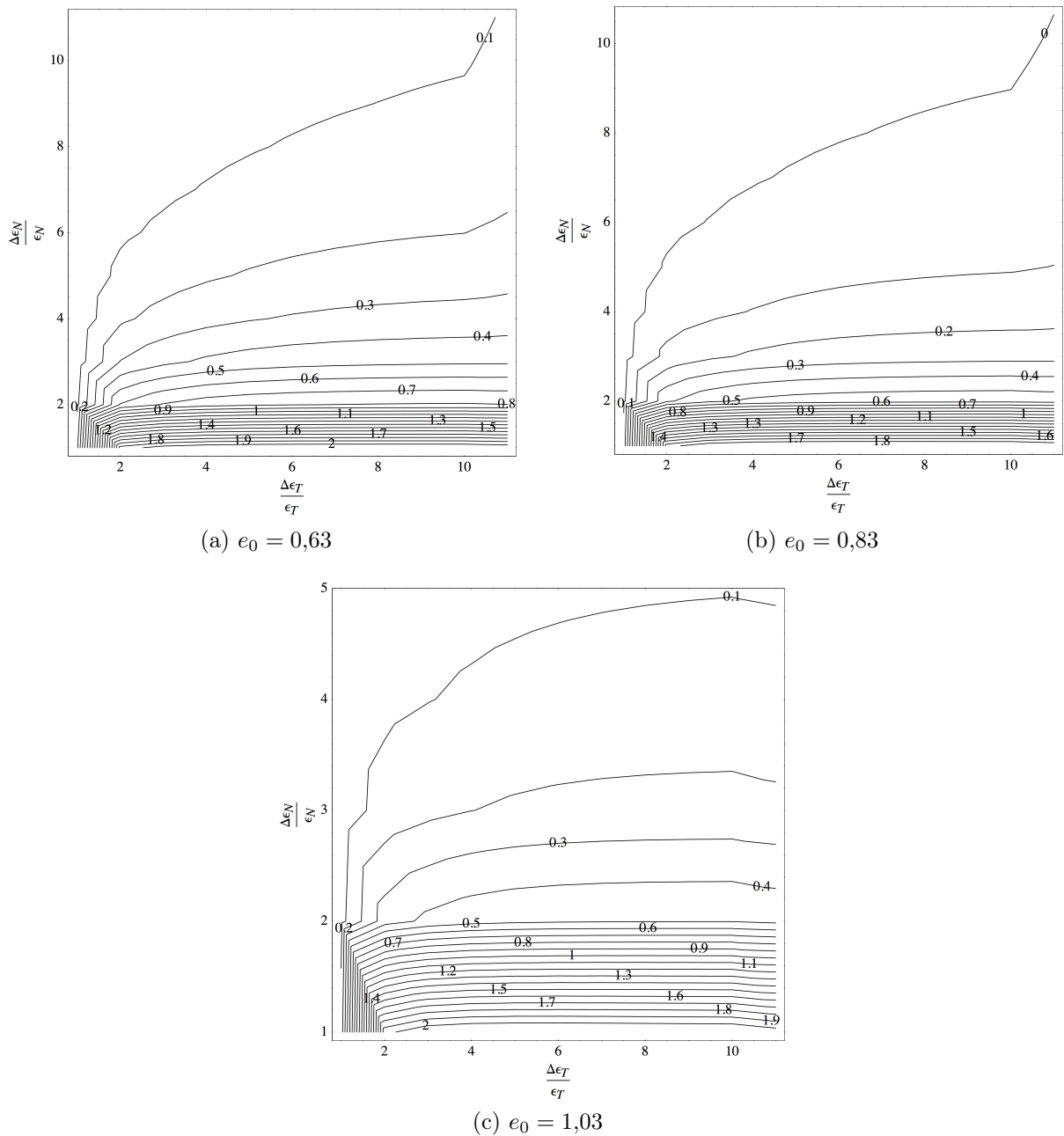
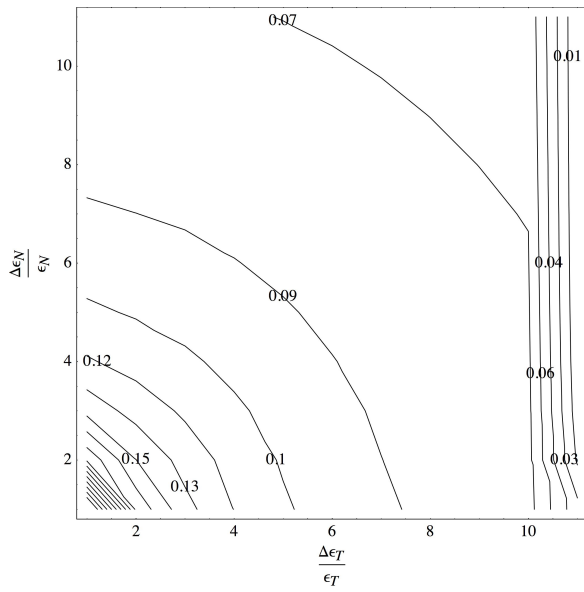
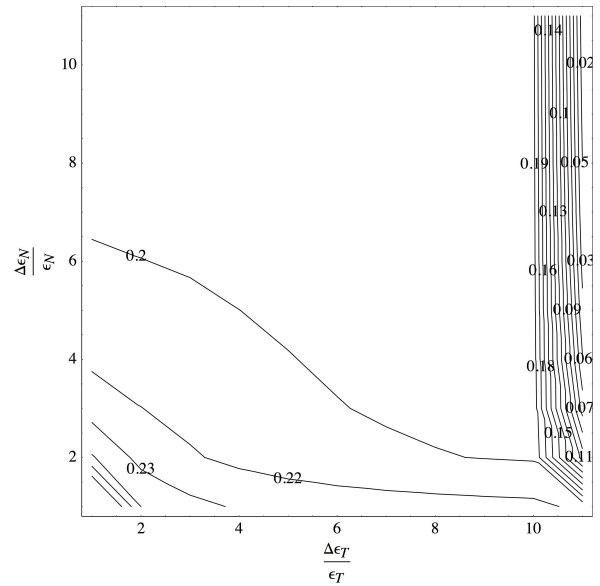


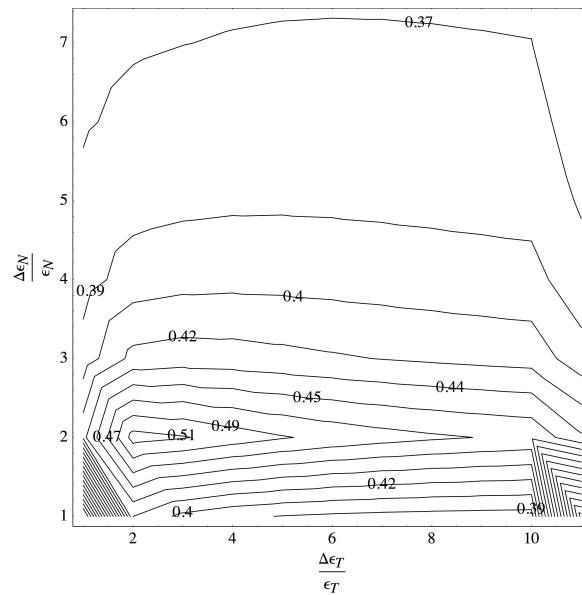
Figura 5.25: Mapas de isoerror para compresión triaxial. Plasticidad con endurecimiento/ablandamiento. (Punto A).



(a)  $e_0 = 0,63$



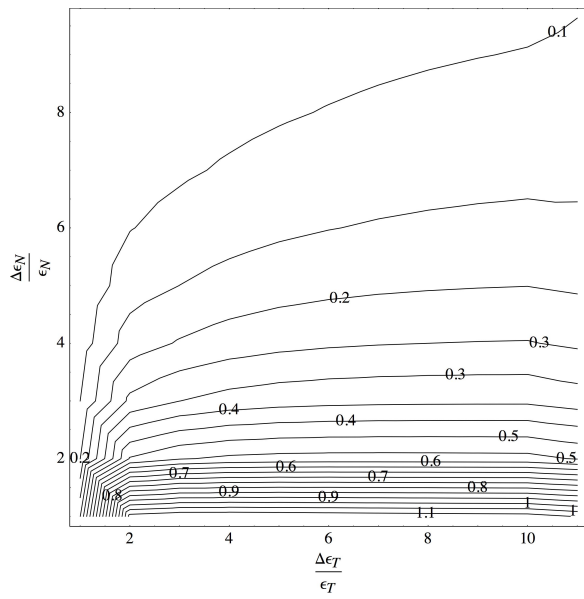
(b)  $e_0 = 0,83$



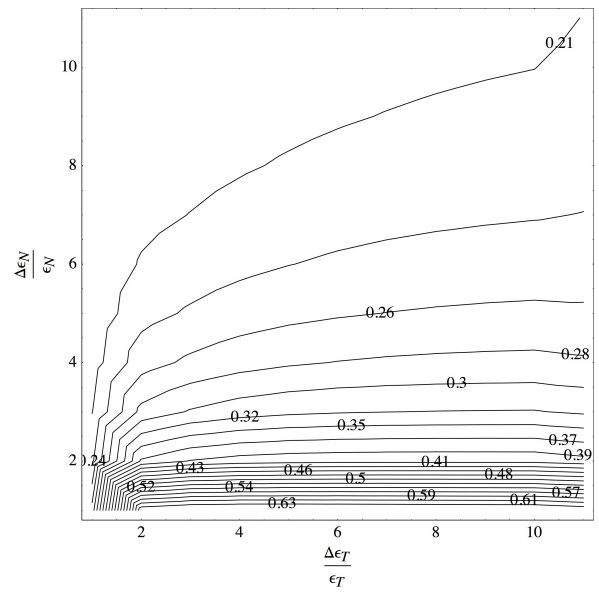
(c)  $e_0 = 1,03$

Figura 5.26: Mapas de isoerror para un caso intermedio. Plasticidad con endurecimiento/ablandamiento. (Punto B).

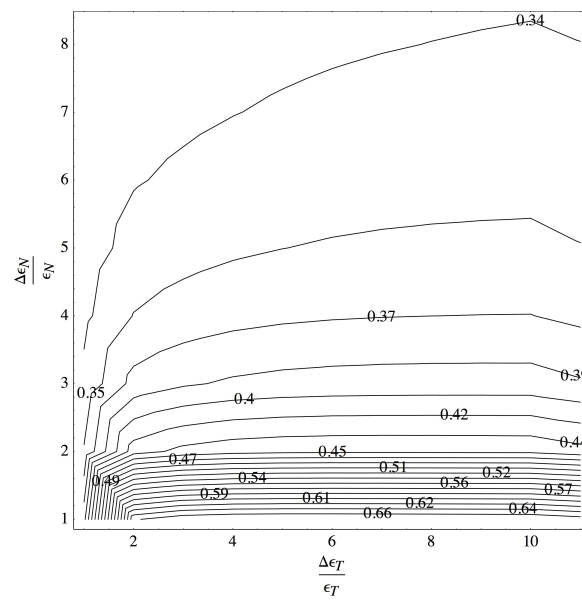




(a)  $e_0 = 0,63$



(b)  $e_0 = 0,83$



(c)  $e_0 = 1,03$

Figura 5.27: Mapas de isoerror para extensión triaxial. Plasticidad con endurecimiento/ablandamiento. (Punto C).

# Capítulo 6

## Estudio de localización de deformaciones

### 6.1. Introducción

El colapso de muchos materiales se produce frecuentemente como consecuencia de la formación de bandas de localización de deformaciones de ancho muy pequeño en comparación con las dimensiones estructurales del problema. Desde el punto de vista fenomenológico, la formación de dichas bandas puede interpretarse como la concentración de defectos microestructurales, tales como descohesión, interconexión de microfisuras o microporos, deslizamiento de granos, etc., dependiendo del tipo de material. En los materiales granulares como las arenas y otros tipos de suelos, las deformaciones se concentran en *bandas de corte* (*shear bands*) cuyo ancho puede variar de 10 a 20 veces la dimensión del grano [51]. En la Fig.6.1 se muestra un ensayo de compresión triaxial realizado en el Laboratorio de Mecánica de Suelos del LAME (Laboratorio de Materiales y Estructuras) de la Facultad de Ingeniería (Universidad de Buenos Aires) sobre una muestra de arena densa, en la misma se observa el aspecto de la banda de corte. En la Fig.6.2 se muestran ensayos triaxiales realizados por [14] sobre una muestra densa, medianamente densa y suelta y su respectivo análisis tomográfico computarizado, se observa que para una muestra densa la manifestación de la banda de corte es inmediata, mientras que para las muestras suelta y medianamente densas, el análisis tomográfico no muestra evidencia de la misma.



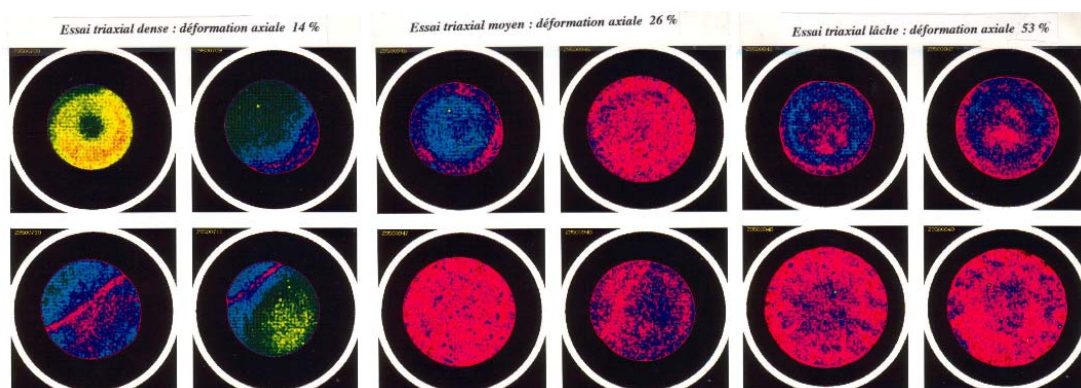
Figura 6.1: Ensayo de compresión triaxial para una arena densa. Laboratorio de Mecánica de Suelos (LAME FiUBA).

La teoría clásica de la mecánica del continuo asocia el fenómeno de localización a la concentración de deformaciones plásticas en bandas delimitadas por dos superficies paralelas a lo largo de las cuales se produce una discontinuidad en el campo de deformaciones; a estas superficies se las denomina *superficies de discontinuidad débil*, y su formación se debe a la pérdida de elipticidad local de las ecuaciones de equilibrio incrementales (bifurcación discontinua), caracterizada por la singularidad del *tensor de localización*. En el ámbito de la elastoplasticidad clásica, local e independiente de la velocidad, la singularidad del tensor de localización se puede producir al considerar régimen de ablandamiento y/o reglas de flujo no asociadas [21] [45] [37].

En este Capítulo se estudia brevemente la cinemática de la discontinuidad débil y se realiza el análisis de bifurcación discontinua, del cual se deduce la condición de localización. Luego se aplican los conceptos desarrollados para realizar el análisis numérico del indicador de localización para el modelo de Matsuoka-Nakai



(a) Ensayos de compresión triaxial sobre la arena Hostun RF cargada hasta la falla.



(b) Para las tres muestras de arriba, se toman cuatro secciones mediante tomografía computarizada.

Figura 6.2: Ensayos de compresión triaxial y estudio de localización mediante tomografía computarizada[14].

## 6.2. Cinemática de medios discontinuos. Discontinuidad débil

Se considera, por simplicidad, un dominio bidimensional  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  formado por los puntos materiales  $\underline{\mathbf{x}}$ , y una línea  $\mathcal{S} \in \Omega$ , con normal  $\underline{\mathbf{N}}$  denominada *línea de discontinuidad*. Sea un sistema de coordenadas curvilíneo  $\xi$  y  $\eta$  en  $\Omega$ , tal que  $\mathcal{S}$  corresponda a la lineal coordenada  $\eta$  ( $\mathcal{S} = \{\underline{\mathbf{x}}(\xi, \eta) \in \Omega; \xi = 0\}$ ) y u base asociada es  $\underline{\mathbf{g}}_\xi$  y  $\underline{\mathbf{g}}_\eta$ . Considérese también las líneas  $\mathcal{S}^+$  y  $\mathcal{S}^-$  coincidentes con las líneas coordenadas  $\xi = \xi^+$  y  $\xi = \xi^-$  respectivamente, delimitado la *banda de discontinuidad*  $\Omega^h = \{\underline{\mathbf{x}}(\xi, \eta); \xi \in [\xi^-, \xi^+]\}$ . El ancho representativo de la banda se denota por  $h = h(\eta) = r_\xi(0, \eta)(\xi^+ - \xi^-)$ , donde  $r_\xi(\xi, \eta)$  es el factor de escala correspondiente a la línea coordenada  $\xi$ .

Por último, se definen los dominios  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  como las regiones de  $\Omega/\Omega^h$  a las que apuntan los vectores  $\underline{\mathbf{N}}$  y  $-\underline{\mathbf{N}}$ , respectivamente de manera que  $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Omega^h$ ; el vector  $\underline{\mathbf{M}} \perp \underline{\mathbf{N}}$  se denomina *vector de polarización* y determina la dirección de la discontinuidad. En la Fig.6.3

se presenta un esquema representativo de todo lo establecido.

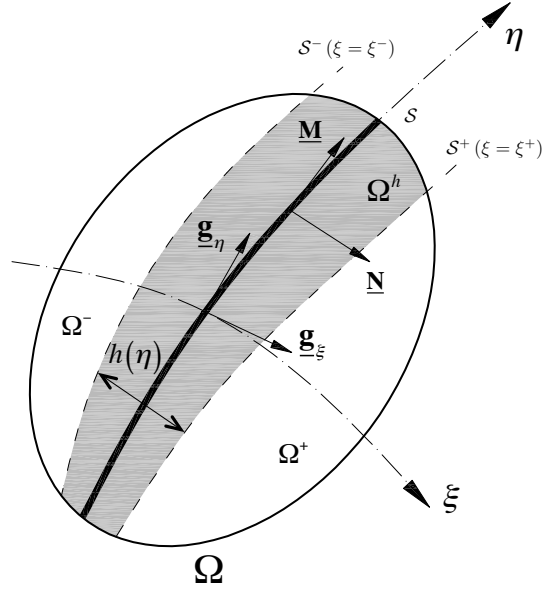


Figura 6.3: Dominio bidimensional discontinuo.

Considérese la descripción del campo tasa de desplazamientos en  $\Omega$  de la forma

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\Omega^h}(\xi, t) [[\dot{\mathbf{u}}]](\eta, t) \quad (6.1)$$

donde  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  y  $[[\dot{\mathbf{u}}]](\eta, t)$  son campos de continuidad  $\mathbb{C}^0$  en  $\Omega$ , y  $[[\bullet]] = \bullet^+ - \bullet^-$ .

La función  $\mathcal{H}_{\Omega^h}(\xi, t)$  es la *función rampa*, también continua en  $\Omega$  y se la define de la siguiente forma

$$\mathcal{H}_{\Omega^h} = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in \Omega^- (\xi \leq \xi^-) \\ 1 & \mathbf{x} \in \Omega^+ (\xi \geq \xi^+) \\ \frac{\xi - \xi^-}{\xi^+ - \xi^-} & \mathbf{x} \in \Omega^h (\xi^- < \xi < \xi^+) \end{cases} \quad (6.2)$$

y cumple con la siguiente propiedad

$$[[\mathcal{H}_{\Omega^h}]] = \mathcal{H}_{\Omega^h}(\xi^+, \eta) - \mathcal{H}_{\Omega^h}(\xi^-, \eta) = 1 \quad \forall \eta \quad (6.3)$$

La tasa de deformación  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)$  se define mediante

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \dot{\mathbf{u}} = \nabla^S \tilde{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Omega^h} \nabla^S [[\dot{\mathbf{u}}]] + \nabla^S \mathcal{H}_{\Omega^h} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (6.4)$$

El gradiente de la función rampa  $\nabla \mathcal{H}_{\Omega^h}$  vale

$$\underline{\nabla} \mathcal{H}_{\Omega^h} = \frac{\partial \mathcal{H}_{\Omega^h}}{\partial \xi} \underline{\mathbf{g}}_\xi + \frac{\partial \mathcal{H}_{\Omega^h}}{\partial \eta} \underline{\mathbf{g}}_\eta = \mu_{\Omega^h} \frac{1}{\xi^+ - \xi^-} \underline{\mathbf{g}}_\xi \quad (6.5)$$

donde  $\mu_{\Omega^h}$  es la función de colocación puntual dada por

$$\mu_{\Omega^h} = \begin{cases} 1 & \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega^h \\ 0 & \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega/\Omega^h \end{cases} \quad (6.6)$$

Se puede descomponer a la base  $\underline{\mathbf{g}}_\xi$  como

$$\underline{\mathbf{g}}_\xi = r_\xi \widehat{\underline{\mathbf{g}}}_\xi \quad (6.7)$$

donde  $\widehat{\underline{\mathbf{g}}}_\xi$  es la base unitaria y es paralela al vector normal  $\underline{\mathbf{N}}$  a la discontinuidad.

Teniendo en cuenta la ec.(6.7), se puede reescribir la ec.(6.5) de la siguiente manera

$$\underline{\nabla} \mathcal{H}_{\Omega^h} = \frac{\mu_{\Omega^h}}{h(\eta)} \underline{\mathbf{N}} \quad (6.8)$$

Entonces, la tasa de deformación  $\dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{x}}, t)$  se puede expresar como

$$\dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \underline{\nabla}^S \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \mathcal{H}_{\Omega^h} \underline{\nabla}^S [|\underline{\dot{\mathbf{u}}}|] + \frac{\mu_{\Omega^h}}{h(\eta)} (|\underline{\dot{\mathbf{u}}}| \otimes \underline{\mathbf{N}})^S \quad (6.9)$$

donde

$$\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\nabla}^S \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \mathcal{H}_{\Omega^h} \underline{\nabla}^S [|\underline{\dot{\mathbf{u}}}|] \quad (6.10)$$

es la parte continua, y

$$[|\underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}|] = \frac{\mu_{\Omega^h}}{h(\eta)} (|\underline{\dot{\mathbf{u}}}| \otimes \underline{\mathbf{N}})^S \quad (6.11)$$

es la parte discontinua de la tasa de deformaciones.

La cinemática expuesta corresponde a la representativa de la discontinuidad débil en medios discontinuos, y se la puede resumir en el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) &= \dot{\tilde{\underline{\mathbf{u}}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) + \mathcal{H}_{\Omega^h}(\xi, t) [[\dot{\underline{\mathbf{u}}}]](\eta, t) \\ \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) &= \dot{\tilde{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} + [[\dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}]]\end{aligned}\tag{6.12}$$

El concepto de discontinuidad fuerte, se deduce fácilmente cuando se hace tender el ancho de la banda a cero, como resultado las tasas de deformaciones adoptan un carácter distribucional y la cinemática representativa de la discontinuidad fuerte se describe mediante

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) &= \dot{\tilde{\underline{\mathbf{u}}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) + \mathcal{H}_{\Omega^h}(\xi, t) [[\dot{\underline{\mathbf{u}}}]](\eta, t) \\ \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) &= \dot{\tilde{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} + \delta_{\Omega^h} ([[ \dot{\underline{\mathbf{u}}}] ] \otimes \underline{\mathbf{N}})^S\end{aligned}\tag{6.13}$$

donde  $\delta_{\Omega^h}$  es la distribución de Dirac.

Debido a que en los geomateriales la banda de corte tiene un espesor finito, al menos en los inicios de la formación de la misma, en este trabajo se considera como representativa la cinemática de la discontinuidad débil.

### 6.3. Análisis de bifurcación discontinua. Condición de localización

El fenómeno de localización se asocia con la pérdida de estabilidad material de medios cuya deformación plástica se describe a través de relaciones constitutivas macroscópicas [37] [21] [44] [45] [47].

La bifurcación discontinua o discontinuidad débil se caracteriza por presentar discontinuidad en el gradiente de la tasa de desplazamientos  $\underline{\nabla} \dot{\underline{\mathbf{u}}}$ , mientras que la tasa del campo de desplazamientos  $\dot{\underline{\mathbf{u}}}$  permanece continua.

Sea el dominio homogéneo  $\Omega$  deformado de manera uniforme; lo que se busca es conocer bajo que condiciones la tasa de deformaciones  $\dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\nabla} \dot{\underline{\mathbf{u}}}$  puede ser no uniforme, variando la posición de la banda plana  $\Omega^h \in \Omega$ . En la Fig.6.4 se presenta un esquema representativo del problema en estudio.

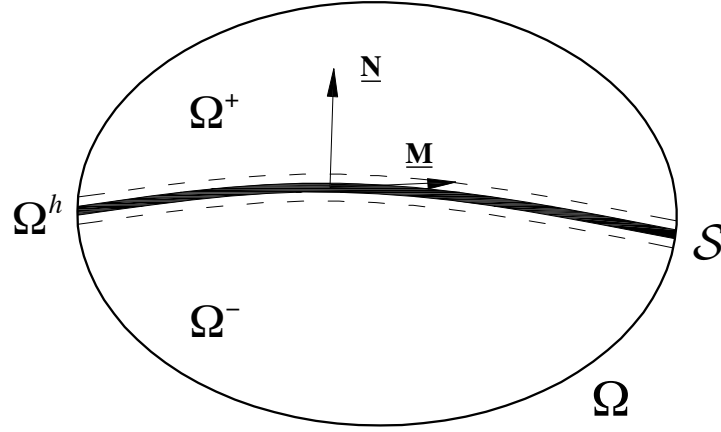


Figura 6.4: Análisis de bifurcación discontinua en un medio bidimensional.

El campo gradiente de desplazamiento debe cumplir la siguiente restricción cinemática (ver Sección 6.2)

$$[[\underline{\nabla} \underline{\mathbf{u}}]] = \underline{\beta} \otimes \underline{\mathbf{N}} = \frac{1}{h} [[\underline{\dot{\mathbf{u}}}] \otimes \underline{\mathbf{N}} = \frac{\|\underline{\dot{\mathbf{u}}}\|}{h} \underline{\mathbf{M}} \otimes \underline{\mathbf{N}} = \dot{\gamma} \underline{\mathbf{M}} \otimes \underline{\mathbf{N}} \quad (6.14)$$

donde  $\underline{\beta}$  es el modo bifurcado,  $\dot{\gamma} = \frac{\|\underline{\dot{\mathbf{u}}}\|}{h}$  es la amplitud escalar del salto y  $\underline{\mathbf{M}}$  es el vector de polarización que determina la dirección del salto [22].  $\underline{\mathbf{N}}$  y  $\underline{\mathbf{M}}$  son vectores unitarios.

Por lo tanto, el salto en la tasa de deformación  $[[\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}]$  se puede expresar como

$$[[\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}] = \dot{\gamma} (\underline{\mathbf{M}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S \quad (6.15)$$

donde el superíndice  $S$  denota parte simétrica del tensor de segundo orden.

La restricción impuesta por la ec.(6.15) se la conoce como *condición de compatibilidad de Maxwell*. Por otro lado, la condición de equilibrio en el momento de la bifurcación establece que la tasa del vector tracción  $\underline{\dot{\mathbf{t}}}$  a ambos lados de la discontinuidad sea continuo, es decir

$$[[\underline{\dot{\mathbf{t}}}] = \underline{\dot{\mathbf{t}}}^+ - \underline{\dot{\mathbf{t}}}^- = \underline{\mathbf{0}} \quad (6.16)$$

Aplicando la definición del tensor de tensiones en la ec.(6.16), se obtiene

$$[[\underline{\dot{\mathbf{t}}}] = [[\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}] \cdot \underline{\mathbf{N}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (6.17)$$

El salto del tensor de tensiones viene dado por la siguiente ecuación constitutiva

$$[[\underline{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}] = \underline{\mathbf{C}} : [[\underline{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}] = \dot{\gamma} \underline{\mathbf{C}} : (\underline{\mathbf{M}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S \quad (6.18)$$



Por lo tanto, la ec.(6.17), se puede expresar como

$$[[\dot{\mathbf{t}}]] = (\underline{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C} \cdot \underline{\mathbf{N}}) \cdot \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathcal{Q}} \cdot \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (6.19)$$

donde  $\underline{\mathcal{Q}}$  es un tensor de segundo orden denominado *tensor acústico* o *tensor de localización* y se define como

$$\underline{\mathcal{Q}}(\underline{\mathbf{N}}) = \underline{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C} \cdot \underline{\mathbf{N}} \quad (6.20)$$

Para que exista una solución no trivial de sistema de ecuaciones planteado por la ec.(6.19), se debe cumplir que  $\det(\underline{\mathcal{Q}}) = 0$ , que corresponde a que el mínimo autovalor de  $\underline{\mathcal{Q}}$  sea nulo. A esta condición de la conoce como *condición de localización* o *condición de pérdida de elipticidad* del sistema de ecuaciones de equilibrio incrementales [44].

El nombre de condición de pérdida de elipticidad se debe a que la *condición fuerte de elipticidad* del sistema de ecuaciones de equilibrio incrementales viene dada por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \quad (6.21)$$

Esta condición determina que la forma cuadrática de cuarto orden debe ser definida positiva para que el sistema de ecuaciones de equilibrio incrementales sea elíptico. Teniendo en cuenta el análisis de bifurcación discontinua la condición fuerte de elipticidad se puede escribir en función del salto de la tasa de deformaciones  $[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]]$  como

$$[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] : \mathbf{C} : [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] > 0 \quad (6.22)$$

debido a que  $[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \dot{\gamma}(\underline{\mathbf{M}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S$  es una diada, posee déficit de rango [19] entonces, la forma cuadrática que antes era de cuarto orden se transforma en una de segundo orden dada por

$$\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathcal{Q}} \cdot \underline{\mathbf{M}} > 0 \quad (6.23)$$

que también determina la condición fuerte de elipticidad del sistema de ecuaciones de equilibrio. Cuando esta forma cuadrática es nula el sistema de ecuaciones se transforma en parabólico y se cumple que  $\det(\underline{\mathcal{Q}}) = 0$ ; es por esta razón que a esta condición se la denomina pérdida de elipticidad.

Al tensor  $\underline{\mathcal{Q}}$  se lo denomina tensor acústico pues su definición es análoga al que resulta de la teoría infinitesimal de propagación de ondas en sólidos [22], en donde  $\underline{\mathbf{N}}$  es la dirección

de propagación y los valores propios de  $\mathcal{Q}$  corresponden a las velocidades de propagación de onda; en este contexto la singularidad de  $\mathcal{Q}$  corresponde a ondas estacionarias.

## 6.4. Análisis de bifurcación discontinua en medios elastoplásticos

En este apartado se estudia el indicador de bifurcación discontinua para el modelo elastoplástico local basado en el criterio de falla de Matsuoka-Nakai. Se comienza por introducir un resumen de las ecuaciones constitutivas necesarias para establecer los modos de falla localizada para el criterio de falla de Matsuoka-Nakai, los que se encuentran relacionados con bifurcaciones discontinuas del equilibrio. Luego se desarrolla la condición de localización suponiendo carga plástica en la banda de discontinuidad y descarga elástico o carga neutra fuera de ella.

### 6.4.1. Resumen de ecuaciones constitutivas

1. Relación constitutiva incremental:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \mathbf{C}_e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{m}) \quad (6.24)$$

donde  $\mathbf{m} = \mathbf{m}^d + \beta \mathbf{1}$  y

$$\mathbf{m}^d = \frac{\mathbf{n}^d}{\|\mathbf{n}^d\|} \quad (6.25)$$

$$\beta = -\sin(\psi) \quad (6.26)$$

donde  $\beta$  es un parámetro de dilatancia.

2. Condiciones de carga y descarga:

Las condiciones de Khun-Tucker se pueden reescribir de la siguiente manera

$$F_f = \begin{cases} \mathbf{n} : \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} > 0 & \Rightarrow \dot{F}_f = 0; \dot{\lambda} > 0 \text{ (carga plástica)} \\ \mathbf{n} : \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = 0 & \Rightarrow \dot{F}_f = 0; \dot{\lambda} = 0 \text{ (carga neutra)} \\ \mathbf{n} : \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} < 0 & \Rightarrow \dot{F}_f = 0; \dot{\lambda} < 0 \text{ (descarga elástica)} \end{cases} \quad (6.27)$$

donde  $\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ .

3. Condición de consistencia plástica:

$$\dot{F}_f = 0 \Rightarrow \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} (J_{2r} - J_{3r} - 1) H = 0 \quad (6.28)$$

4. Operador elastoplástico tangente continuo:

$$\mathbb{C} = \begin{cases} \mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e - \frac{\mathbf{C}_e : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{C}_e}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m} - (J_{2r} - J_{3r} - 1) H} & \text{(carga plástica)} \\ \mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e & \text{(descarga elástica)} \end{cases} \quad (6.29)$$

si se define

$$\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e - \mathbf{C}_p \quad (6.30)$$

donde la degradación plástica  $\mathbf{C}_p$  viene dada por

$$\mathbf{C}_p = \frac{\mathbf{C}_e : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{C}_e}{\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \mathbf{m} - (J_{2r} - J_{3r} - 1) H} \quad (6.31)$$

Se puede reescribir a la ec.(6.29) como

$$\mathbb{C} = \begin{cases} \mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e - \mathbf{C}_p & \text{(carga plástica)} \\ \mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C}_e & \text{(descarga elástica)} \end{cases} \quad (6.32)$$

### 6.4.2. Condición de localización

El operador elastoplástico tangente admite dos valores dependiendo del estado de carga o descarga del material. Suponiendo que la bifurcación ocurre con carga plástica dentro de la banda ( $\mathbf{C}^{int} = \mathbf{C}_{ep}$ ) y descarga elástica ( $\mathbf{C}^{ext} = \mathbf{C}_e$ ), entonces el salto en el tensor de tensiones se puede expresar como

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] = \mathbf{C}^{int} : \left( \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} + [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] \right) - \mathbf{C}^{ext} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (6.33)$$

donde  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  es el campo tasa de deformación homogéneo de la parte exterior a la banda de discontinuidad.

Como se puede expresar al salto en el campo tasa de deformaciones como  $[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = (\underline{\boldsymbol{\beta}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S$  o  $[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \dot{\gamma} (\underline{\mathbf{M}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S$ , se puede expresar a la ec.(6.33) de la siguiente manera

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] = \mathbf{C}^{int} : \left[ \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} + (\underline{\boldsymbol{\beta}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S \right] - \mathbf{C}^{ext} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (6.34)$$

De la condición de equilibrio dada por la ec.(6.17) se infiere

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] \cdot \underline{\mathbf{N}} = (\underline{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C}^{int} \cdot \underline{\mathbf{N}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\beta}} + (\mathbf{C}^{int} - \mathbf{C}^{ext}) : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \underline{\mathbf{N}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (6.35)$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{Q}^{int} \cdot \underline{\boldsymbol{\beta}} = - [[\mathbf{C}]] : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \underline{\mathbf{N}} \quad (6.36)$$

donde  $[[\mathbf{C}]] = \mathbf{C}^{int} - \mathbf{C}^{ext}$ .

Como  $\mathbf{C}^{int} = \mathbf{C}_{ep}$  y  $\mathbf{C}^{ext} = \mathbf{C}_e$ , entonces el salto en el operador elastoplástico tangente vale

$$[[\mathbf{C}]] = \mathbf{C}_p \quad (6.37)$$

y la ec.(6.36) se puede escribir como

$$\mathcal{Q}_{ep} \cdot \underline{\boldsymbol{\beta}} = -\mathbf{C}_p : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \underline{\mathbf{N}} \quad (6.38)$$

En el caso de carga neutra  $\mathbf{C}_{ep} : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\mathbf{0}}$ , entonces la condición de localización se escribe como

$$\mathcal{Q}_{ep} \cdot \underline{\boldsymbol{\beta}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (6.39)$$

es decir, la carga neutra puede interpretarse como la frontera entre carga plástica y descarga elástica. Por consiguiente, el análisis de bifurcación puede efectuarse de manera generalizada considerando comportamientos diferentes dentro y fuera de la banda. Las condiciones que llevan a soluciones no triviales en la ec.(6.39), es decir  $\det(\mathcal{Q}_{ep}) = 0$ , son las mismas que se obtienen de la ec.(6.38), considerando carga neutra fuera de la banda.

Si se considera que la bifurcación ocurre con carga plástica en el interior de la banda ( $\dot{\lambda} \neq 0$ ) y descarga elástica o carga neutra ( $\dot{\lambda} = 0$ ) en el exterior, de acuerdo con las ecs.(6.24) y ec.(6.15), las tasas de tensiones en el interior y en el exterior de la banda se escriben como

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{int} = \mathbf{C}_e : \left[ \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \right] & \text{(elastoplástico)} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{ext} = \mathbf{C}_e : \dot{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} & \text{(elástico)} \end{cases} \quad (6.40)$$

teniendo en cuenta que  $[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = (\underline{\boldsymbol{\beta}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S = \dot{\gamma} (\underline{\mathbf{M}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S$  y la regla de flujo  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m}$ , la ec.(6.40)<sub>1</sub> se puede reescribir como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{int} = \mathbf{C}_e : \left[ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\underline{\boldsymbol{\beta}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S - \dot{\lambda} \mathbf{m} \right] \quad (6.41)$$

De acuerdo con las ecs.(6.27), (6.40) y (6.48), la condición de descarga elástica o carga neutra en el exterior de la banda implica

$$\mathbf{n} : \mathbf{C}_e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{ext} \leq 0 \quad (6.42)$$

donde la igualdad corresponde a la condición de carga neutra y la desigualdad corresponde a la condición de descarga elástica.

Mediante la ec.(6.40), el salto en la tasa del tensor de tensiones se expresa de la forma

$$\begin{aligned} [[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] &= \boldsymbol{\sigma}^{int} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{ext} \\ &= \mathbf{C}^e : \left[ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\underline{\boldsymbol{\beta}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S - \dot{\lambda} \mathbf{m} \right] - \mathbf{C}^e : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \mathbf{C}^e : \left[ (\underline{\boldsymbol{\beta}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S - \dot{\lambda} \mathbf{m} \right] \end{aligned} \quad (6.43)$$

La condición de equilibrio  $[[\dot{\mathbf{t}}]] = \underline{\mathbf{0}}$ , implica que

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] \cdot \underline{\mathbf{N}} = (\underline{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \underline{\mathbf{N}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\beta}} - \dot{\lambda} \mathbf{m} : \mathbf{C}^e \cdot \underline{\mathbf{N}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (6.44)$$

Llamando tensor acústico elástico a  $\mathbf{Q}_e = \underline{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C}_e \cdot \underline{\mathbf{N}}^1$ , la ec.(6.44) se reescribe como

$$\mathbf{Q}_e \cdot \underline{\boldsymbol{\beta}} - \dot{\lambda} \mathbf{m} : \mathbf{C}^e \cdot \underline{\mathbf{N}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (6.45)$$

De la ec.(6.45) se puede despejar el modo bifurcado  $\underline{\boldsymbol{\beta}}$  dado por

$$\underline{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\lambda} (\mathbf{Q}_e)^{-1} \cdot \mathbf{m} : \mathbf{C}^e \cdot \underline{\mathbf{N}} \quad (6.46)$$

Por lo tanto, se puede reescribir la ec.(6.43) como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{ext} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{int} - \mathbf{C}^e : \left[ (\underline{\boldsymbol{\beta}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S - \dot{\lambda} \mathbf{m} \right] \quad (6.47)$$

De la ec.(6.28) se infiere que

---

<sup>1</sup> $\mathbf{Q}_e$  es definido positivo  $\forall \underline{\mathbf{N}}$ , pues  $\mathbf{C}_e$  es definido positivo.

$$\dot{\mathbf{o}}^{int} = -(J_{2r} - J_{3r} - 1) H \quad (6.48)$$

Teniendo en cuenta la condición de descarga elástica dada por la ec.(6.42) y la ec.(6.48), la ec.(6.47) se puede expresar de la siguiente manera

$$-(J_{2r} - J_{3r} - 1) H - \mathbf{C}_e : \left[ (\underline{\boldsymbol{\beta}} \otimes \underline{\mathbf{N}})^S - \dot{\lambda} \mathbf{m} \right] : \mathbf{n} \leq 0 \quad (6.49)$$

reemplazando el valor de  $\underline{\boldsymbol{\beta}}$  dado por la ec.(6.46), suponiendo carga neutra en la parte exterior de la banda de discontinuidad, la condición de localización se puede reescribir de la siguiente manera

$$H(\underline{\mathbf{N}}) = -\frac{1}{(J_{2r} - J_{3r} - 1)} \left[ \underline{\mathbf{a}} \cdot (\underline{\mathcal{Q}}_e)^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}} - \mathbf{m} : \mathbf{C}_e : \mathbf{n} \right] \quad (6.50)$$

donde  $\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{n} : \mathbf{C}_e \cdot \underline{\mathbf{N}}$ ,  $\underline{\mathcal{Q}}_e = \underline{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{C}_e \cdot \underline{\mathbf{N}}$  y  $\underline{\mathbf{b}} = \mathbf{m} : \mathbf{C}_e \cdot \underline{\mathbf{N}}$ .

Esta última es la expresión analítica que conduce a la singularidad del tensor acústico  $\underline{\mathcal{Q}}_{ep}$  para una determinada dirección de  $\underline{\mathbf{N}}$ .

### 6.4.3. Módulo crítico de endurecimiento/ablandamiento

Sea  $H_{loc}$  el valor del módulo de endurecimiento/ablandamiento  $H$  que conduce a la singularidad de  $\underline{\mathcal{Q}}_{ep}$ . El problema consiste en encontrar el valor crítico  $H_{loc}^{crit}$  definido como el máximo valor de  $H_{loc}$  con respecto a la variación de  $\underline{\mathbf{N}}$  para un determinado estado de tensiones. De esta manera, se puede asegurar que para valores de  $H > H_{loc}^{crit}$ , el material permanece estable.

La localización puede ocurrir en el instante de la historia de deformaciones de un punto en el que  $H = H_{loc}^{crit}$ . Entonces se debe resolver el siguiente problema de maximización

$$H_{loc}^{crit} = \mathbf{MAX} [H_{loc}(\underline{\mathbf{N}})] \quad (6.51)$$

sujeta a

$$\underline{\mathbf{N}} \in \Omega = \{ \underline{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbb{R}^{ndim} \mid \|\underline{\boldsymbol{\eta}}\| = 1 \} \quad (6.52)$$

los valores de las orientaciones compatibles con  $H_{loc}^{crit}$  vienen dadas por

$$\underline{\mathbf{N}}^{crit} \in \{ \underline{\boldsymbol{\eta}} \in \Omega \mid H_{loc}(\underline{\mathbf{N}}) = H_{loc}^{crit} \} \quad (6.53)$$

este problema de maximización se resuelve analíticamente en [37] para problemas tridimensionales mediante el empleo de multiplicadores de Lagrange. En este trabajo este problema de extremos se resuelve numéricamente para un estado de compresión plana.

## 6.5. Análisis numérico del indicador de falla localizada

El indicador de falla localizada viene dado por  $\det [\mathcal{Q}_{ep}(\underline{\mathbf{N}})] = 0$ . Para hallar las dirección de localización  $\underline{\mathbf{N}}^{crit}$  se barren los ángulos de posibles inclinaciones de la banda de discontinuidad desde  $0^\circ$  a  $360^\circ$ ; los ángulos tales que  $\det [\mathcal{Q}_{ep}(\underline{\mathbf{N}})] = 0$  se denominan ángulos de localización.

En este trabajo se decide analizar las características espectrales de  $\frac{\mathcal{Q}_{ep}}{\mathcal{Q}_e}$ , por lo tanto el indicador de falla localizada se modifica mediante en indicador de normalizado

$$\det \left( \frac{\mathcal{Q}_{ep}}{\mathcal{Q}_e} \right) = 0 \quad (6.54)$$

A continuación se analizan las propiedades de localización del modelo de Matsuoka-Nakai para el estado de compresión plana; los parámetros materiales adoptados son:  $e_{min} = 0,63$ ,  $e_{max} = 1,03$ ,  $p_r = 50$ ,  $E = 2 \times 10^5 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ ,  $\nu = 0,3$  y  $\phi_c = 33^\circ$ .

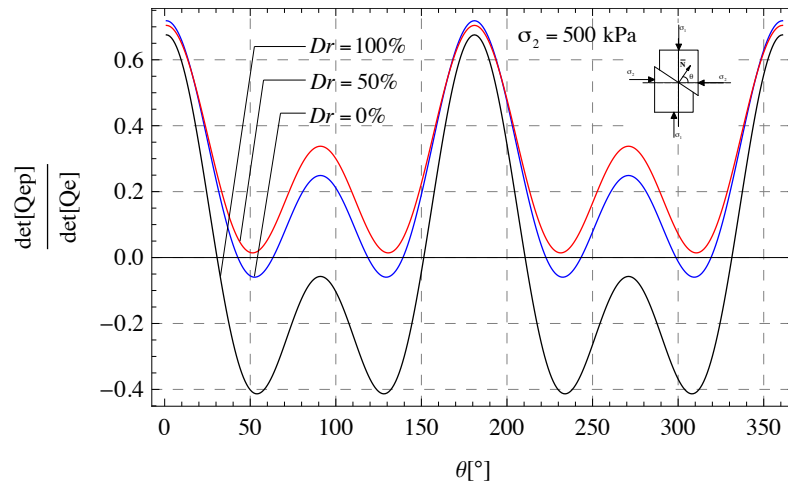
Se analizan las siguientes situaciones:

1. Sensibilidad de las propiedades de la localización del modelo respecto de la densidad relativa.
2. Sensibilidad de las propiedades de la localización del modelo respecto de la presión.
3. Comparación entre las respuestas correspondientes a  $H_{loc}$  y  $H_{loc}^{crit}$ .

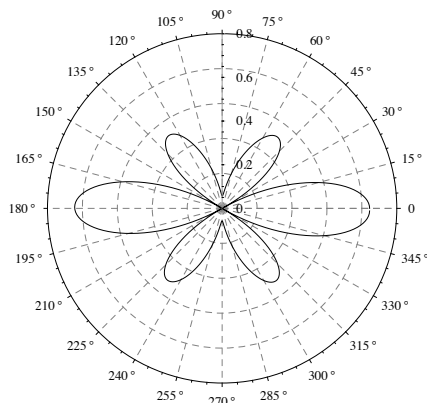
### 6.5.1. Sensibilidad de las propiedades de la localización del modelo respecto de la densidad relativa

En las Figs.6.5-6.7 se grafica el indicador de localización en función del ángulo  $\theta$  normal al plano de análisis, ángulo medido respecto al eje correspondiente al estado principal de tensiones, para tres densidades relativas distintas y para un valor  $\sigma_2$  constante; además para cada espectro de localización se grafica la variación polar del indicador de localización. Se observan diferentes resultados para cada estado de las arenas: para una arena densa y medianamente densa se observa que el modelo de Matsuoka-Nakai localiza para cuatro ángulos potenciales cercanos a  $55^\circ$ ,  $145^\circ$ ,  $235^\circ$  y  $325^\circ$  que son las cuatro direcciones posibles de la normal al plano de localización de la muestra; para una arena suelta, el modelo no presenta localización para ningún valor de  $\sigma_2$  lo cual se corresponde con las evidencias experimentales (una arena suelta no presenta falla localizada, sólo se densifica llegando al estado crítico).

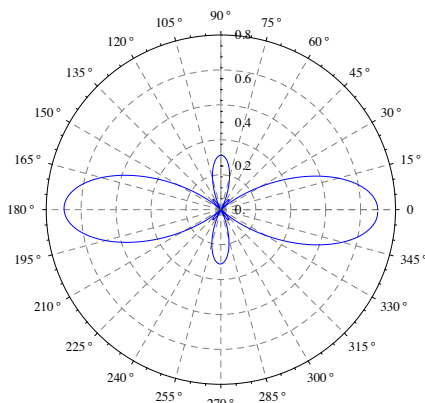
Los valores más negativos del indicador de localización se deben a que experimentalmente la misma comienza en el régimen de endurecimiento prepico [52]; debido a que el modelo presentado posee un comportamiento lineal hasta el pico, no es capaz de representar esta característica, si embargo el valor mínimo del indicador corresponde a las direcciones potenciales de localización.



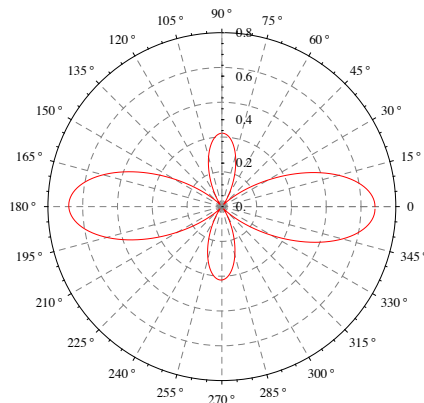
(a) Espectro de localización para tres densidades relativas.



(b) Gráfico polar.  $D_r = 100\%$



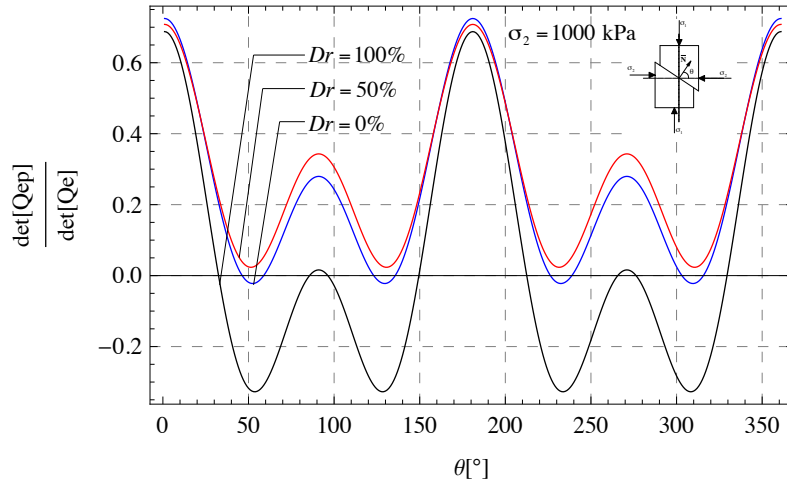
(c) Gráfico polar.  $D_r = 50\%$



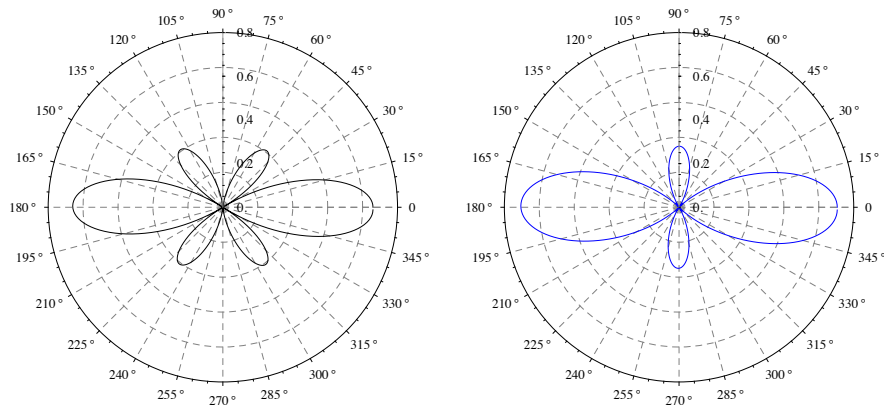
(d) Gráfico polar.  $D_r = 0\%$

Figura 6.5: Análisis numérico del indicador de localización.  $\sigma_2 = 500 \text{ kPa}$ .



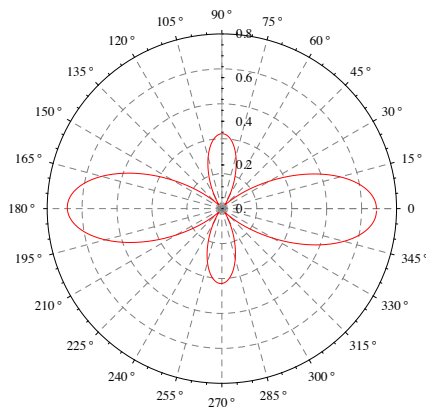


(a) Espectro de localización para tres densidades relativas.



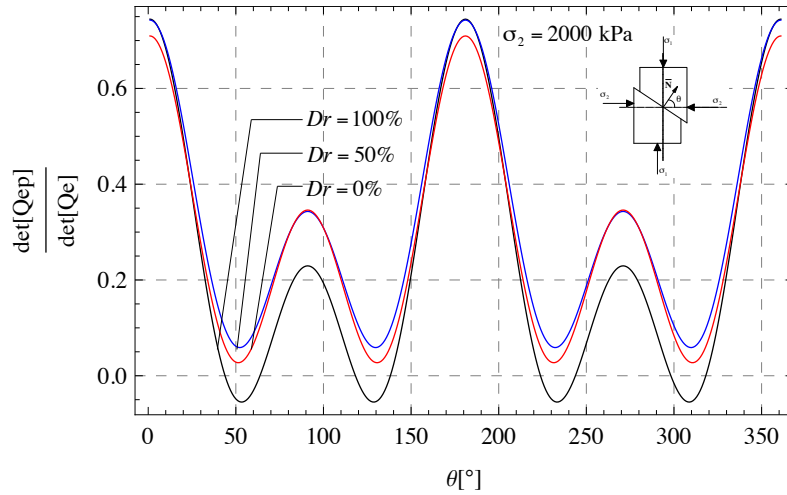
(b) Gráfico polar.  $D_r = 100\%$

(c) Gráfico polar.  $D_r = 50\%$

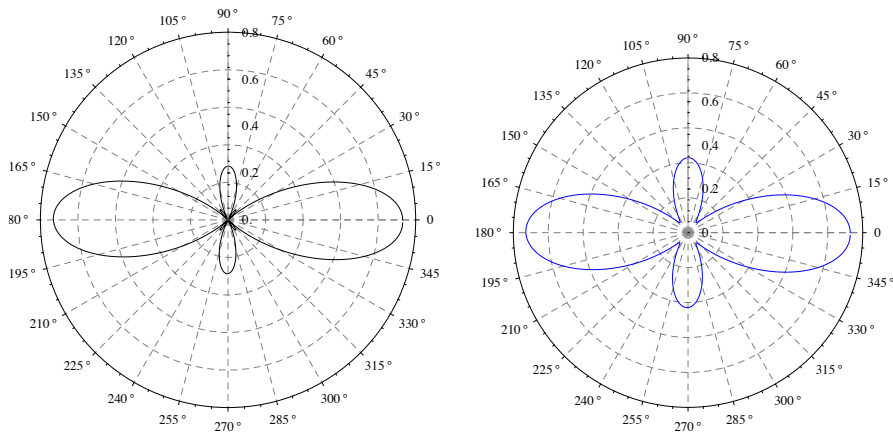


(d) Gráfico polar.  $D_r = 0\%$

Figura 6.6: Análisis numérico del indicador de localización.  $\sigma_2 = 1000 \text{ kPa}$ .

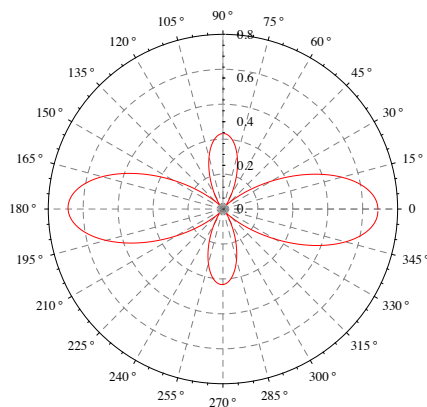


(a) Espectro de localización para tres densidades relativas.



(b) Gráfico polar.  $D_r = 100\%$

(c) Gráfico polar.  $D_r = 50\%$



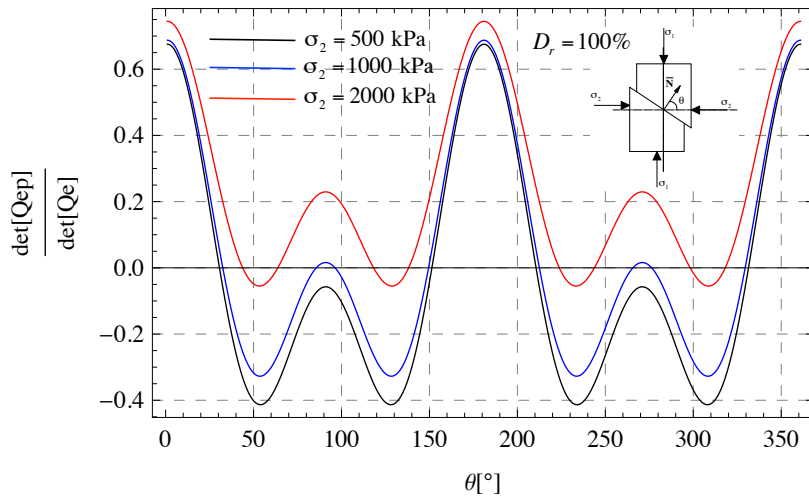
(d) Gráfico polar.  $D_r = 0\%$

Figura 6.7: Análisis numérico del indicador de localización.  $\sigma_2 = 2000$  kPa.

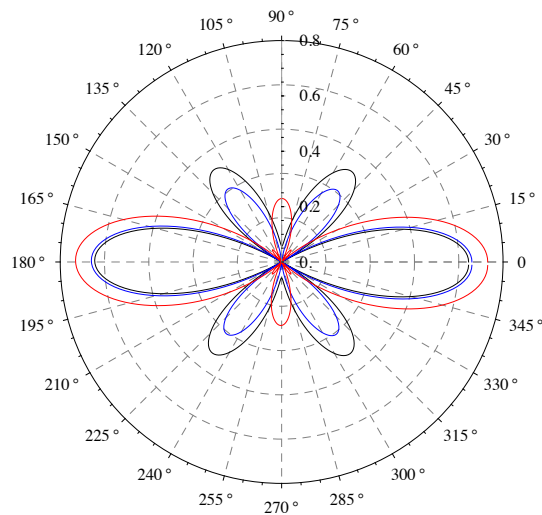
### 6.5.2. Sensibilidad de las propiedades de la localización del modelo respecto de $\sigma_2$

En las Figs.6.8 y 6.9 se grafica la influencia de  $\sigma_2$  en las propiedades de localización del modelo de Matsuoka-Nakai para dos densidades relativas; al igual que en el apartado ante-

rior se grafica en indicador de localización en función del ángulo  $\theta$  y la variación polar del indicador de localización. Se observa que a medida que aumenta  $\sigma_2$  la localización disminuye para una arena de densa; la muestra suelta no presenta cambios significativos en su comportamiento. No se observan cambios importantes en los ángulos potenciales de localización cuando se varía  $\sigma_2$ .

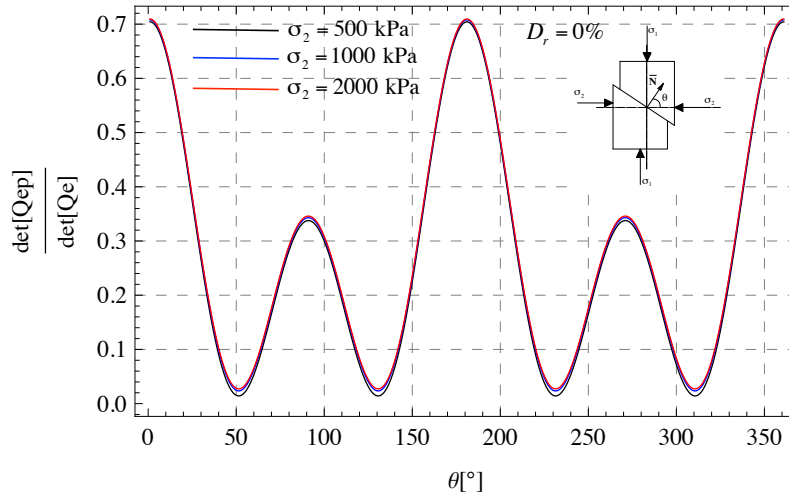


(a) Espectro de localización.

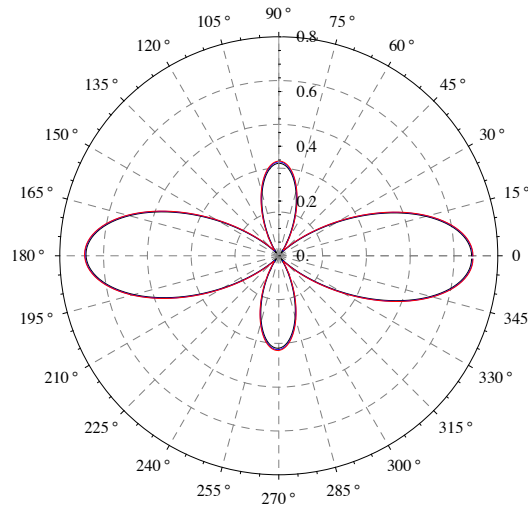


(b) Gráfico polar.

Figura 6.8: Sensibilidad de las propiedades de localización respecto de  $\sigma_2$ .  $D_r = 100\%$ .



(a) Espectro de localización.



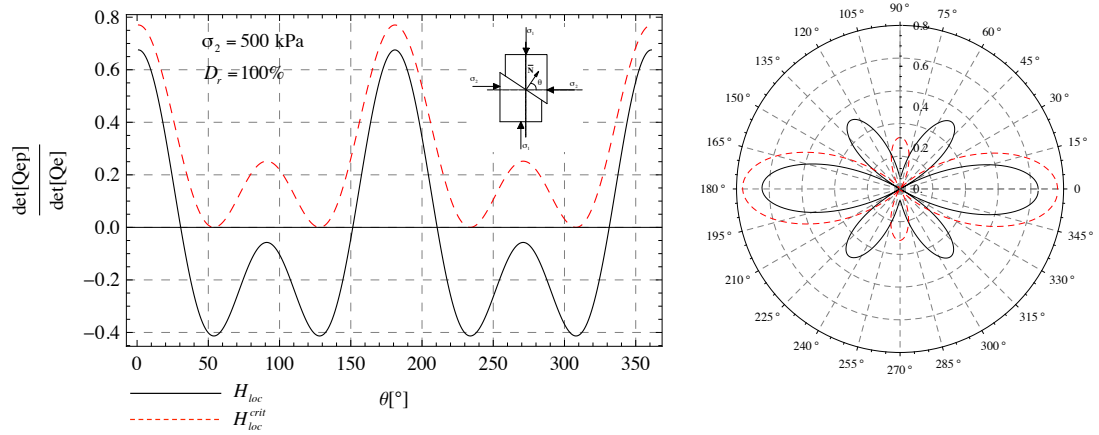
(b) Gráfico polar.

Figura 6.9: Sensibilidad de las propiedades de localización respecto de  $\sigma_2$ .  $D_r = 0\%$ .

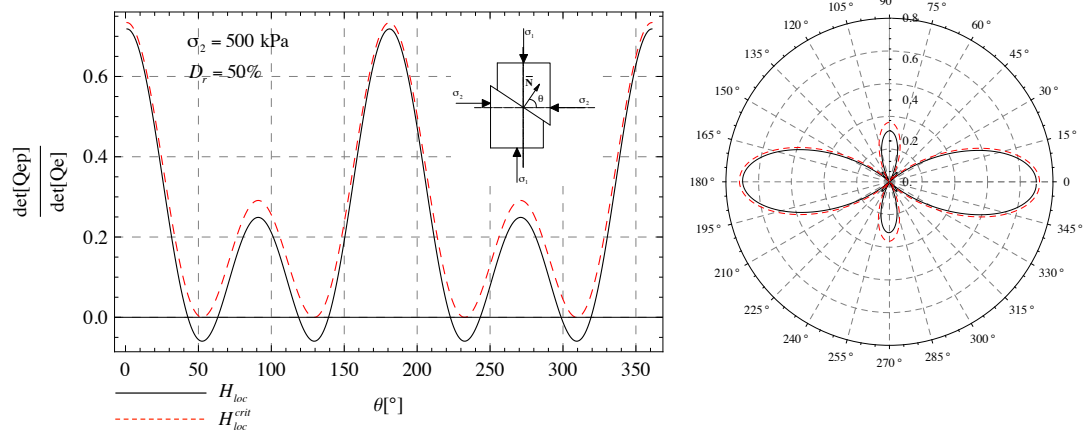
### 6.5.3. Comparación entre las respuestas correspondientes a $H_{loc}$ y $H_{loc}^{crit}$

En las Figs.6.10-6.12 se compara la respuesta obtenida para los diferentes valores que adopta  $H_{loc}$  y  $H_{loc}^{crit}$ . Se observa que el modelo localiza siempre y cuando que  $H_{loc} \leq H_{loc}^{crit}$ ; para una arena densa los valores de  $H_{loc}$  se encuentran siempre por debajo de  $H_{loc}^{crit}$ , para una arena de densidad media existen valores de  $H_{loc}$  que se encuentran por debajo de  $H_{loc}^{crit}$  pero cuando se aumenta el valor de  $\sigma_2$  se cumple que  $H_{loc} > H_{loc}^{crit}$  y la muestra se comporta como si fuera suelta para la cual siempre se verifica  $H_{loc} > H_{loc}^{crit}$ . Es decir, que el modelo localiza en régimen de ablandamiento postpico si la muestra es densa o medianamente densa para presiones moderadas; sin embargo, el modelo no localiza en régimen de endurecimiento postpico para una arena medianamente densa para presiones elevadas y para arenas sueltas en todo el rango de presiones. En el Anexo D.4 se deduce la expresión del módulo intrínseco

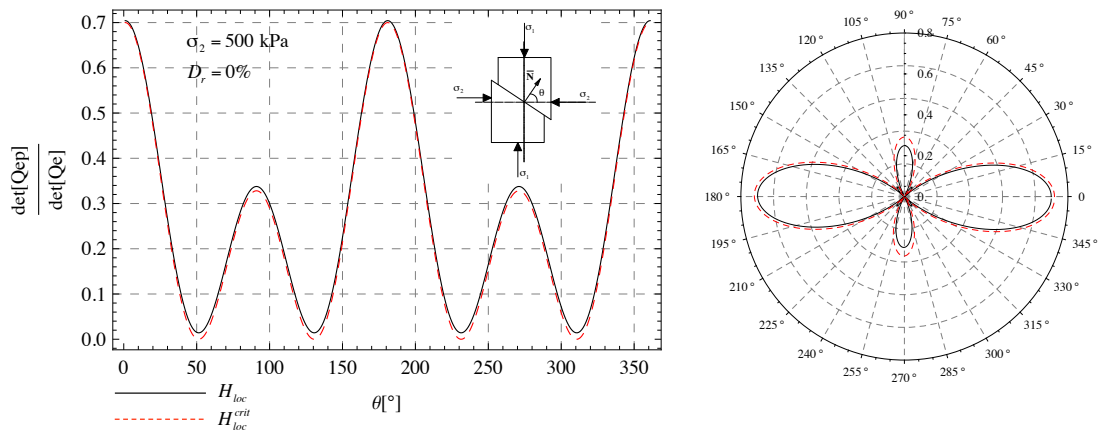
de endurecimiento/ablandamiento  $H$  y se realiza un gráfico que muestra la variación del mismo respecto a la presión para un rango amplio de densidades; en este gráfico se puede apreciar que una arena suelta posee  $H > 0$  para un rango amplio de presiones, en cambio para arenas densas y medianamente densas existe un rango de presiones para el cual  $H < 0$  y una presión crítica para la cual  $H > 0$ .



(a)  $D_r = 100\%$

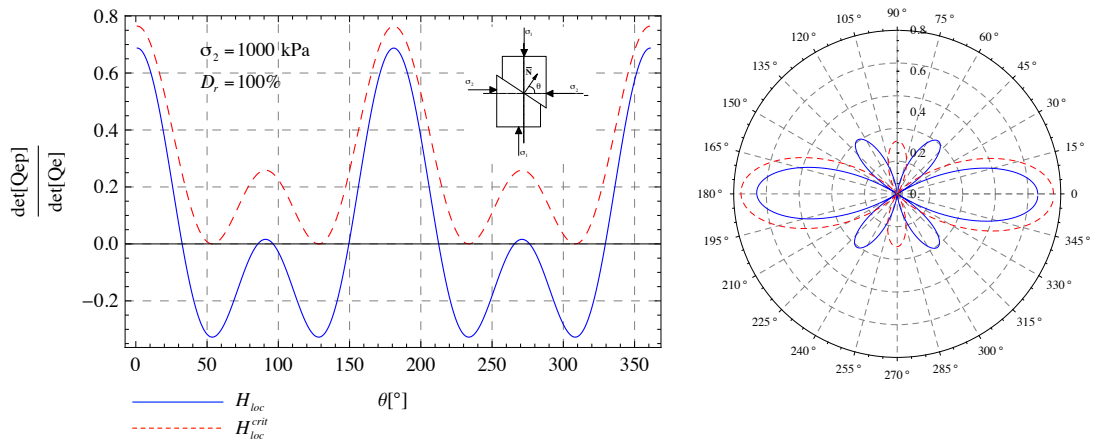


(b)  $D_r = 50\%$

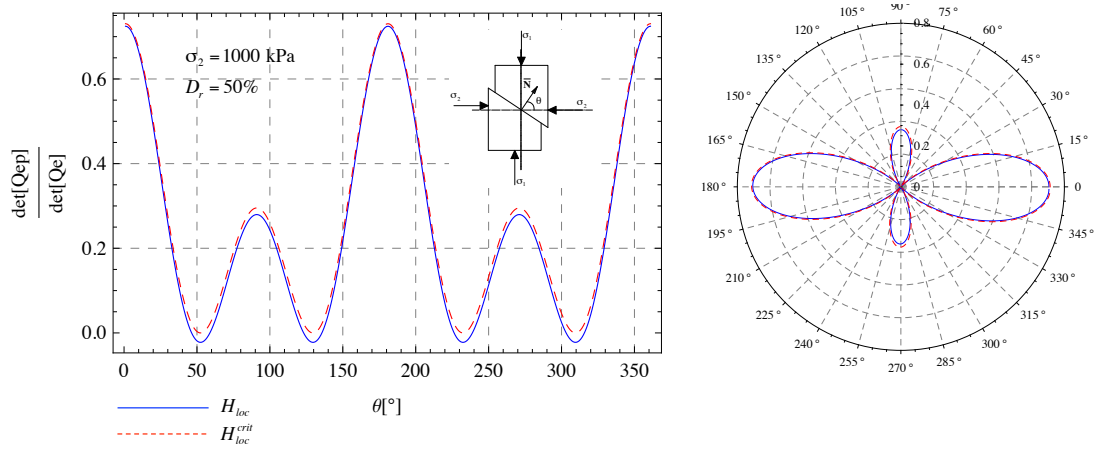


(c)  $D_r = 0\%$

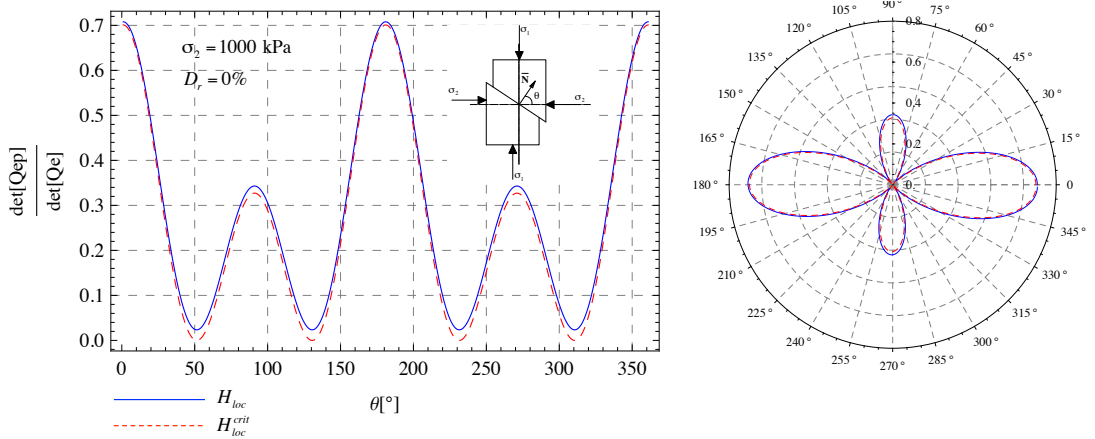
Figura 6.10: Comparación entre las respuestas correspondientes a  $H_{loc}$  y  $H_{loc}^{crit}$ .  $\sigma_2 = 500$  kPa.



(a)  $D_r = 100\%$

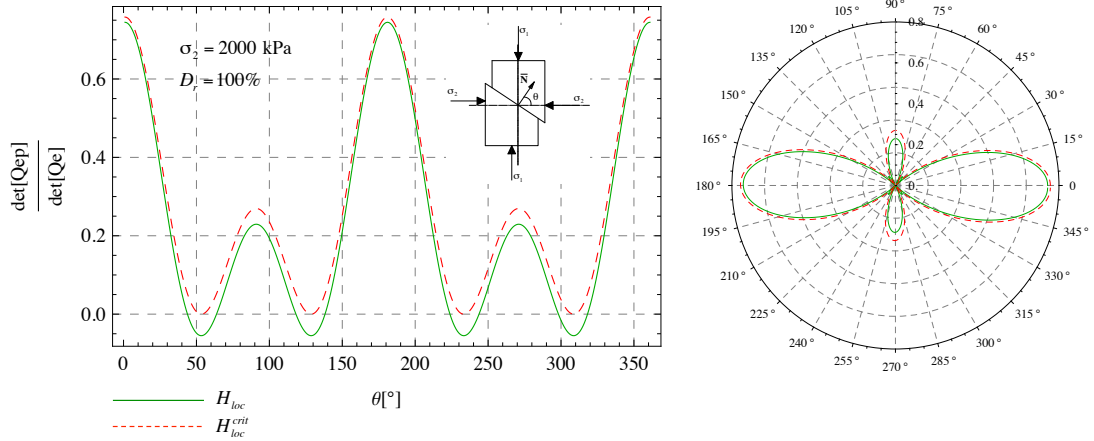


(b)  $D_r = 50\%$

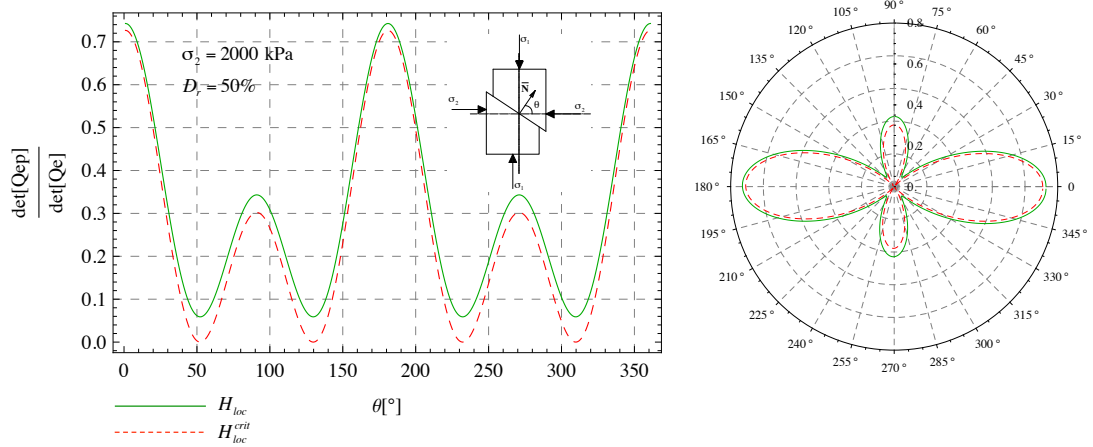


(c)  $D_r = 0\%$

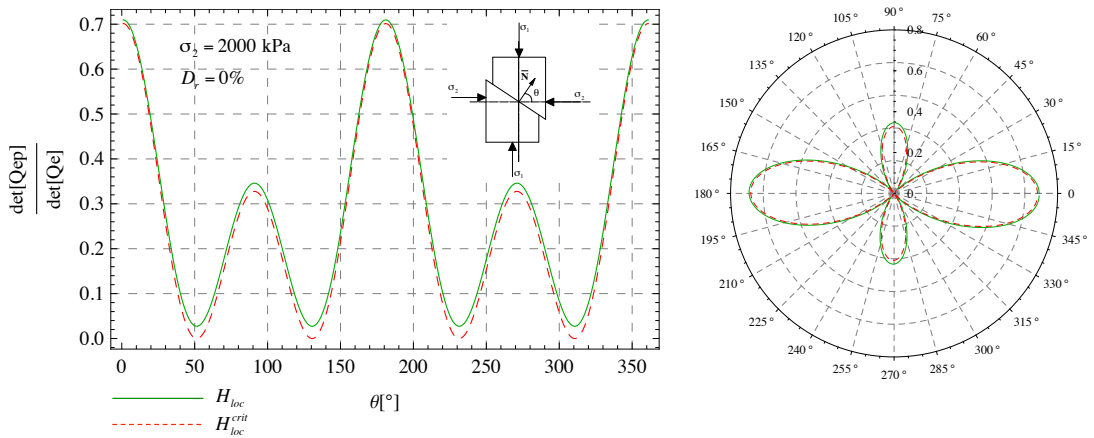
Figura 6.11: Comparación entre las respuestas correspondientes a  $H_{loc}$  y  $H_{loc}^{crit}$ .  $\sigma_2 = 1000$  kPa.



(a)  $D_r = 100\%$



(b)  $D_r = 50\%$



(c)  $D_r = 0\%$

Figura 6.12: Comparación entre las respuestas correspondientes a  $H_{loc}$  y  $H_{loc}^{crit}$ .  $\sigma_2 = 2000 \text{ kPa}$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo se estudian las bases de la teoría de la elastoplasticidad local y su implementación numérica. Se comienza por simplicidad con el estudio del comportamiento elástico de los materiales compuestos por partículas y se realiza la integración numérica y análisis del modelo de hiperelástico de Molenkamp. Luego se estudia los conceptos de la elastoplasticidad local asociada y se desarrollan diferentes algoritmos de retorno con el fin de estudiar su comportamiento e implementación para diferentes leyes de endurecimiento. Para cada uno se dedujo detalladamente el operador elastoplástico tangente algorítmico, que es necesario para asegurar la convergencia cuadrática del método de Newton-Raphson global que resulta de resolver el problema de valores de contorno mediante el Método de los Elementos Finitos. Esta etapa fue necesaria pues, para integrar un modelo constitutivo complejo se debe entender como se realiza la integración de modelos más simples.

Una vez establecidas las bases de la elastoplasticidad, se desarrolla un modelo elastoplástico local no asociado basado en el criterio de falla propuesto por Matsuoka y Nakai [29] [30] y adoptado por Sfriso en [49]. Primero se estudian las bases de la estrategia de retorno, mediante el análisis de las características matemáticas de la función de fluencia, sin modelar el comportamiento dilatante y contractivo del material, este análisis es análogo a un régimen de plasticidad perfecta. Luego se introduce el comportamiento dilatante y contractivo del material mediante una serie de variables de estado que describen las características generales del comportamiento de los materiales granulares. Las características del algoritmo de retorno propuesto para este modelo, permitieron hallar el operador elastoplástico tangente algorítmico, que es necesario por los motivos expuestos anteriormente.

Con estos elementos, se halla el módulo intrínseco de endurecimiento/ablandamiento del modelo, que es de utilidad para realizar el estudio de discontinuidad débil o localización del mismo.

Luego, se presenta el marco teórico general de la mecánica de medios discontinuos y se hace especial hincapié en el estudio de la condición de localización. Se introduce el indicador material de localización y se realiza el estudio numérico de sus características las cuales se resumen en:



1. Una muestra densa localiza para un rango amplio de presiones.
2. Una muestra medianamente densa puede localizar o no dependiendo de la presión de confinamiento de la muestra.
3. Una muestra suelta no localiza para un rango amplio de presiones.

Los ángulos potenciales de localización hallados son comparables con los que se obtienen mediante la expresión teórica

$$\theta_{loc} = 45^\circ + \frac{\phi}{2} \quad (7.1)$$

Como todas las muestras se han llevado a una deformación del 80% se establece que  $\phi = \phi_c = 33^\circ$ , entonces el ángulo de localización teórico es  $\theta = 61,5^\circ$ .

Debido a que este modelo presenta localización, todas las simulaciones que se realicen con él serán dependientes de la malla y se deberá recurrir a la regularización de localizaciones que puede ser a nivel constitutivo o a nivel elemental.

La ventaja fundamental de este modelo es que los parámetros de entrada son propiedades del material y no del problema que se este analizando, es decir el ángulo de fricción interna es una variable de estado del modelo al igual que la relación de vacíos. Muchos modelos de la generación de Mohr-Coulomb definen estas variables como parámetros fijos que dependen del problema en estudio y de la experiencia del diseñador, lo cual es un severo inconveniente para el diseño geotécnico; estudios de un mismo problema pueden llevar a soluciones distintas.

Sin embargo, el modelo elastoplástico propuesto no es capaz de reproducir endurecimiento prepico debido a que se ha adoptado un comportamiento elástico lineal hasta el pico, es decir el comportamiento plástico del modelo se activa luego de alcanzado el pico. Este comportamiento se puede mejorar adoptando una ley de endurecimiento de naturaleza isotrópica como se muestra en [49].

A pesar estas limitaciones, el modelo es adecuado para el análisis de algunos problemas de la geotécnica como estabilidad de taludes y aislación de bases.

# Apéndice A

## Definiciones y Expresiones auxiliares

En este Apéndice se presentan los elementos básicos de álgebra tensorial que se emplearon en las deducciones de algunas de las ecuaciones. Las definiciones que se presentan aquí sirven de base para el desarrollo del presente trabajo. Las referencias utilizadas son [16] [33] [49].

### A.1. Tensores unitarios

Se define el tensor unitario de segundo orden como

$$\mathbf{1} = \delta_{ij} \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \quad \delta_{ij} = \underline{\mathbf{e}}^i \cdot \underline{\mathbf{e}}^j \quad (\text{A.1})$$

El tensor unitario de cuarto orden simétrico se define como

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \otimes \underline{\mathbf{e}}^k \otimes \underline{\mathbf{e}}^l \quad (\text{A.2})$$

Este último se puede descomponer en sus proyecciones esférica y deviatórica  $\mathbf{I} = \mathbf{I}^{esf} + \mathbf{I}^{dev}$  donde

$$\mathbf{I}^{esf} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad \mathbf{I}^{dev} = \mathbf{I} - \mathbf{I}^{esf} \quad (\text{A.3})$$

### A.2. Invariantes de tensores de segundo orden

Sea un tensor de segundo orden simétrico  $\mathbf{t} \in \mathbb{S}$ , se definen los invariantes

$$I_{1\mathbf{t}} = \mathbf{t} : \mathbf{1} = t_{ii} \quad (\text{A.4})$$

$$I_{2\mathbf{t}} = \frac{1}{2} (\mathbf{t} : \mathbf{t}) \quad (\text{A.5})$$

$$I_{3t} = \frac{1}{3} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{t} = \det [\mathbf{t}] \quad (\text{A.6})$$

Los invariantes de la componente deviat6rica del tensor  $\mathbf{t}$  son

$$J_{1t} = \text{tr} (\mathbf{t}^d) = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$J_{2t} = \frac{1}{2} \mathbf{t}^d : \mathbf{t}^d \quad (\text{A.8})$$

$$J_{3t} = \frac{1}{3} (\mathbf{t}^d \cdot \mathbf{t}^d) : \mathbf{t}^d \quad (\text{A.9})$$

### A.3. Derivadas de invariantes

#### A.3.1. Derivadas de los invariantes de un tensor de segundo orden

1. Derivada del primer invariante  $I_{1t}$ :

$$\frac{\partial I_{1t}}{\partial t_{kl}} = \frac{\partial t_{ii}}{\partial t_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{il} = \delta_{kl} \quad (\text{A.10})$$

Entonces,

$$\frac{\partial I_{1t}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{1} \quad (\text{A.11})$$

2. Derivada del segundo invariante  $I_{2t}$ :

$$\frac{\partial I_{2t}}{\partial t_{kl}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial t_{ij}}{\partial t_{kl}} t_{ij} + t_{ij} \frac{\partial t_{ij}}{\partial t_{kl}} \right) = t_{ij} \frac{\partial t_{ij}}{\partial t_{kl}} = t_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} = t_{kl} \quad (\text{A.12})$$

Entonces,

$$\frac{\partial I_{2t}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{t} \quad (\text{A.13})$$

3. Derivada del tercer invariante  $I_{3t}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_{3t}}{\partial t_{kl}} &= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t_{kl}} [(t_{im} t_{mj}) t_{ij}] \\
&= \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial t_{kl}} (t_{im} t_{mj}) t_{ij} + t_{im} t_{mj} \frac{\partial t_{ij}}{\partial t_{kl}} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial t_{im}}{\partial t_{kl}} t_{mj} t_{ij} + t_{im} \frac{\partial t_{mj}}{\partial t_{kl}} t_{ij} + t_{im} t_{mj} \frac{\partial t_{ij}}{\partial t_{kl}} \right] \\
&= \frac{1}{3} [\delta_{ik} \delta_{ml} t_{mj} t_{ij} + t_{im} \delta_{mk} \delta_{jl} t_{ij} + t_{im} t_{mj} \delta_{ik} \delta_{jl}] \\
&= \frac{1}{3} [t_{km} t_{ml} + t_{ki} t_{il} + t_{km} t_{ml}] \\
&= t_{km} t_{ml}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Entonces,

$$\frac{\partial I_{3t}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} \tag{A.15}$$

### A.3.2. Derivadas de los invariantes de la componente deviatorica de un tensor de segundo orden

1. Derivada del segundo invariante  $J_{2t}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{2t}}{\partial t_{kl}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_{kl}} (t_{ij}^d t_{ij}^d) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial t_{ij}^d}{\partial t_{kl}} t_{ij}^d + t_{ij}^d \frac{\partial t_{ij}^d}{\partial t_{kl}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t_{kl}} \left( t_{ij} - \frac{1}{3} t_{mm} \delta_{ij} \right) t_{ij}^d + t_{ij}^d \frac{\partial}{\partial t_{kl}} \left( t_{ij} - \frac{1}{3} t_{mm} \delta_{ij} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial t_{ij}}{\partial t_{kl}} t_{ij}^d - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial t_{mm}}{\partial t_{kl}} t_{ij}^d + t_{ij}^d \frac{\partial t_{ij}}{\partial t_{kl}} - \frac{1}{3} \delta_{ij} t_{ij}^d \frac{\partial t_{mm}}{\partial t_{kl}} \right] \\
&= \frac{1}{2} [\delta_{ik} \delta_{jl} t_{ij}^d + t_{ij}^d \delta_{ik} \delta_{jl}] \\
&= t_{kl}^d
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Entonces,

$$\frac{\partial J_{2t}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{t}^d \tag{A.17}$$

2. Derivada del tercer invariante  $J_{3t}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{3t}}{\partial \mathbf{t}_{kl}} &= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}_{kl}} [(\mathbf{t}_{im}^d \mathbf{t}_{mj}^d) \mathbf{t}_{ij}^d] \\
&= \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}_{kl}} (\mathbf{t}_{im}^d \mathbf{t}_{mj}^d) \mathbf{t}_{ij}^d + (\mathbf{t}_{im}^d \mathbf{t}_{mj}^d) \frac{\partial \mathbf{t}_{ij}^d}{\partial \mathbf{t}_{kl}} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial \mathbf{t}_{im}^d}{\partial \mathbf{t}_{kl}} \mathbf{t}_{mj}^d \mathbf{t}_{ij}^d + \mathbf{t}_{im}^d \frac{\partial \mathbf{t}_{mj}^d}{\partial \mathbf{t}_{kl}} \mathbf{t}_{ij}^d + (\mathbf{t}_{im}^d \mathbf{t}_{mj}^d) \frac{\partial \mathbf{t}_{ij}^d}{\partial \mathbf{t}_{kl}} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{t}_{im}^d}{\partial \mathbf{t}_{kl}} \mathbf{t}_{mj}^d \mathbf{t}_{ij}^d - \frac{1}{3} \delta_{im} \frac{\partial \mathbf{t}_{pp}}{\partial \mathbf{t}_{kl}} \mathbf{t}_{mj}^d \mathbf{t}_{ij}^d \right) + \left( \mathbf{t}_{im}^d \frac{\partial \mathbf{t}_{mj}^d}{\partial \mathbf{t}_{kl}} \mathbf{t}_{ij}^d - \frac{1}{3} \delta_{mj} \frac{\partial \mathbf{t}_{pp}}{\partial \mathbf{t}_{kl}} \mathbf{t}_{im}^d \mathbf{t}_{ij}^d \right) + \right. \\
&\quad \left. (\mathbf{t}_{im}^d \mathbf{t}_{mj}^d) \left( \frac{\partial \mathbf{t}_{ij}^d}{\partial \mathbf{t}_{kl}} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \mathbf{t}_{mm}}{\partial \mathbf{t}_{kl}} \right) \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[ \delta_{ik} \delta_{ml} \mathbf{t}_{mj}^d \mathbf{t}_{ij}^d - \frac{1}{3} \delta_{im} \delta_{kl} \mathbf{t}_{mj}^d \mathbf{t}_{ij}^d + \delta_{mk} \delta_{jl} \mathbf{t}_{im}^d \mathbf{t}_{ij}^d - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mj} \mathbf{t}_{im}^d \mathbf{t}_{ij}^d + \right. \\
&\quad \left. \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{t}_{im}^d \mathbf{t}_{mj}^d - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \mathbf{t}_{im}^d \mathbf{t}_{mj}^d \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[ \mathbf{t}_{kj}^d \mathbf{t}_{jl}^d - \frac{1}{3} \mathbf{t}_{ij}^d \mathbf{t}_{ij}^d \delta_{kl} + \mathbf{t}_{ki}^d \mathbf{t}_{il}^d - \frac{1}{3} \mathbf{t}_{ij}^d \mathbf{t}_{ij}^d \delta_{kl} + \mathbf{t}_{km}^d \mathbf{t}_{mj}^d - \frac{1}{3} \mathbf{t}_{jm}^d \mathbf{t}_{jm}^d \delta_{kl} \right] \\
&= \mathbf{t}_{km}^d \mathbf{t}_{ml}^d - \frac{1}{3} \mathbf{t}_{ij}^d \mathbf{t}_{ij}^d \delta_{kl} \tag{A.18}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{\partial J_{3t}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{t}^d \cdot \mathbf{t}^d - \frac{1}{3} (\mathbf{t}^d : \mathbf{t}^d) \mathbf{1} = \mathbf{t}^d \cdot \mathbf{t}^d - \frac{2}{3} J_{2t} \mathbf{1} \tag{A.19}$$

# Apéndice B

## Anexos al Capítulo 3

### B.1. Carácter tensorial de los Modelos elásticos de Cauchy

Para demostrar el carácter tensorial de los Modelos elásticos de Cauchy dados por las ecs.(3.8) y (3.9), se toman dos sistemas de coordenadas cartesianos  $\{x^i, i = 1, 2, 3\}$  y  $\{\hat{x}^j, j = 1, 2, 3\}$ . Para expresar a los tensores  $\sigma$  y  $\epsilon$ , que se encuentra en términos del sistema coordenado  $x^i$ , en el sistema  $\hat{x}^j$  se aplica la ley de transformación para tensores de segundo orden [16]

$$\hat{\sigma}_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^l} \sigma_{ij} \quad (\text{B.1})$$

$$\hat{\epsilon}_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^l} \epsilon_{ij} \quad (\text{B.2})$$

En un Modelo elástico de Cauchy, la relación constitutiva en términos de el tensor de deformaciones viene dada por

$$\sigma_{ij} = A_0 \delta_{ij} + A_1 \epsilon_{ij} + A_2 \epsilon_{im} \epsilon_{mj} \quad (\text{B.3})$$

Utilizando la ley de transformación dada por la ec.(B.1) en la ec.(B.4), se tiene

$$\frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{x}^l}{\partial x^j} \hat{\sigma}_{kl} = A_0 \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{x}^l}{\partial x^j} \hat{\delta}_{kl} + A_1 \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{x}^l}{\partial x^j} \hat{\epsilon}_{kl} + A_2 \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{x}^l}{\partial x^j} \hat{\epsilon}_{kn} \hat{\epsilon}_{nl} \quad (\text{B.4})$$

Por lo tanto,

$$\hat{\sigma}_{kl} = A_0 \hat{\delta}_{kl} + A_1 \hat{\epsilon}_{kl} + A_2 \hat{\epsilon}_{kn} \hat{\epsilon}_{nl} \quad (\text{B.5})$$

De forma análoga, la relación constitutiva en términos de el tensor de tensiones viene dada por

$$\varepsilon_{ij} = B_0 \delta_{ij} + B_1 \sigma_{ij} + B_2 \sigma_{im} \sigma_{mj} \quad (\text{B.6})$$

Entonces, aplicando la ley de transformación dada por la ec.(B.2) en la ec.(B.6), se tiene

$$\frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{x}^l}{\partial x^j} \hat{\varepsilon}_{kl} = B_0 \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{x}^l}{\partial x^j} \hat{\delta}_{kl} + B_1 \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{x}^l}{\partial x^j} \hat{\sigma}_{kl} + B_2 \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{x}^l}{\partial x^j} \hat{\sigma}_{kn} \hat{\sigma}_{nl} \quad (\text{B.7})$$

Por lo tanto,

$$\hat{\varepsilon}_{kl} = B_0 \hat{\delta}_{kl} + B_1 \hat{\sigma}_{kl} + B_2 \hat{\sigma}_{kn} \hat{\sigma}_{nl} \quad (\text{B.8})$$

Si se observan las ecs.(B.5) y (B.8) se comprueba el carácter tensorial de los Modelos elásticos de Cauchy.

## B.2. Deducción de la expresión general para los modelos hiperelásticos (Método de Green)

El Primer principio de la Termodinámica se puede expresar de la siguiente manera

$$\delta W_{ext} + \delta \tilde{Q} = \delta \tilde{T} + \delta U \quad (\text{B.9})$$

donde  $\delta(\bullet)$  es variación y;  $\delta W_{ext}$  es la variación del trabajo hecho sobre el sistema por un agente externo;  $\delta \tilde{Q}$  es la variación del calor aportado al sistema;  $\delta \tilde{T}$  es la variación de la energía cinética y  $\delta U$  es la variación de la energía interna.

Por otro lado, el principio de conservación de la energía cinética viene dado por

$$\delta W_{ext} + \delta W_{int} = \delta \tilde{T} \quad (\text{B.10})$$

donde  $\delta W_{int}$  es la variación del trabajo realizado en el interior del sistema por agentes intrínsecos. Si se sustituye  $\delta W_{ext} = \delta \tilde{T} - \delta W_{int}$  de la ec.(B.10) en la ec.(B.9) se obtiene

$$\delta W_{int} = \delta \tilde{Q} + \delta U \quad (\text{B.11})$$

Si se asume que el flujo de calor sobre el sistema es nulo, es decir  $\delta\tilde{Q} = 0$ , entonces

$$\delta W_{int} = -\delta U \quad (\text{B.12})$$

Se considera el caso en que un material de  $V$  y superficie  $S$ , es sometido a un desplazamiento infinitesimal  $\delta u_i$ , la variación del trabajo debido al vector tensión  $t_i = \sigma_{ij} n_j$  y a una fuerza volumétrica  $f_i$  se puede expresar como

$$\delta W_{ext} = \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS + \int_V f_i \delta u_i dV \quad (\text{B.13})$$

donde  $n_j$  son las componentes del vector normal saliente a la superficie  $S$ . Aplicando el Teorema de la Divergencia al primer término de la ec.(B.13) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) dV \\ &= \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) dV \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Reemplazando la ec.(B.14) en la ec.(B.13), se obtiene

$$\delta W_{ext} = \int_V \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) + \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \right) \delta u_i \right] dV \quad (\text{B.15})$$

Teniendo en cuenta el Principio de conservación de la Cantidad de Movimiento para un caso cuasiestático  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$ , la ec.(B.15) se convierte en

$$\delta W_{ext} = \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) dV \quad (\text{B.16})$$

$\frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i)$  es un tensor de segundo orden, como todo tensor de segundo orden puede descomponerse en una parte simétrica y otra antisimétrica, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta u_j) \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta u_j) \right] \quad (\text{B.17})$$

En la ec.(B.17) el primer término es la parte simétrica y el segundo término es la parte antisimétrica. Debido a que el producto de un tensor simétrico por otro antisimétrico es nulo, al reemplazar la ec.(B.17) en la ec.(B.16) se obtiene



$$\delta W_{ext} = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta u_j) \right] dV \quad (\text{B.18})$$

Se define al *tensor de deformaciones infinitesimales* como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{B.19})$$

Entonces<sup>1</sup>,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta u_j) \right] &= \frac{1}{2} \left[ \delta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \delta \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \delta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \delta \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Reemplazando la ec.(B.20) en la ec.(B.18) queda

$$\delta W_{ext} = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{B.21})$$

donde  $\delta \varepsilon_{ij}$  es la variación del tensor de deformación. Si se asume que  $\delta \tilde{Q} = 0$  durante el desplazamiento infinitesimal, la ec.(B.9) se puede escribir como

$$\delta W_{ext} = \delta U \quad (\text{B.22})$$

La energía interna por unidad de volumen (función de densidad de energía interna o función de densidad de energía de deformación) se denota por  $W$ , entonces la variación de la energía  $\delta U$  asociada al volumen material  $V$  se puede expresar como

$$\delta U = \int_V \delta W dV \quad (\text{B.23})$$

De las ecs.(B.21),(B.22) y (B.23) se obtiene

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \delta W dV \quad (\text{B.24})$$

---

<sup>1</sup>En [34] se demuestra que  $\delta[f(x) + g(x)] = \delta f(x) + \delta g(x)$  y  $\delta \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [\delta f(x)]$

Por lo tanto, la forma localizada de la ec.(B.24) queda

$$\delta W = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (\text{B.25})$$

Como la función la función de densidad de energía interna  $W$  depende de las componentes del tensor de deformaciones  $\varepsilon_{ij}$ , la variación  $\delta W$ , se puede expresar en términos de  $\delta \varepsilon_{ij}$  como

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} \quad (\text{B.26})$$

Comparando las ecs.(B.25) y (B.26), el tensor de tensiones viene dado por

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{B.27})$$

Esta última es la base de los modelos hiperelásticos. De forma análoga, se obtiene la ec.(3.11) suponiendo la existencia de una función de densidad de energía complementaria  $W_{co}(\sigma_{ij})$  que cumpla con la siguiente relación

$$W + W_{co} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (\text{B.28})$$

Derivando la ec.(B.28) con respecto a  $\sigma_{kl}$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{co}}{\partial \sigma_{kl}} &= -\frac{\partial W}{\partial \sigma_{kl}} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \varepsilon_{ij} \\ &= \left( \sigma_{ij} - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Usando la ec.(B.27), la ec.(B.29) se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{co}}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \varepsilon_{ij} \\ &= \delta_{ik} \delta_{jl} \varepsilon_{ij} \\ &= \varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Entonces la contrapartida de la ec.(B.27) es

$$\varepsilon_{kl} = \frac{\partial W_{co}}{\partial \sigma_{kl}} \quad (\text{B.31})$$

## B.3. Materiales elásticos estables

### B.3.1. Postulados de Drucker. Materiales estables

Sea un cuerpo continuo de volumen  $V$  y superficie  $A$ . Se denominan fuerzas de superficie y fuerzas volumétricas a  $\underline{\mathbf{t}}$  y  $\underline{\mathbf{f}}$  respectivamente. Los desplazamientos inducidos, tensiones y deformaciones son  $\underline{\mathbf{u}}$ ,  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  y  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Se asume que este conjunto de entes satisfacen las condiciones de equilibrio y de compatibilidad del problema en estudio. Se considera ahora un agente exterior, diferente al que causa los estados de tensión y deformación  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  y  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Este agente exterior aplica, sobre la superficie y volumen del cuerpo material, fuerzas de superficie y de volumen adicionales  $d\underline{\mathbf{t}}$  y  $d\underline{\mathbf{f}}$ , las cuales causan incrementos en los estados de tensión  $d\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ , deformación  $d\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  y de desplazamientos  $d\underline{\mathbf{u}}$ .

La definición de un material estable viene dada por los postulados de Drucker los cuales expresan lo siguiente:

1. El trabajo realizado por un agente externo durante la acción de las fuerzas adicionales sobre los cambios en los desplazamientos es positivo.
2. El trabajo realizado por un agente externo sobre un ciclo cerrado, que consiste en aplicar y eliminar el conjunto de fuerzas adicionales no es negativo.

Se observa que el trabajo realizado se refiere sólo al trabajo hecho por el conjunto de fuerzas adicionales  $d\underline{\mathbf{t}}$  y  $d\underline{\mathbf{f}}$  sobre el cambio de los desplazamientos  $d\underline{\mathbf{u}}$ . Matemáticamente, los dos postulados anteriores se pueden escribir como

$$\int_A d\underline{\mathbf{t}} \cdot d\underline{\mathbf{u}} dA + \int_V d\underline{\mathbf{f}} \cdot d\underline{\mathbf{u}} > 0 \quad (\text{B.32})$$

$$\oint_A d\underline{\mathbf{t}} \cdot d\underline{\mathbf{u}} dA + \oint_V d\underline{\mathbf{f}} \cdot d\underline{\mathbf{u}} dV \geq 0 \quad (\text{B.33})$$

Aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales en las ecs.(B.32) y (B.33) se obtiene la siguiente forma reducida de los postulados de Drucker

$$d\underline{\boldsymbol{\sigma}} : d\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0 \quad (\text{B.34})$$

$$\oint_{\boldsymbol{\varepsilon}} d\underline{\boldsymbol{\sigma}} : d\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \quad (\text{B.35})$$

En la Fig.B.1 se grafican esquemáticamente algunas relaciones  $\sigma - \epsilon$  para materiales elásticos. Para los casos (a), (b) y (c), se presenta una relación biunívoca entre las tensiones  $\sigma$  y las deformaciones  $\epsilon$ , por lo tanto si  $d\sigma > 0$  se cumple que  $d\epsilon > 0$  y entonces  $d\sigma : d\epsilon > 0$ . Esto último implica el primer postulado de Drucker se cumple y se considera que el material es estable en este sentido.

En el caso (d), la curva de deformación tiene una rama descendiente, en la cual a medida que la deformación se incrementa la tensión decrece. Sin embargo, por más que  $\sigma$  se encuentre determinado por un único valor de  $\epsilon$ , la inversa no es válida. En la rama descendente,  $d\sigma$  realiza trabajo negativo, es decir,  $d\sigma : d\epsilon < 0$ . Este comportamiento se denomina *ablandamiento por deformación* y es inestable en el sentido que viola el primer postulado de Drucker.

En el caso (e), la deformación decrece a medida que la tensión crece. Por lo tanto la tensión  $\sigma$  no puede determinarse con un único valor de las deformaciones. Como  $d\sigma : d\epsilon < 0$ , el material es inestable.

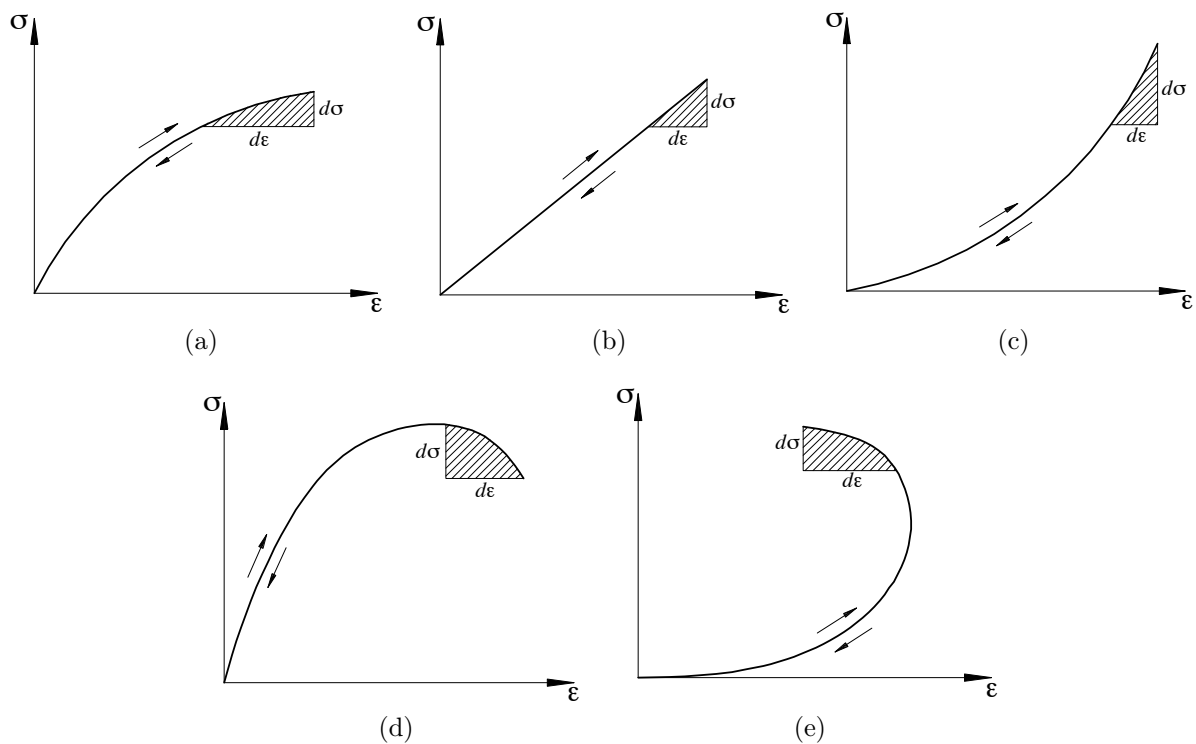


Figura B.1: Curvas  $\sigma - \epsilon$  para materiales elásticos estables e inestables. (a), (b) y (c) Materiales estables,  $d\sigma d\epsilon > 0$ . (d) y (e) Materiales inestables,  $d\sigma d\epsilon < 0$  [12].

### B.3.2. Existencia de $W$ y $W_{co}$

Todas las deformaciones que se produzcan sobre un material elástico son recuperables. Por lo tanto, la condición de estabilidad requiere que el trabajo realizado por el agente externo en un ciclo cerrado sea nulo, es decir

$$\oint_{\boldsymbol{\varepsilon}} d\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (\text{B.36})$$

donde  $d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0$ , suponiendo que  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$ , entonces

$$\oint_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (\text{B.37})$$

la cual se cumple sin importar el camino que se siga en el ciclo de carga. Esto último implica que el integrando en la ec.(B.37) debe ser un diferencial exacto, lo que sugiere en forma directa considerar que la función densidad de energía de deformación  $W$  es sólo función de el tensor de deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} dW \quad (\text{B.38})$$

debido a que  $dW = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : d\boldsymbol{\varepsilon}$ , se llega directamente a que  $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ , que es la expresión para general de la relación constitutiva hallada para los modelos hiperelásticos. Se puede llegar a la relación  $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W_{co}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ , haciendo  $d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0$  y suponiendo  $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{0}$  en la ec.(B.37).

Por lo tanto, se concluye que el segundo postulado de Drucker garantiza la existencia de las funciones de densidad de energía de deformación y energía complementaria.

# Apéndice C

## Anexos al Capítulo 4

### C.1. Procesos Termomecánicos irreversibles. Elastoplasticidad

Sea un cuerpo continuo de volumen  $V$  y superficie  $A$ . Se definen sobre el cuerpo, los campos escalares  $\theta$ ,  $u$ ,  $s$  y  $q$  que representan la temperatura, la energía interna, la entropía y la densidad de producción de calor. Suponiendo que la cinemática se corresponde con pequeñas deformaciones, se pueden escribir el primer y segundo principio de la termodinámica en su forma local (ver [16] [28] y [33]) como

1. Primer principio de la Termodinámica:

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underline{\nabla} \cdot \mathbf{f}_q + \rho q \quad (\text{C.1})$$

donde  $\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x^i} \mathbf{e}^i$  es el operador nabla,  $\mathbf{f}_q$  es el vector de flujo de calor sobre la superficie  $A$  y  $\rho$  es la densidad.

2. Segundo principio de la Termodinámica:

$$\rho \dot{s} + \underline{\nabla} \cdot \left( \frac{\mathbf{f}_q}{\theta} \right) - \frac{\rho q}{\theta} \geq 0 \quad (\text{C.2})$$

Reemplazando la ec.C.1 se llega a la *Desigualdad de Clausius-Duhem*, dada por

$$\rho \dot{s} + \underline{\nabla} \cdot \left( \frac{\mathbf{f}_q}{\theta} \right) - \frac{1}{\theta} (\rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underline{\nabla} \cdot \mathbf{f}_q) \geq 0 \quad (\text{C.3})$$

Se define a la *energía libre de Hemholtz* por unidad de masa a

$$\Psi = u - \theta s \quad (\text{C.4})$$

Teniendo en cuenta la identidad

$$\underline{\nabla} \cdot \left( \frac{\underline{\mathbf{f}}_q}{\theta} \right) = \frac{1}{\theta} \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{f}}_q - \frac{1}{\theta^2} \underline{\mathbf{f}}_q \cdot \underline{\nabla} \theta \quad (\text{C.5})$$

Llamando  $\underline{\mathbf{g}} = \underline{\nabla} \theta$  la ec.(C.6) se reescribe como

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left( \dot{\Psi} + \dot{\theta} s \right) - \frac{1}{\theta} \underline{\mathbf{f}}_q \cdot \underline{\mathbf{g}} \geq 0 \quad (\text{C.6})$$

Se asume una evolución isotérmica e isocórica para la evolución termodinámica del sistema, esto lleva a una formulación mecánica de la desigualdad de Clausius-Duhem la cual se escribe como

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \dot{\Psi} \geq 0 \quad (\text{C.7})$$

La desigualdad de Clausius-Duhem constituye una restricción que deben verificar las evoluciones de todos los modelos constitutivos. El estado energético del sistema en equilibrio termodinámico se encuentra caracterizado por un conjunto de variables denominadas *variables de estado*. La evolución de un sistema es *reversible* si existe una relación biunívoca entre el estado inicial y el estado final, en caso contrario la evolución del sistema es *irreversible*.

El *Postulado de estado local* estipula que en una evolución arbitraria, el estado energético del medio esta caracterizado por las mismas variables de estado que se fijan en el estado de equilibrio y es independiente de su velocidad de evolución. Teniendo en cuenta esto se puede escribir a la energía libre de Hemholtz como

$$\Psi = \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta}) \quad (\text{C.8})$$

donde  $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_k\}$  es el conjunto de variables internas, en general pueden ser entidades escalares o vectoriales, que definen el fenómeno disipativo.

La tasa de variación temporal de  $\Psi$  se escribe como

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\eta}} * \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (\text{C.9})$$

donde “\*” es el producto que corresponda entre los dos entes.

Se pueden presentar dos casos:

#### 1. Procesos no disipativos:

Estos procesos son evoluciones reversibles del sistema y se los denomina *procesos elás-*

*ticos*. Para estas evoluciones las variables internas permanecen constantes, es decir que  $\dot{\boldsymbol{\eta}} = 0$ . Debido a que los procesos disipativos se congelan, la ec.(C.7) se transforma en

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad (\text{C.10})$$

Es decir, se deriva la forma funcional de los modelos constitutivos hiperelásticos, si se toma  $\Psi = W$  como la densidad de energía de deformación, entonces

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{C.11})$$

## 2. Procesos disipativos:

Estos procesos son evoluciones irreversibles del sistema y se los denomina *procesos plásticos*. Se supone que se puede descomponer a la energía libre en una parte elástica que se denomina *función densidad de energía de deformación*  $W$  y en una parte plástica que se denomina *función densidad de energía latente*  $V$ . Se considera la cinemática impuesta por la hipótesis de pequeñas deformaciones, dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (\text{C.12})$$

Con esta relación, se toman como variables de estado a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ . Entonces  $\Psi = \tilde{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\eta})$ , se descompone como

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\alpha}) = W(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) + V(\boldsymbol{\eta}) = W(\boldsymbol{\varepsilon}_e) + V(\boldsymbol{\eta}) \quad (\text{C.13})$$

La desigualdad de Clausius-Duhem se puede escribir como

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} * \dot{\boldsymbol{\eta}} \geq 0 \quad (\text{C.14})$$

Teniendo en cuenta que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  y  $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_e}$ , se llega a

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} * \dot{\boldsymbol{\eta}} \geq 0 \quad (\text{C.15})$$

Para procesos irreversibles la desigualdad de Clausius-Duhem se satisface para más de un conjunto de variables de estado. Para que sea posible determinar una única dirección de flujo plástico se adiciona la *Condición de Máxima Disipación Plástica* la cual establece que de todos los estados posibles de equilibrio local plásticamente admisibles, el conjunto de variables de estado actuante es el que maximiza la disipación plástica, para los incrementos de las variables internas  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  y  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  dados. Siendo los incrementos  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  y  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$  arbitrarios pero constantes.



Se define a la *función de disipación plástica* como

$$\mathcal{D}^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\eta}}; \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\eta}} * \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (\text{C.16})$$

Matemáticamente, la Condición de Máxima Disipación Plástica viene dada por

$$\mathcal{D}^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\eta}}; \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \mathbf{MAX}_{(\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}) \in \mathbb{E}_\sigma} \{ \mathcal{D}^p(\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}; \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \} \quad (\text{C.17})$$

donde

$$\mathbb{E}_\sigma = \{ (\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^n \mid F_f(\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}) \leq 0 \} \quad (\text{C.18})$$

Por lo tanto, el problema consiste en maximizar  $\mathcal{D}^p$  sujeto a la restricción  $F_f = 0$  y a las condiciones complementarias de Khun-Tucker. Para solucionar el problema de extremos, se eliminan las condiciones intriduciendo el cono de multiplicadores de Lagrange dado por

$$\mathbb{K}^p = \{ \gamma \in \mathbb{L}^2(\mathcal{B}) \mid \gamma \geq 0 \} \quad (\text{C.19})$$

Se transforma la condición de maximización en una de minimización mediante  $-\mathcal{D}^p(\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}; \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p)$  y considerando el funcional Lagrangeano  $\mathcal{L} : \mathbb{S} \times \mathbb{K}^p \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\mathbb{S}$  es el subespacio de tensores de segundo orden simétricos) dado por

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}, \gamma) = \gamma F_f(\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}) - \mathcal{D}^p \quad (\text{C.20})$$

donde  $\gamma \geq 0$  es el multiplicador de Lagrange (observar que las condiciones de Khun-Tucker estan implícitas).

Entonces, se plantea la condición necesaria de extremo dada por  $\nabla \mathcal{L} = 0$  y se adopta  $(\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}) = (\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\eta}})$ , es decir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \gamma \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (\text{C.21})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\mathcal{H}} * \dot{\boldsymbol{\eta}} + \gamma \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\eta}} = 0 \quad (\text{C.22})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = F_f = 0 \quad (\text{C.23})$$

donde  $\mathcal{H}$  es el *Módulo de endurecimiento Tangente* y viene dado por

$$\mathcal{H} = \frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{\eta} * \partial \boldsymbol{\eta}} \quad (\text{C.24})$$

De las ecs.(C.21) y (C.22) e igualando el multiplicador de Lagrange al multiplicador plástico ( $\gamma = \dot{\lambda}$ ), se obtiene:

1. Regla de flujo generalizada

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \mathbf{k}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \quad (\text{C.25})$$

2. Ley de endurecimiento generalizada

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = -\dot{\lambda} \mathcal{H}^{-1} \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\eta}} = -\dot{\lambda} \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \quad (\text{C.26})$$

Se observa que la Condición de Máxima Disipación Plástica, deriva en una Regla de flujo y una Ley de endurecimiento asociadas. El carácter de flujo plástico asociado es válido particularmente para la plasticidad en materiales de composición cristalina y especialmente para los metales. Sin embargo, para materiales granulares las leyes de plasticidad asociada no se corresponden con las evidencias experimentales. Es por eso que la condición de máxima disipación plástica no se aplica para describir a estos materiales.

## C.2. Derivadas de la función de fluencia de von Mises

La función de fluencia de von Mises para el caso de plasticidad con endurecimiento combinado viene dada por

$$F_f(\mathbf{s}, \alpha, \mathbf{q}) = \|\mathbf{s} - \mathbf{q}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_Y^0 + K_c \alpha) \quad (\text{C.27})$$

### C.2.1. Derivada de la función de fluencia respecto al tensor de tensiones

La derivada de  $F_f$  respecto de  $\boldsymbol{\sigma}$  viene dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\|\mathbf{s} - \mathbf{q}\|) \\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \sqrt{(\mathbf{s} - \mathbf{q}) : (\mathbf{s} - \mathbf{q})} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{s} - \mathbf{q}\|} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [(\mathbf{s} - \mathbf{q}) : (\mathbf{s} - \mathbf{q})]
\end{aligned} \tag{C.28}$$

Si se desarrolla  $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [(\mathbf{s} - \mathbf{q}) : (\mathbf{s} - \mathbf{q})]$  en componentes se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} [(s_{ij} - q_{ij}) (s_{ij} - q_{ij})] &= \frac{\partial (s_{ij} - q_{ij})}{\partial \sigma_{kl}} (s_{ij} - q_{ij}) + (s_{ij} - q_{ij}) \frac{\partial (s_{ij} - q_{ij})}{\partial \sigma_{kl}} \\
&= 2 (s_{ij} - q_{ij}) \frac{\partial (s_{ij} - q_{ij})}{\partial \sigma_{kl}} \\
&= 2 (s_{ij} - q_{ij}) \left( \frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial q_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \right) \\
&= 2 (s_{ij} - q_{ij}) \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial p}{\partial \sigma_{kl}} \delta_{ij} \right) \\
&= 2 (s_{ij} - q_{ij}) \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right)
\end{aligned} \tag{C.29}$$

donde  $\mathbf{I}^{dev} = \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \otimes \underline{\mathbf{e}}^k \otimes \underline{\mathbf{e}}^l$ , entonces

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} [(\mathbf{s} - \mathbf{q}) : (\mathbf{s} - \mathbf{q})] = 2 (\mathbf{s} - \mathbf{q}) : \mathbf{I}^{dev} = 2 (\mathbf{s} - \mathbf{q}) \tag{C.30}$$

Reemplazando la ec.(C.30) en la ec.(C.28) queda

$$\frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{s} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{s} - \mathbf{q}\|} = \mathbf{n} \tag{C.31}$$

### C.2.2. Derivada de la función de fluencia respecto al tensor de back stress $\mathbf{q}$

La derivada de la función de fluencia respecto al tensor de back stress viene dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_f}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\|\mathbf{s} - \mathbf{q}\|) \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \sqrt{(\mathbf{s} - \mathbf{q}) : (\mathbf{s} - \mathbf{q})} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{s} - \mathbf{q}\|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [(\mathbf{s} - \mathbf{q}) : (\mathbf{s} - \mathbf{q})]
\end{aligned} \tag{C.32}$$

Si se desarrolla  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [(\mathbf{s} - \mathbf{q}) : (\mathbf{s} - \mathbf{q})]$  en componentes se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_{kl}} [(s_{ij} - q_{ij}) (s_{ij} - q_{ij})] &= \frac{\partial (s_{ij} - q_{ij})}{\partial q_{kl}} (s_{ij} - q_{ij}) + (s_{ij} - q_{ij}) \frac{\partial (s_{ij} - q_{ij})}{\partial q_{kl}} \\
&= 2 (s_{ij} - q_{ij}) \frac{\partial (s_{ij} - q_{ij})}{\partial q_{kl}} \\
&= -2 (s_{ij} - q_{ij}) \delta_{ik} \delta_{jl} \\
&= -2 (s_{kl} - q_{kl})
\end{aligned} \tag{C.33}$$

Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [(\mathbf{s} - \mathbf{q}) : (\mathbf{s} - \mathbf{q})] = -2 (\mathbf{s} - \mathbf{q}) \tag{C.34}$$

Reemplazando en la ec.(C.32) y (C.34) queda

$$\frac{\partial F_f}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\mathbf{s} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{s} - \mathbf{q}\|} = -\mathbf{n} \tag{C.35}$$

### C.2.3. Derivada de la función de fluencia respecto de la deformación plástica equivalente $\alpha$

La derivada de la función de fluencia respecto a la deformación plástica equivalente  $\alpha$  para un modelo elastoplástico con endurecimiento combinado viene dada por

$$\frac{\partial F_f}{\partial \alpha} = -\sqrt{\frac{2}{3}} K_c \tag{C.36}$$

### C.3. Operador elastoplástico tangente algorítmico. Plasticidad asociada

En este Anexo se halla el operador elastoplástico algorítmico para los casos vistos en la Sección (4.3). Este operador es necesario para obtener convergencia cuadrática en el esquema iterativo de Newton-Raphson planteado para resolver el sistema no lineal generado por el Método de los Elementos Finitos. Se puede observar que el multiplicador plástico algorítmico  $\Delta\lambda$  es una función implícita de  ${}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$  (o  ${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}$ ), entonces  ${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}$  también es una función implícita de  ${}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ . El operador elastoplástico tangente algorítmico se define de la siguiente manera [33]

$$\overset{\Delta}{\mathbf{C}}_{ep} = \frac{\partial {}^{n+1}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} \quad (\text{C.37})$$

donde  ${}^{n+1}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$  es la función implícita definida por el algoritmo de retorno utilizado a la cual se la denomina *función constitutiva incremental algorítmica*.

#### C.3.1. Plasticidad Perfecta

##### C.3.1.1. Función constitutiva incremental algorítmica

Si se descompone al tensor de tensiones actualizado, en su componente deviatorica y volumétrica, se tiene

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = {}^{n+1}\mathbf{s} + {}^{n+1}p \mathbf{1} \quad (\text{C.38})$$

donde  ${}^{n+1}p = {}^{n+1}\widehat{p}$ . La deformación elástica se puede expresar como

$${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_e = [\mathbf{C}_e]^{-1} : {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2G} {}^{n+1}\mathbf{s} + \frac{1}{3} {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^v \quad (\text{C.39})$$

La componente deviatorica actual del tensor de tensiones, viene dada por

$${}^{n+1}\mathbf{s} = \left( 1 - \frac{2G \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\|} \right) {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} \quad (\text{C.40})$$

Reemplazando la ec.(C.40) en la ec.(C.38), se tiene

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \left( 1 - \frac{2G \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\|} \right) {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} + {}^{n+1}p \mathbf{1} \quad (\text{C.41})$$

Como

$${}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} = 2G {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d \quad (\text{C.42})$$

$${}^{n+1}\widehat{p} = K {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^v \quad (\text{C.43})$$

Por lo tanto, la ec.(C.41) se puede escribir como

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} &= \left(1 - \frac{2G \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\|}\right) 2G {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d + K {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^v \mathbf{1} \\ &= K {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^v \mathbf{1} + 2G {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d - \frac{4G^2 \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\|} {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

Como  ${}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d = \mathbf{I}^{dev} : {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$  y  $\mathbf{I}^{vol} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ , entonces  ${}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^v = \mathbf{I}^{vol} : {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ ; tenemos que

$${}^{n+1}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \left[ \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\|} \mathbf{I}^{dev} \right] : {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (\text{C.45})$$

### C.3.1.2. Operador elastoplástico tangente algorítmico

Según la definición dada por la ec.(C.37), se debe calcular  $\frac{\partial {}^{n+1}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e}$ . Entonces,

$$\frac{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} = \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\|} \mathbf{I}^{dev} - \frac{4G^2}{\|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\|} {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d \otimes \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} + \frac{4G^2 \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\|^2} {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d \otimes \frac{\partial \|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\|}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} \quad (\text{C.46})$$

Considerando la expresión para el multiplicador plástico algorítmico dada por

$$\Delta\lambda = \frac{{}^{n+1}\widehat{F}_f}{2G} \quad (\text{C.47})$$

se puede calcular

$$\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} = \frac{1}{2G} \frac{\partial \|{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}\|}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} \quad (\text{C.48})$$

donde,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|}{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1}} &= \frac{\partial \left\| 2G \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1,d} \right\|}{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1}} = 2G \frac{\partial \left\| \mathbf{I}^{dev} : \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1,d} \right\|}{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1}} \\
&= 2G \mathbf{I}^{dev} : \frac{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1,d}}{\left\| \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1,d} \right\|} = 2G \frac{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1,d}}{\left\| \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1,d} \right\|}
\end{aligned} \tag{C.49}$$

Como

$$\mathbf{m}^{n+1} = \frac{\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}}{\|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|} = \frac{2G \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1,d}}{\left\| 2G \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1,d} \right\|} = \frac{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1,d}}{\left\| \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1,d} \right\|} \tag{C.50}$$

Entonces, se tiene

$$\frac{\partial \|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|}{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1}} = 2G \mathbf{m}^{n+1} \tag{C.51}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1}} = \mathbf{m}^{n+1} \tag{C.52}$$

Entonces reemplazando las ecs.(C.52) y (C.51) en la ec.(C.46), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1}} &= \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta \lambda}{\|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|} \mathbf{I}^{dev} - \frac{4G^2}{\|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1,e} \otimes \mathbf{m}^{n+1} + \frac{4G^2 \Delta \lambda}{\|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|^2} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{n+1,e} \otimes 2G \mathbf{m}^{n+1} \\
&= \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta \lambda}{\|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|} \mathbf{I}^{dev} - 2G \frac{\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}}{\|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|} \otimes \mathbf{m}^{n+1} + \frac{4G^2 \Delta \lambda}{\|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|} \frac{\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}}{\|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|} \otimes \mathbf{m}^{n+1} \\
&= \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta \lambda}{\|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|} \mathbf{I}^{dev} - 2G \mathbf{m}^{n+1} \otimes \mathbf{m}^{n+1} + \frac{4G^2 \Delta \lambda}{\|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|} \mathbf{m}^{n+1} \otimes \mathbf{m}^{n+1}
\end{aligned} \tag{C.53}$$

Por lo tanto, el operador elastoplástico tangente algorítmico es

$$\mathbf{C}_{ep}^{\Delta} = \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta \lambda}{\|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|} \left[ \mathbf{I}^{dev} + \left( 1 - \frac{\|\widehat{\mathbf{s}}^{n+1}\|}{2G \Delta \lambda} \right) \mathbf{m}^{n+1} \otimes \mathbf{m}^{n+1} \right] \tag{C.54}$$

## C.3.2. Plasticidad con endurecimiento combinado

### C.3.2.1. Función constitutiva incremental algorítmica

El tensor de tensiones relativo se puede expresar como

$${}^{n+1}\boldsymbol{\xi} = {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \left( 2G + \frac{2}{3}H \right) \right] \quad (\text{C.55})$$

Reemplazando las definiciones de  ${}^{n+1}\boldsymbol{\xi}$ ,  ${}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}$  y  ${}^{n+1}\mathbf{q}$  en la ec.(C.55) y despejando  ${}^{n+1}\mathbf{s}$  se tiene

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\mathbf{s} &= {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \left( 2G + \frac{2}{3}H \right) \right] - {}^n\mathbf{q} \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \left( 2G + \frac{2}{3}H \right) \right] + \\ & {}^n\mathbf{q} + \frac{2}{3}\Delta\lambda H \frac{{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

El tensor de tensiones relativo de prueba  ${}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}$  viene dado por

$${}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} = {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} - {}^n\mathbf{q} \quad (\text{C.57})$$

Reemplazando la ec.(C.57) en la ec.(C.56) se obtiene

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\mathbf{s} &= {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} \left[ 1 - \frac{\Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \left( 2G + \frac{2}{3}H \right) \right] + {}^n\mathbf{q} \frac{\Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \left( 2G + \frac{2}{3}H \right) + \\ & \frac{2}{3}\Delta\lambda H \frac{{}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} - \frac{2}{3}\Delta\lambda H \frac{{}^{n+1}\mathbf{q}}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

Haciendo algo de álgebra, la ec.(C.58) queda

$${}^{n+1}\mathbf{s} = {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} - 2G\Delta\lambda \frac{{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \quad (\text{C.59})$$

El tensor de tensiones actualizado viene dado por la ec.(C.38), si en la misma se reemplaza la ec.(C.59), se obtiene

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} - 2G\Delta\lambda \frac{{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} + {}^{n+1}p\mathbf{1} \quad (\text{C.60})$$

Teniendo en cuenta la ec.(C.57)



$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \left( 1 - \frac{2G \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \right) {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} + {}^{n+1}\widehat{p} \mathbf{1} - {}^n\mathbf{q} \frac{2G\Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \quad (\text{C.61})$$

Reemplazando las expresiones para  ${}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}}$  y  ${}^{n+1}\widehat{p}$  dadas por las ecs.(C.42) y (C.43) en la ec.(C.61) se tiene que

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \left( 1 - \frac{2G \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \right) 2G {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d + K {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^v \mathbf{1} - {}^n\mathbf{q} \frac{2G\Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \quad (\text{C.62})$$

Entonces, la ecuación constitutiva incremental queda

$${}^{n+1}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \left[ \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \mathbf{I}^{dev} \right] : {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - {}^n\mathbf{q} \frac{2G\Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \quad (\text{C.63})$$

### C.3.2.2. Operador elastoplástico tangente algorítmico

Según la definición dada por la ec.(C.37), se debe calcular  $\frac{\partial {}^{n+1}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} &= \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \mathbf{I}^{dev} - \frac{4G^2}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d \otimes \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} + \frac{4G^2 \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|^2} {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d \otimes \frac{\partial \|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} - \\ & {}^n\mathbf{q} \frac{2G}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \otimes \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} + {}^n\mathbf{q} \frac{2G \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|^2} \otimes \frac{\partial \|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

Haciendo algo de álgebra sobre la ec.(C.64) se tiene

$$\frac{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} = \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \mathbf{I}^{dev} - 2G \frac{{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \otimes \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} + \frac{2G}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \Delta\lambda \frac{{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \otimes \frac{\partial \|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} \quad (\text{C.65})$$

Como  ${}^{n+1}\mathbf{m} = \frac{{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|}$ , entonces

$$\frac{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} = \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta\lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \mathbf{I}^{dev} - 2G {}^{n+1}\mathbf{m} \otimes \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} + \frac{2G}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \Delta\lambda {}^{n+1}\mathbf{m} \otimes \frac{\partial \|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} \quad (\text{C.66})$$

Teniendo en cuenta la ec.(4.156),

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} = \frac{1}{2G \left(1 + \frac{H + K_c}{3G}\right)} \frac{\partial \left\| {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\|}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} \quad (\text{C.67})$$

Dado que  ${}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} = {}^{n+1}\widehat{\mathbf{s}} - {}^n\mathbf{q} = 2G {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - {}^n\mathbf{q}$ , se escribe a  $\left\| {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\|$  como

$$\left\| {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\| = \sqrt{{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} : {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}} = \left[ 4G^2 {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d : {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d - 2G {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d : {}^n\mathbf{q} + {}^n\mathbf{q} : {}^n\mathbf{q} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.68})$$

Entonces, se calcula

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left\| {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\|}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} &= \frac{1}{\left\| {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\|} \left( 4G^2 {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^d - 2G {}^n\mathbf{q} \right) = \frac{2G}{\left\| {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\|} (2G {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - {}^n\mathbf{q}) \\ &= 2G \frac{{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}}{\left\| {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\|} = 2G {}^{n+1}\mathbf{m} \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

Reemplazando la ec.(C.69) en la ec.(C.67), se obtiene

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} = \frac{3G}{3G + H + K_c} {}^{n+1}\mathbf{m} \quad (\text{C.70})$$

Por lo tanto el operador elastoplástico tangente algorítmico se expresa de la siguiente manera

$${}^{n+1}\overset{\Delta}{\mathbf{C}}_{ep} = \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta \lambda}{\left\| {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\|} \left\{ \mathbf{I}^{dev} + \left[ 1 - \frac{3 \left\| {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\|}{2\Delta \lambda (3G + H + K_c)} \right] {}^{n+1}\mathbf{m} \otimes {}^{n+1}\mathbf{m} \right\} \quad (\text{C.71})$$

### C.3.3. Plasticidad con endurecimiento isotrópico hiperbólico y endurecimiento cinemático.

#### C.3.3.1. Función constitutiva incremental algorítmica

La función constitutiva incremental algorítmica, tiene la misma forma matemática que la hallada en Anexo C.3.2, la cual se transcribe a continuación

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \left[ \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta \lambda}{\left\| {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\|} \mathbf{I}^{dev} \right] : {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - {}^n\mathbf{q} \frac{2G \Delta \lambda}{\left\| {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}} \right\|} \quad (\text{C.72})$$

### C.3.3.2. Operador elastoplástico tangente algorítmico

Según la definición dada por la ec.(C.37), se debe calcular  $\frac{\partial^{n+1}\tilde{\sigma}}{\partial^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e}$ .

En forma análoga a lo expuesto en el Anexo C.3.2, haciendo algo de álgebra se obtiene

$$\frac{\partial^{n+1}\boldsymbol{\sigma}}{\partial^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} = \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta\lambda}{\left\|^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\right\|} \mathbf{I}^{dev} - 2G^{n+1}\mathbf{m} \otimes \frac{\partial\Delta\lambda}{\partial^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} + \frac{2G}{\left\|^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\right\|} \Delta\lambda^{n+1}\mathbf{m} \otimes \frac{\partial\left\|^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\right\|}{\partial^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} \quad (\text{C.73})$$

Debido a que la función de fluencia viene dada por:

$$\left\|^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\right\| - \sqrt{\frac{2}{3}}K^{(n+1)\alpha} - \left(2G + \frac{2}{3}H\right)\Delta\lambda = 0 \quad (\text{C.74})$$

Entonces,

$$\frac{\partial\left\|^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\right\|}{\partial^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} - \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial K^{(n+1)\alpha}}{\partial^{n+1}\alpha} \frac{\partial^{n+1}\alpha}{\partial^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} - \left(2G + \frac{2}{3}H\right)\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} = 0 \quad (\text{C.75})$$

dado que

$$K^{(n+1)\alpha} = \sigma_Y^0 + \frac{n+1\alpha}{\frac{1}{E} + \frac{\sigma_Y^\infty}{\sigma_Y^0}} \quad (\text{C.76})$$

Entonces

$$\frac{\partial K^{(n+1)\alpha}}{\partial^{n+1}\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{\sigma_Y^\infty}{\sigma_Y^0}} - \frac{n+1\alpha}{\sigma_Y^\infty \left(\frac{1}{E} + \frac{\sigma_Y^\infty}{\sigma_Y^0}\right)^2} \quad (\text{C.77})$$

como  $^{n+1}\alpha = {}^n\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\lambda$ , entonces

$$\frac{\partial^{n+1}\alpha}{\partial^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} = \frac{2}{3} \frac{\partial\Delta\lambda}{\partial^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} \quad (\text{C.78})$$

Reemplazando las ecs.(C.77) y (C.78) en la ec.(C.75), se obtiene

$$2G^{n+1}\mathbf{m} - \left[\frac{2}{3} \frac{\partial K^{(n+1)\alpha}}{\partial^{n+1}\alpha} + 2G + \frac{2}{3}H\right] \frac{\partial\Delta\lambda}{\partial^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} = 0 \quad (\text{C.79})$$

despejando  $\frac{\partial\Delta\lambda}{\partial^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e}$ , se tiene que

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial {}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_e} = \frac{3G {}^{n+1}\mathbf{m}}{\left[ 3G + \frac{\partial K({}^{n+1}\alpha)}{\partial {}^{n+1}\alpha} + H \right]} \quad (\text{C.80})$$

Entonces el operador elastoplástico tangente algorítmico para este caso se escribe como

$${}^{n+1}\overset{\Delta}{\mathbf{C}}_{ep} = \mathbf{C}_e - \frac{4G^2 \Delta \lambda}{\|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|} \left\{ \mathbf{I}^{dev} + \left[ 1 - \frac{3 \|{}^{n+1}\widehat{\boldsymbol{\xi}}\|}{2 \Delta \lambda \left( 3G + \frac{\partial K({}^{n+1}\alpha)}{\partial {}^{n+1}\alpha} + H \right)} \right] {}^{n+1}\mathbf{m} \otimes {}^{n+1}\mathbf{m} \right\} \quad (\text{C.81})$$

# Apéndice D

## Anexos al Capítulo 5

### D.1. Derivadas primeras de la función de fluencia de Matsuoka-Nakai

#### D.1.1. Derivada de la función de fluencia respecto al tensor de tensiones efectivas

La función de fluencia de Matsuoka-Nakai se escribe en función de  $\mu_f$  y de  $\mathbf{r}$  como:

$$F_f = (\mu_f + 6)J_{2r} - (\mu_f + 9)J_{3r} - \mu_f$$

Lo que se se busca es :

$$\frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial F_f}{\partial J_{2r}} \frac{\partial J_{2r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_f}{\partial J_{3r}} \frac{\partial J_{3r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{D.1})$$

Debido que la función de fluencia se encuentra expresada en función de  $J_{2r} = J_2(\mathbf{r})$ ,  $J_{3r} = J_3(\mathbf{r})$ , se debe desarrollar cada derivada.

La derivada de  $F_f$  respecto a  $J_{2r}$ , se expresa como

$$\frac{\partial F_f}{\partial J_{2r}} = \mu + 6 \quad (\text{D.2})$$

Ahora se desarrolla la derivada de  $J_{2r}$  respecto de  $\sigma_{kl}$  y se obtiene

$$\frac{\partial J_{2r}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left( \frac{1}{2} r_{ij} r_{ij} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (r_{ij} r_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} r_{ij} + \frac{\partial r_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} r_{ij} \right) = \frac{\partial r_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} r_{ij} \quad (\text{D.3})$$

Recordando que  $r_{ij} = \frac{s_{ij}}{p}$  y reemplazando en la ec.(D.3)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{2r}}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left( \frac{s_{ij}}{p} \right) \frac{s_{ij}}{p} \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left( \frac{\sigma_{ij}}{p} - \delta_{ij} \right) \left( \frac{\sigma_{ij}}{p} - \delta_{ij} \right)
\end{aligned} \tag{D.4}$$

Como

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{1}{3} \delta_{kl} \tag{D.5}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{2r}}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{1}{p^2} \left( \delta_{ik} \delta_{lj} - \frac{1}{3p} \sigma_{ij} \delta_{kl} \right) (\sigma_{ij} - p \delta_{ij}) \\
&= \frac{1}{p^2} \left[ \delta_{ik} \delta_{lj} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij}) - \frac{1}{3p} \sigma_{ij} \delta_{kl} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij}) \right] \\
&= \frac{1}{p^2} \left( \delta_{ik} \delta_{lj} \sigma_{ij} - p \delta_{ik} \delta_{lj} \delta_{ij} - \frac{1}{3p} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \delta_{kl} \right) \\
&= \frac{1}{p^2} \left[ s_{kl} + p \delta_{kl} - \frac{1}{3p} (s_{ij} + p \delta_{ij}) (s_{ij} + p \delta_{ij}) \delta_{kl} \right] \\
&= \frac{1}{p^2} \left[ s_{kl} + p \delta_{kl} - \frac{1}{3p} (s_{ij} s_{ij} + 3p^2) \delta_{kl} \right] \\
&= \frac{1}{p^2} \left[ s_{kl} + p \delta_{kl} - \frac{1}{3p} s_{ij} s_{ij} \delta_{kl} - p \delta_{kl} \right] \\
&= \frac{1}{p} \left( r_{kl} - \frac{2}{3} J_{2r} \delta_{kl} \right)
\end{aligned} \tag{D.6}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial J_{2r}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{1}{p} \left( r_{kl} - \frac{2}{3} J_{2r} \delta_{kl} \right) \tag{D.7}$$

La derivada de  $F_f$  respecto de  $J_{3r}$  vale

$$\frac{\partial F_f}{\partial J_{3r}} = -(\mu + 9) \tag{D.8}$$

Por último, se desarrolla la derivada de  $J_{3r}$  respecto de  $\sigma_{kl}$  y se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{3r}}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left[ \frac{1}{3p^3} (s_{ij} s_{jm}) s_{im} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left[ \frac{1}{3p^3} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij}) (\sigma_{jm} - p \delta_{jm}) (\sigma_{im} - p \delta_{im}) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left[ \frac{1}{3p^3} (\sigma_{ij} \sigma_{jm} - p \sigma_{ij} \delta_{jm} - p \sigma_{jm} \delta_{ij} + p^2 \delta_{ij} \delta_{jm}) (\sigma_{im} - p \delta_{im}) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left[ \frac{1}{3p^3} (\sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im} - p \sigma_{ij} \delta_{jm} \sigma_{im} - p \sigma_{jm} \delta_{ij} \sigma_{im} + \right. \\
&\quad \left. p^2 \delta_{ij} \delta_{jm} \sigma_{im} - p \sigma_{ij} \sigma_{jm} \delta_{im} + p^2 \sigma_{ij} \delta_{jm} \delta_{im} + p^2 \sigma_{jm} \delta_{ij} \delta_{im} - p^3 \delta_{ij} \delta_{jm} \delta_{im}) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left[ \frac{\sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im}}{3p^3} - \frac{1}{p^2} \sigma_{im} \sigma_{im} + \frac{1}{3p} \overbrace{\sigma_{jm} \delta_{jm}}^{3p} + \frac{1}{3p} \overbrace{\sigma_{mj} \delta_{jm}}^{3p} + \frac{1}{3p} \overbrace{\sigma_{im} \delta_{im}}^{3p} - \frac{1}{3} \overbrace{\delta_{ii}}^3 \right] \\
&= \underbrace{\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left( \frac{\sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im}}{3p^3} \right)}_{(\star_1)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left( \frac{1}{p^2} \sigma_{im} \sigma_{im} \right)}_{(\star_3)} \tag{D.9}
\end{aligned}$$

Desarrollando  $(\star_1)$ , se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left( \frac{\sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im}}{3p^3} \right) &= \frac{-3}{3p^4} \frac{1}{3} \delta_{kl} \sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im} + \frac{1}{3p^3} \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (\sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im}) \\
&= -\frac{1}{3p^4} \delta_{kl} \sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im} + \frac{1}{3p^3} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (\sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im})}_{(\star_2)} \tag{D.10}
\end{aligned}$$

Desarrollando  $(\star_2)$ , se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (\sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im}) &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{jm} \sigma_{im} + \sigma_{ij} \frac{\partial \sigma_{jm}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{im} + \sigma_{ij} \sigma_{jm} \frac{\partial \sigma_{im}}{\partial \sigma_{kl}} \\
&= \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{jl} \sigma_{jm} \sigma_{im} + \sigma_{ij} \delta_{jk} \delta_{ml} \sigma_{im} + \sigma_{ij} \sigma_{jm} \delta_{ik} \delta_{ml} \\
&= \sigma_{lm} \sigma_{km} + \sigma_{ik} \sigma_{il} + \sigma_{kj} \sigma_{jl} \\
&= 3\sigma_{lm} \sigma_{km} \tag{D.11}
\end{aligned}$$

Entonces, el término  $(\star_1)$  queda

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left( \frac{\sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im}}{3p^3} \right) = -\frac{1}{3p^4} \delta_{kl} \sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im} + \frac{1}{p^3} \sigma_{lm} \sigma_{km} \tag{D.12}$$

Ahora se desarrolla el término  $(\star_3)$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left( \frac{1}{p^2} \sigma_{im} \sigma_{im} \right) = -\frac{2}{3p^3} \delta_{kl} \sigma_{im} \sigma_{im} + \frac{1}{p^2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (\sigma_{im} \sigma_{im})}_{(\star_4)} \quad (\text{D.13})$$

Desarrollando el término  $(\star_4)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (\sigma_{im} \sigma_{im}) &= \frac{\partial \sigma_{im}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{im} + \frac{\partial \sigma_{im}}{\partial \sigma_{kl}} \sigma_{im} \\ &= \delta_{ik} \delta_{ml} \sigma_{im} + \delta_{ik} \delta_{ml} \sigma_{im} \\ &= 2 \sigma_{kl} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Por lo tanto el termino  $(\star_3)$  queda

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left( \frac{1}{p^2} \sigma_{im} \sigma_{im} \right) = -\frac{2}{3p^3} \delta_{kl} \sigma_{im} \sigma_{im} + \frac{2}{p^2} \sigma_{kl} \quad (\text{D.15})$$

Reemplazando las ecs.(D.12) y (D.15) en la ec.(D.9), se obtiene

$$\frac{\partial J_{3r}}{\partial \sigma_{kl}} = \underbrace{-\frac{1}{3p^4} \delta_{kl} \sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im}}_{(\star_5)} + \underbrace{\frac{1}{p^3} \sigma_{lm} \sigma_{km}}_{(\star_6)} + \underbrace{\frac{2}{3p^3} \delta_{kl} \sigma_{im} \sigma_{im}}_{(\star_7)} - \underbrace{\frac{2}{p^2} \sigma_{kl}}_{(\star_8)} \quad (\text{D.16})$$

Haciendo algo de álgebra sobre  $(\star_5)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3p^4} \delta_{kl} \sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im} &= -\frac{1}{3p^4} \delta_{kl} (s_{ij} + p \delta_{ij}) (s_{jm} + p \delta_{jm}) (s_{im} + p \delta_{im}) \\ &= -\frac{1}{3p^4} (s_{ij} s_{jm} + p s_{ij} \delta_{jm} + p s_{jm} \delta_{ij} + p^2 \delta_{im}) (s_{im} + p \delta_{im}) \delta_{kl} \\ &= -\frac{1}{3p^4} (s_{ij} s_{jm} s_{im} + p s_{ij} \delta_{jm} s_{im} + p s_{jm} \delta_{ij} s_{im} + p^2 \delta_{im} s_{im} + p s_{ij} s_{jm} \delta_{im} + \\ &\quad p^2 s_{ij} \delta_{jm} \delta_{im} + p^2 s_{jm} \delta_{ij} \delta_{im} + p^3 \delta_{im} \delta_{im}) \delta_{kl} \\ &= -\frac{1}{p} \left( \frac{1}{3p^3} s_{ij} s_{jm} s_{im} + \frac{1}{3p^2} s_{ij} s_{ij} + \frac{1}{3p^2} s_{jm} s_{jm} + \frac{1}{3p^2} s_{ij} s_{ij} + 1 \right) \delta_{kl} \\ &= -\frac{1}{p} \left( \frac{1}{3p^3} s_{ij} s_{jm} s_{im} + s_{ij} s_{ij} + 1 \right) \delta_{kl} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Como

$$s_{ij} s_{ij} = r^2 \quad (\text{D.18})$$



y

$$\frac{1}{3p^3} s_{ij} s_{jm} s_{im} = J_{3r} \quad (\text{D.19})$$

La ec.(D.17) se escribe como

$$-\frac{1}{3p^4} \delta_{kl} \sigma_{ij} \sigma_{jm} \sigma_{im} = -\frac{1}{p} (J_{3r} + r^2 + 1) \delta_{kl} \quad (\text{D.20})$$

Desarrollando el término ( $\star_6$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^3} \sigma_{lm} \sigma_{km} &= \frac{1}{p^3} (s_{lm} + p \delta_{lm}) (s_{km} + p \delta_{km}) \\ &= \frac{1}{p^3} (s_{lm} s_{km} + p s_{lk} + p s_{kl} + p^2 \delta_{kl}) \\ &= \frac{1}{p} (r_{lm} r_{km} + r_{lk} + r_{lk} + \delta_{kl}) \\ &= \frac{1}{p} (r_{lm} r_{km} + 2r_{lk} + \delta_{kl}) \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

Entonces,

$$\frac{1}{p^3} \sigma_{lm} \sigma_{km} = \frac{1}{p} (r_{lm} r_{km} + 2r_{lk} + \delta_{kl}) \quad (\text{D.22})$$

Ahora de desarrolla el término ( $\star_7$ )

$$\begin{aligned} \frac{2}{3p^3} \delta_{kl} \sigma_{im} \sigma_{im} &= \frac{2}{3p^3} \delta_{kl} (s_{im} + p \delta_{im}) (s_{im} + p \delta_{im}) \\ &= \frac{2}{3p^3} \delta_{kl} (s_{im} s_{im} + p^2 \delta_{ii}) \\ &= \frac{2}{3p^3} s_{im} s_{im} \delta_{kl} + \frac{2}{3p} 3 \delta_{kl} \\ &= \frac{1}{p} \left( \frac{2}{3} r^2 \delta_{kl} + 2\delta_{kl} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Entonces,

$$\frac{2}{3p^3} \delta_{kl} \sigma_{im} \sigma_{im} = \frac{1}{p} \left( \frac{2}{3} r^2 \delta_{kl} + 2\delta_{kl} \right) \quad (\text{D.24})$$

El término  $(\star_8)$  viene dado por

$$\frac{2}{p^2} (s_{kl} + p \delta_{kl}) = -\frac{2}{p} r_{kl} - \frac{2}{p} \delta_{kl} \quad (\text{D.25})$$

Ahora reemplazamos las ecs.(D.20), (D.22), (D.24) y (D.25) en la ec.(D.16), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{3r}}{\partial \sigma_{kl}} &= -\frac{1}{p} (J_{3r} + r^2 + 1) \delta_{kl} + \frac{1}{p} (r_{lm} r_{km} + 2 r_{lk} + \delta_{kl}) + \frac{1}{p} \left( \frac{2}{3} r^2 \delta_{kl} + \frac{2}{p} \delta_{kl} \right) - \frac{2}{p} r_{kl} - \frac{2}{p} \delta_{kl} \\ &= -\frac{1}{p} J_{3r} \delta_{kl} - \frac{r^2}{p} \delta_{kl} - \frac{1}{p} \delta_{kl} + \frac{1}{p} r_{lm} r_{km} + \frac{2}{p} r_{kl} + \frac{1}{p} \delta_{kl} + \frac{1}{p} \frac{2}{3} r^2 \delta_{kl} + \frac{2}{p} \delta_{kl} - \frac{2}{p} r_{kl} - \frac{2}{p} \delta_{kl} \\ &= -\frac{1}{p} J_{3r} \delta_{kl} - \frac{1}{p} \frac{r^2}{3} \delta_{kl} + \frac{1}{p} r_{lm} r_{km} \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

Entonces,

$$\frac{\partial J_{3r}}{\partial \sigma_{kl}} = -\frac{1}{p} J_{3r} \delta_{kl} - \frac{1}{p} \frac{r^2}{3} \delta_{kl} + \frac{1}{p} r_{lm} r_{km} \quad (\text{D.27})$$

Ahora reemplazando las ecs.(D.2), (D.38), (D.8) y (D.39) en la ec.(D.1), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_f}{\partial \sigma_{kl}} &= (\mu_f + 6) \frac{1}{p} \left( r_{kl} - \frac{r^2}{3} \delta_{kl} \right) - (\mu_f + 9) \left[ \frac{1}{p} \left( -J_{3r} \delta_{kl} - \frac{r^2}{3} \delta_{kl} + \frac{1}{p} r_{lm} r_{km} \right) \right] \\ &= \frac{1}{p} \left[ (\mu_f + 6) r_{kl} - (\mu_f + 6) \frac{r^2}{3} \delta_{kl} + (\mu_f + 9) \frac{r^2}{3} \delta_{kl} + (\mu_f + 9) J_{3r} \delta_{kl} - \right. \\ &\quad \left. (\mu_f + 9) r_{lm} r_{km} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

Por lo tanto, la normal saliente a la superficie de fluencia  $\mathbf{n}$ , viene dada por

$$\mathbf{n} = \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{p} \left\{ [r^2 + (\mu_f + 9) J_{3r}] \mathbf{1} + (\mu_f + 6) \mathbf{r} - (\mu_f + 9) \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right\} \quad (\text{D.29})$$

### D.1.2. Componente deviatórica de la normal saliente

La componente deviatórica de  $\mathbf{n}$  viene dada por

$$\mathbf{n}^d = \mathbf{I}^{dev} : \mathbf{n} \quad (\text{D.30})$$

como  $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{s}}{p}$  entonces, el tensor de oblicuidad es deviatórico, entonces  $\mathbf{I}^{dev} : \mathbf{r} = \mathbf{r}$ . La componente deviatórica del tensor identidad de cuarto orden se puede escribir en componentes de la siguiente manera

$$\mathbf{I}_{ijkl}^{dev} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \quad (\text{D.31})$$

Si se hace  $\mathbf{I}^{dev} : \mathbf{1}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{ijkl}^{dev} \delta_{kl} &= \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) \delta_{kl} \\ &= \delta_{ik} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{kk} \delta_{ij} \\ &= \delta_{ij} - \delta_{ij} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

Luego,

$$\mathbf{n}^d = \frac{1}{p} \{ (\mu_f + 6) \mathbf{r} - (\mu_f + 9) \mathbf{I}^{dev} : (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \} \quad (\text{D.33})$$

Desarrollando ahora  $\mathbf{I}^{dev} : (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{dev} : (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) &= \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \otimes \underline{\mathbf{e}}^k \otimes \underline{\mathbf{e}}^l : (r_{po} r_{oq}) \underline{\mathbf{e}}^p \otimes \underline{\mathbf{e}}^q \\ &= \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) (r_{ko} r_{ol}) \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \\ &= \left( \delta_{ik} \delta_{jl} r_{ko} r_{ol} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} r_{ko} r_{ol} \right) \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \\ &= \left( r_{io} r_{oj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} r_{ko} r_{ok} \right) \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \\ &= \left( r_{io} r_{oj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right) \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \\ &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{3} r^2 \mathbf{1} \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

Entonces la componente deviatórica de la normal saliente a la superficie de fluencia  $\mathbf{n}^d$ , se expresa como

$$\mathbf{n}^d = \frac{1}{p} \left[ (\mu_f + 9) \frac{r^2}{3} \mathbf{1} + (\mu_f + 6) \mathbf{r} - (\mu_f + 9) \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right] \quad (\text{D.35})$$

## D.2. Derivadas segundas de la función de fluencia de Matsuoka-Nakai

### D.2.1. Derivada de la normal saliente respecto al tensor de tensiones efectivas

La normal saliente viene dada por la ec.(D.29), si se la expresa en componentes

$$n_{ij} = \frac{1}{p} \left\{ [r^2 + (\mu_f + 9) J_{3r}] \delta_{ij} + (\mu_f + 6) r_{ij} - (\mu_f + 9) r_{im} r_{mj} \right\} \quad (\text{D.36})$$

Ahora se realiza la derivada de la ec.(D.36) respecto de  $\sigma_{kl}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} &= -\frac{1}{3p^2} \delta_{kl} \left\{ [r^2 + (\mu_f + 9) J_{3r}] \delta_{ij} + (\mu_f + 6) r_{ij} - (\mu_f + 9) r_{im} r_{mj} \right\} + \\ &\frac{1}{p} \left\{ \left[ 2 \frac{\partial J_{2r}}{\partial \sigma_{kl}} + (\mu_f + 9) \frac{\partial J_{3r}}{\partial \sigma_{kl}} \right] \delta_{ij} + (\mu_f + 6) \frac{\partial r_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} - \right. \\ &\left. (\mu_f + 9) \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (r_{im} r_{mj}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

donde

$$\frac{\partial J_{2r}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{1}{p} \left( r_{kl} - \frac{2}{3} J_{2r} \delta_{kl} \right) = \frac{1}{p} \left( r_{kl} - \frac{r^2}{3} \delta_{kl} \right) \quad (\text{D.38})$$

$$\frac{\partial J_{3r}}{\partial \sigma_{kl}} = -\frac{1}{p} J_{3r} \delta_{kl} - \frac{1}{p} \frac{r^2}{3} \delta_{kl} + \frac{1}{p} r_{lm} r_{mk} \quad (\text{D.39})$$

La derivada del tensor de oblicuidad respecto de el tensor de tensiones efectivas viene dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} \left( \frac{\mathbf{s}_{ij}}{p} \right) \\
&= -\frac{1}{3p^2} \delta_{kl} \mathbf{s}_{ij} + \frac{1}{p} \frac{\partial \mathbf{s}_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \\
&= \frac{1}{p} \left[ \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) - \frac{1}{3} \delta_{kl} \mathbf{r}_{ij} \right] \\
&= \frac{1}{p} \left[ \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) - \frac{1}{3} \delta_{kl} \mathbf{r}_{ij} \right] \\
&= \frac{1}{p} \left[ \mathbf{I}_{ijkl}^{dev} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \mathbf{r}_{ij} \right]
\end{aligned} \tag{D.40}$$

Ahora se desarrolla  $\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (\mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj})$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (\mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj}) &= \frac{\partial \mathbf{r}_{im}}{\partial \sigma_{kl}} \mathbf{r}_{mj} + \mathbf{r}_{im} \frac{\partial \mathbf{r}_{mj}}{\partial \sigma_{kl}} \\
&= \frac{1}{p} \left[ \left( \delta_{ik} \delta_{ml} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{im} \right) \mathbf{r}_{mj} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj} + \right. \\
&\quad \left. \mathbf{r}_{im} \left( \delta_{mk} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mj} \right) - \frac{1}{3} \mathbf{r}_{im} \delta_{kl} \mathbf{r}_{mj} \right]
\end{aligned} \tag{D.41}$$

La ec.(D.41) se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (\mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj}) &= \frac{1}{p} \left[ \delta_{ik} \delta_{lj} + \mathbf{r}_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \mathbf{r}_{ij} - \frac{1}{3} \mathbf{r}_{ij} \delta_{kl} - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{3} \delta_{kl} \mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj} - \frac{1}{3} \mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj} \delta_{kl} \right]
\end{aligned} \tag{D.42}$$

Si se remplazan las ecs.(D.38), (D.39), (D.40) y (D.42) en la ec.(D.37), se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} &= -\frac{1}{3p^2} \delta_{kl} \left\{ [r^2 + (\mu_f + 9) J_{3r}] \delta_{ij} + (\mu_f + 6) \mathbf{r}_{ij} - (\mu_f + 9) \mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj} \right\} + \\
&\quad \frac{1}{p} \left\{ \left[ \frac{2}{p} \left( \mathbf{r}_{kl} - \frac{r^2}{3} \delta_{kl} \right) - (\mu_f + 9) \frac{1}{p} \left( J_{3r} \delta_{kl} + \frac{r^2}{3} \delta_{kl} - \mathbf{r}_{lm} \mathbf{r}_{mk} \right) \right] \delta_{ij} + \right. \\
&\quad (\mu_f + 6) \frac{1}{p} \left( \mathbf{I}_{ijkl}^{dev} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \mathbf{r}_{ij} \right) - (\mu_f + 9) \frac{1}{p} \left( \delta_{ik} \mathbf{r}_{lj} + \mathbf{r}_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \mathbf{r}_{ij} - \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{3} \mathbf{r}_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj} - \frac{1}{3} \mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj} \delta_{kl} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{D.43}$$

Ahora se hace algo de álgebra sobre la ec.(D.43)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} &= -\frac{1}{3p^2} \left[ r^2 \delta_{kl} \delta_{ij} + (\mu_f + 9) J_{3r} \delta_{kl} \delta_{ij} + (\mu_f + 6) \delta_{kl} r_{ij} - (\mu_f + 9) \delta_{kl} r_{im} r_{mj} \right] + \\
&\frac{1}{p^2} \left[ 2 \left( r_{kl} - \frac{r^2}{3} \delta_{kl} \right) \delta_{ij} - (\mu_f + 9) \left( J_{3r} \delta_{kl} + \frac{r^2}{3} \delta_{kl} - r_{lm} r_{mk} \right) \delta_{ij} + (\mu_f + 6) I_{ijkl}^{dev} - \right. \\
&\frac{1}{3} (\mu_f + 6) \delta_{kl} r_{ij} - \frac{1}{3} (\mu_f + 9) (3 \delta_{ik} r_{lj} + 3 r_{ik} \delta_{jl} - \delta_{kl} r_{ij} - r_{ij} \delta_{kl} - \delta_{kl} r_{im} r_{mj} - \\
&\left. r_{im} r_{mj} \delta_{kl}) \right] \tag{D.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{1}{3p^2} \left[ -r^2 \delta_{kl} \delta_{ij} - (\mu_f + 9) J_{3r} \delta_{kl} \delta_{ij} - (\mu_f + 6) \delta_{kl} r_{ij} + (\mu_f + 9) \delta_{kl} r_{im} r_{mj} + \right. \\
&6 \left( r_{kl} - \frac{r^2}{3} \delta_{kl} \right) \delta_{ij} - 3 (\mu_f + 9) \left( J_{3r} \delta_{kl} + \frac{r^2}{3} \delta_{kl} - r_{lm} r_{mk} \right) \delta_{ij} + 3 (\mu_f + 6) I_{ijkl}^{dev} - \\
&(\mu_f + 6) \delta_{kl} r_{ij} - (\mu_f + 9) (3 \delta_{ik} r_{lj} + 3 r_{ik} \delta_{jl} - \delta_{kl} r_{ij} - r_{ij} \delta_{kl} - \delta_{kl} r_{im} r_{mj} - \\
&\left. r_{im} r_{mj} \delta_{kl}) \right] \tag{D.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{1}{3p^2} \left[ -r^2 \delta_{kl} \delta_{ij} - (\mu_f + 9) J_{3r} \delta_{kl} \delta_{ij} - (\mu_f + 6) \delta_{kl} r_{ij} + (\mu_f + 9) \delta_{kl} r_{im} r_{mj} + \right. \\
&6 r_{kl} \delta_{ij} - 2 r^2 \delta_{kl} \delta_{ij} - 3 (\mu_f + 9) J_{3r} \delta_{kl} \delta_{ij} - (\mu_f + 9) r^2 \delta_{kl} \delta_{ij} + \\
&3 (\mu_f + 9) r_{lm} r_{mk} \delta_{ij} + 3 (\mu_f + 6) I_{ijkl}^{dev} - (\mu_f + 6) \delta_{kl} r_{ij} - 3 (\mu_f + 9) \delta_{ik} r_{lj} - \\
&3 (\mu_f + 9) r_{ik} \delta_{jl} + (\mu_f + 9) \delta_{kl} r_{ij} + (\mu_f + 9) r_{ij} \delta_{kl} + (\mu_f + 9) \delta_{kl} r_{im} r_{mj} + \\
&\left. (\mu_f + 9) r_{im} r_{mj} \delta_{kl} \right] \tag{D.46}
\end{aligned}$$

Finalmente, combinando términos se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{1}{p^2} \left\{ - \left[ (\mu_f + 12) r^2 + 4 (\mu_f + 9) J_{3r} \right] \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} + 2 (r_{kl} \delta_{ij} + \delta_{kl} r_{ij}) + \right. \\
&(\mu_f + 6) I_{ijkl}^{dev} + (\mu_f + 9) (r_{lm} r_{mk} \delta_{ij} + \delta_{kl} r_{im} r_{mj}) - \\
&\left. (\mu_f + 9) (\delta_{ik} r_{lj} + r_{ik} \delta_{lj}) \right\} \tag{D.47}
\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{p^2} \left\{ - [(\mu_f + 12) r^2 + 4(\mu_f + 9) J_{3r}] \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2(\mathbf{r} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{r}) + \right. \\
&\quad (\mu_f + 6) \mathbf{I}^{dev} + (\mu_f + 9) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \\
&\quad \left. (\mu_f + 9) (\delta_{ik} r_{lj} + r_{ik} \delta_{lj}) \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \otimes \underline{\mathbf{e}}^k \otimes \underline{\mathbf{e}}^l \right\} \quad (D.48)
\end{aligned}$$

### D.2.2. Derivada de la componente deviat6rica de la normal saliente respecto del tensor de tensiones efectivas

La componente deviat6rica de la normal saliente  $\mathbf{n}$  viene dada por la ec.(D.35), en componentes se puede escribir como

$$\mathbf{n}_{ij}^d = \frac{1}{p} \left[ (\mu_f + 9) \frac{r^2}{3} \delta_{ij} + (\mu_f + 6) r_{ij} - (\mu_f + 9) r_{im} r_{mj} \right] \quad (D.49)$$

Ahora se realiza la derivada de la ec.(D.49) respecto a  $\boldsymbol{\sigma}_{kl}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}_{ij}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{kl}} &= -\frac{1}{3p^2} \delta_{kl} \left[ (\mu_f + 9) \frac{r^2}{3} \delta_{ij} + (\mu_f + 6) r_{ij} - (\mu_f + 9) r_{im} r_{mj} \right] + \\
&\quad \frac{1}{p} \left[ (\mu_f + 9) \frac{2}{3} \frac{\partial J_{2r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{kl}} \delta_{ij} + (\mu_f + 6) \frac{\partial r_{ij}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{kl}} - (\mu_f + 9) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{kl}} (r_{im} r_{mj}) \right] \quad (D.50)
\end{aligned}$$

Si se reemplazan las ecs.(D.38), (D.40) y (D.42) en la ec.(D.50) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}_{ij}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{kl}} &= -\frac{1}{3p^2} \left[ (\mu_f + 9) \frac{r^2}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} + (\mu_f + 6) \delta_{kl} r_{ij} - (\mu_f + 9) \delta_{kl} r_{im} r_{mj} \right] + \\
&\quad \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{p} (\mu_f + 9) \frac{2}{3} \left( r_{kl} - \frac{r^2}{3} \delta_{kl} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{p} (\mu_f + 6) \left( \mathbf{I}_{ijkl}^{dev} - \frac{1}{3} \delta_{kl} r_{ij} \right) - \right. \\
&\quad \frac{1}{p} (\mu_f + 9) \left( \delta_{ik} r_{lj} + r_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} r_{ij} - \frac{1}{3} r_{ij} \delta_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} r_{im} r_{mj} - \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{3} r_{im} r_{mj} \delta_{kl} \right) \right] \quad (D.51)
\end{aligned}$$

Ahora se hace algo de 6lgebra sobre la ec.(D.51)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}_{ij}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{kl}} &= \frac{1}{3p^2} \left[ -(\mu_f + 9) \frac{r^2}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} - (\mu_f + 6) \delta_{kl} \mathbf{r}_{ij} + (\mu_f + 9) \delta_{kl} \mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj} + \right. \\
&(\mu_f + 9) 2 \mathbf{r}_{kl} \delta_{ij} - (\mu_f + 9) \frac{2}{3} r^2 \delta_{kl} \delta_{ij} + 3(\mu_f + 6) \mathbf{I}_{ijkl}^{dev} - (\mu_f + 6) \delta_{kl} \mathbf{r}_{ij} - \\
&3(\mu_f + 9) \delta_{ik} \mathbf{r}_{lj} - 3(\mu_f + 9) \mathbf{r}_{ik} \delta_{jl} + (\mu_f + 9) \delta_{kl} \mathbf{r}_{ij} + (\mu_f + 9) \mathbf{r}_{ij} \delta_{kl} + \\
&\left. (\mu_f + 9) \delta_{kl} \mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj} + (\mu_f + 9) \mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj} \delta_{kl} \right] \quad (\text{D.52})
\end{aligned}$$

Combinando los términos de la ec.(D.52)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}_{ij}^d}{\partial \delta_{kl}} &= \frac{1}{3p^2} \left[ -(\mu_f + 9) r^2 \delta_{kl} \delta_{ij} + 6 \delta_{kl} \mathbf{r}_{ij} + (\mu_f + 9) 2 \mathbf{r}_{kl} \delta_{ij} + \right. \\
&\left. 3(\mu_f + 6) \mathbf{I}_{ijkl}^{dev} + 3(\mu_f + 9) \delta_{kl} \mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj} - 3(\mu_f + 9) (\delta_{ik} \mathbf{r}_{lj} + \mathbf{r}_{ik} \delta_{lj}) \right] \quad (\text{D.53})
\end{aligned}$$

Finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}_{ij}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{kl}} &= \frac{1}{p^2} \left[ -(\mu_f + 9) \frac{r^2}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} + 2 \delta_{kl} \mathbf{r}_{ij} + (\mu_f + 9) \frac{2}{3} \mathbf{r}_{kl} \delta_{ij} + \right. \\
&\left. (\mu_f + 6) \mathbf{I}_{ijkl}^{dev} + (\mu_f + 9) \delta_{kl} \mathbf{r}_{im} \mathbf{r}_{mj} - (\mu_f + 9) (\delta_{ik} \mathbf{r}_{lj} + \mathbf{r}_{ik} \delta_{lj}) \right] \quad (\text{D.54})
\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{p^2} \left[ -(\mu_f + 9) \frac{r^2}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 \mathbf{1} \otimes \mathbf{r} + (\mu_f + 9) \frac{2}{3} \mathbf{r} \otimes \mathbf{1} + (\mu_f + 6) \mathbf{I}^{dev} + \right. \\
&\left. (\mu_f + 9) \mathbf{1} \otimes \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - (\mu_f + 9) (\delta_{ik} \mathbf{r}_{lj} + \mathbf{r}_{ik} \delta_{lj}) \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \otimes \underline{\mathbf{e}}^k \otimes \underline{\mathbf{e}}^l \right] \quad (\text{D.55})
\end{aligned}$$

### D.3. Análisis termodinámico de la ley de flujo no asociada adoptada

En el Anexo C.1 se muestra que la termodinámica impone que la función de disipación plástica  $\mathcal{D}^p$  debe ser positiva. Esta condición también debe cumplirse para reglas de flujo no asociadas pues de lo contrario se estaría generando energía en el proceso de disipación plástica y se violaría la Desigualdad de Clausius-Duhem. Si se define a la función de disipación plástica como



$$\mathcal{D}^p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \quad (\text{D.56})$$

Entonces, se debe cumplir que

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p > 0 \quad (\text{D.57})$$

La evolución de la deformación plástica viene dada por una regla de flujo con asociatividad deviatórica y no asociatividad volumétrica definida por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \mathbf{m} = \dot{\lambda} (\mathbf{m}^d + \beta \mathbf{1}) \quad (\text{D.58})$$

donde  $\mathbf{m}^d = \frac{\mathbf{n}^d}{\|\mathbf{n}^d\|}$  es un tensor de segundo orden deviatórico unitario y  $\beta = -\sin(\psi)$  es un parámetro de dilatación que constituye la componente de no asociatividad volumétrica.

Reemplazando la ec.(D.58) en la ec.(D.57) se tiene

$$\mathbf{s} : \dot{\lambda} \mathbf{m}^d + p \dot{\lambda} \beta > 0 \quad (\text{D.59})$$

Por lo tanto, se llega a la siguiente condición

$$\beta > -\frac{\mathbf{s} : \mathbf{m}^d}{p} = -\mathbf{r} : \mathbf{m}^d \quad (\text{D.60})$$

La cual se puede reescribir de la siguiente manera

$$\psi < \arcsin(\mathbf{r} : \mathbf{m}^d) \quad (\text{D.61})$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{r} : \mathbf{m}^d = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{m}^d\| \cos(\varphi) \quad (\text{D.62})$$

donde  $\varphi$  es el ángulo entre  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{m}^d$ .

Dado que  $\|\mathbf{r}\| = r$  es la oblicuidad y  $\|\mathbf{m}^d\| = 1$ , la ec.(D.62) se puede reescribir como

$$\mathbf{r} : \mathbf{m}^d = r \cos(\varphi) \quad (\text{D.63})$$

Como el valor  $\varphi$  no puede superar al máximo valor del ángulo de Lode  $\theta = 60^\circ$  y la oblicuidad no puede ser mayor que el el valor umbral  $r_{lim} = \sqrt{2}$ , entonces

$$(\mathbf{r} : \mathbf{m}^d)_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{D.64})$$

Por lo tanto la condición sobre el ángulo de dilatancia  $\psi$  dada por la ec.(D.61) se reescribe como

$$\psi < 45^\circ \quad (\text{D.65})$$

Es decir, para valores del ángulo de dilatancia menores que  $45^\circ$  la regla de flujo no asociada dada por la ec.(D.58) no viola la Desigualdad de Clausius-Duhem.

Debido a que los ángulos de dilatancia calculados con la ec.(2.18) se encuentran muy por debajo de la condición impuesta por la ec.(D.65) (ver Sección 2.4.5 Fig.2.7) la regla de flujo adoptada es termodinámicamente consistente.

## D.4. Módulo intrínseco de endurecimiento/ablandamiento

En este Anexo se deduce la expresión del módulo intrínseco de endurecimiento/ablandamiento para el modelo constitutivo elastoplástico local planteado en la Sección (5.6).

La condición de consistencia para este caso viene dada por

$$\dot{F}_f = \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_f}{\partial \mu_f} \dot{\mu}_f = 0 \quad (\text{D.66})$$

donde  $\dot{\mu}_f$  viene dado por

$$\dot{\mu}_f = \frac{\partial \mu_f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial e_0} \dot{e}_0 + \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} \right) \quad (\text{D.67})$$

Si se reemplaza la ec.(D.67) en la ec.(D.66), se tiene

$$\dot{F}_f = \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_f}{\partial \mu_f} \frac{\partial \mu_f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial e_0} \dot{e}_0 + \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} \right) = 0 \quad (\text{D.68})$$

donde

$$\frac{\partial F_f}{\partial \mu_f} = J_{2r} - J_{3r} - 1 \quad (\text{D.69})$$

$$\frac{\partial \mu_f}{\partial \phi} = 16 \sec^2(\phi) \tan(\phi) \quad (\text{D.70})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \psi} = 1 \quad (\text{D.71})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial e_0} = -2,5 D_r \frac{3^\circ}{e_0} + \frac{3^\circ}{e_{max} - e_{min}} \ln(\chi) \quad (\text{D.72})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = -D_r \frac{3^\circ}{p} \quad (\text{D.73})$$

$$\dot{e}_0 = -(1 + e_0) \dot{\epsilon}_p^v = -(1 + e_0) \dot{\lambda} \beta \quad (\text{D.74})$$

$$\dot{p} = -3 K \dot{\epsilon}_p^v = -3 K \dot{\lambda} \beta \quad (\text{D.75})$$

Reemplazando las ecs.(D.69)-(D.75) en la ec.(D.68) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{F}_f = \frac{\partial F_f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} (J_{2r} - J_{3r} - 1) 16 \sec^2(\phi) \tan(\phi) \beta \left[ \left( 2,5 D_r \frac{3^\circ}{e_0} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3^\circ}{e_{max} - e_{min}} \ln(\chi) \right) (1 + e_0) + 3 K D_r \frac{3^\circ}{p} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.76})$$

Por lo tanto, se define al módulo intrínseco de endurecimiento/ablandamiento  $H$  como

$$H = 16 \sec^2(\phi) \tan(\phi) \beta \left[ \left( 2,5 D_r \frac{3^\circ}{e_0} - \frac{3^\circ}{e_{max} - e_{min}} \ln(\chi) \right) (1 + e_0) + 3 K D_r \frac{3^\circ}{p} \right] \quad (\text{D.77})$$

En la Fig.D.1 se grafican los valores posibles del módulo de endurecimiento/ablandamiento para distintas densidades relativas en función de la presión, se observa que la respuesta de  $H$  depende fuertemente de la presión, una arena medianamente densa ( $H < 0$ ) puede comportarse como una arena suelta ( $H > 0$ ) para ciertos valores de presión. Es decir una arena densa puede presentar ablandamiento o endurecimiento dependiendo de la presión a la que este sometida.

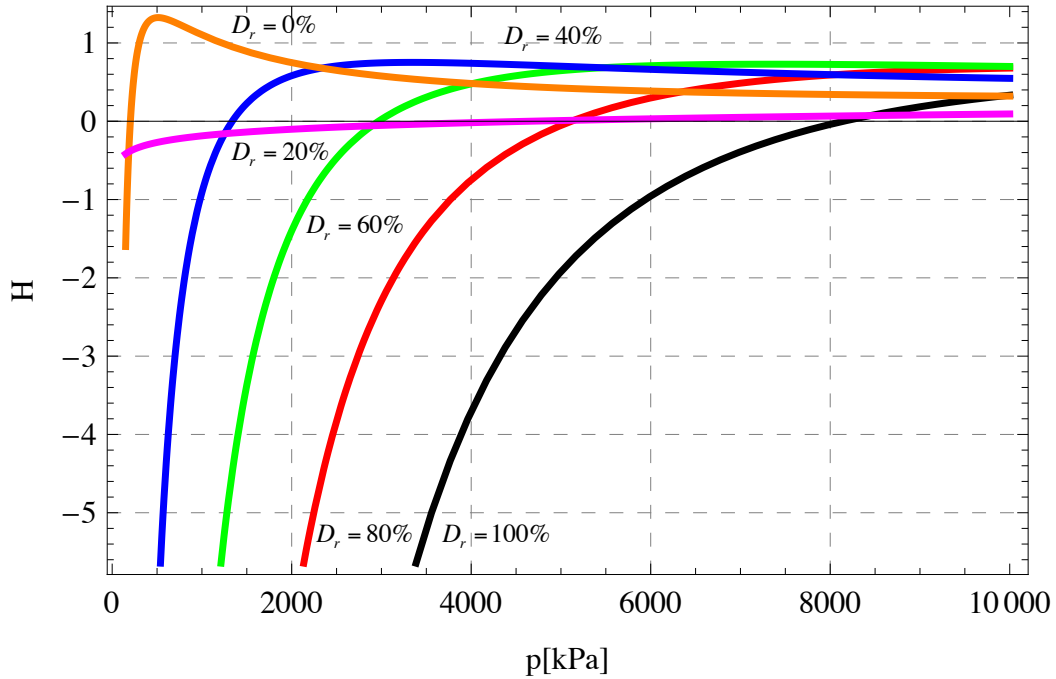


Figura D.1: Gráfico del módulo de endurecimiento/ablandamiento en función de la presión.

## D.5. Operador elastoplástico algorítmico. Función de fluencia de Matsuoka-Nakai

En este Anexo se deduce el operador elastoplástico consistente con el algoritmo de retorno propuesto para el caso de plasticidad con endurecimiento/ablandamiento. Luego se reduce la expresión de este operador al caso de plasticidad perfecta.

Se parte de la ecuación constitutiva

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : ({}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon} - {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (\text{D.78})$$

Como

$${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}_p = {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_p + \lambda {}^{n+1}\mathbf{m} \quad (\text{D.79})$$

Entonces la ec.(D.78) se puede escribir como

$${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C}_e : {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_p - \mathbf{C}_e : \lambda {}^{n+1}\mathbf{m} \quad (\text{D.80})$$

Ahora se diferencia la ec.(D.80)

$${}^{n+1}d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : {}^{n+1}d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C}_e : (d\lambda {}^{n+1}\mathbf{m} + \lambda {}^{n+1}d\mathbf{m}) \quad (\text{D.81})$$

El diferencial del tensor dirección de flujo plástico se puede hallar como

$$d\mathbf{m} = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{D.82})$$

Como  $\mathbf{m} = \mathbf{m}^d + \beta \mathbf{1}$ , entonces

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \mathbf{m}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{1} \quad (\text{D.83})$$

Para calcular la derivada del parámetro de dilatación respecto a  $\boldsymbol{\sigma}$ , se tienen en cuenta las ecs.(2.18) y (5.73), entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \cos(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \cos(\psi) \left[ -3^\circ D_r \frac{p_{ult}}{p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right] \\ &= -\cos(\psi) 3^\circ D_r \frac{p_{ult}}{3p} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (\text{D.84})$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{m}^d = \frac{\mathbf{n}^d}{\|\mathbf{n}^d\|}$ , se deduce la derivada  $\frac{\partial \mathbf{m}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  de la siguiente manera

$$\frac{\partial \mathbf{m}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \|\mathbf{n}^d\| - \mathbf{n}^d \otimes \frac{\partial \|\mathbf{n}^d\|}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\|\mathbf{n}^d\|^2} = \frac{1}{\|\mathbf{n}^d\|} \left[ \frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{m}^d \otimes \frac{\partial \|\mathbf{n}^d\|}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \quad (\text{D.85})$$

donde

$$\frac{\partial \|\mathbf{n}^d\|}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \sqrt{\mathbf{n}^d : \mathbf{n}^d} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{n}^d\|} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\mathbf{n}^d : \mathbf{n}^d) \quad (\text{D.86})$$

La derivada  $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\mathbf{n}^d : \mathbf{n}^d)$  se calcula como

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}} (\mathbf{n}_{ij}^d : \mathbf{n}_{ij}^d) = \frac{\partial \mathbf{n}_{ij}^d}{\partial \sigma_{kl}} \mathbf{n}_{ij}^d + \mathbf{n}_{ij}^d \frac{\partial \mathbf{n}_{ij}^d}{\partial \sigma_{kl}} = 2 \mathbf{n}_{ij}^d \frac{\partial \mathbf{n}_{ij}^d}{\partial \sigma_{kl}} \quad (\text{D.87})$$

Entonces, la ec.(D.87) se escribe como

$$\frac{\partial \|\mathbf{n}^d\|}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{n}^d}{\|\mathbf{n}^d\|} : \frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{m}^d : \frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{D.88})$$

Reemplazando la ec.(D.88) en la ec.(D.85) se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{m}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\|\mathbf{n}^d\|} \left[ \frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{m}^d \otimes \mathbf{m}^d : \frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] = \frac{1}{\|\mathbf{n}^d\|} [\mathbf{I} - \mathbf{m}^d \otimes \mathbf{m}^d] : \frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{D.89})$$

Entonces la derivada del tensor dirección de flujo plástico se escribe como

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\|\mathbf{n}^d\|} [\mathbf{I} - \mathbf{m}^d \otimes \mathbf{m}^d] : \frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \cos(\psi) 3^\circ D_r \frac{p_{ult}}{3p} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (\text{D.90})$$

Se observa que la ec.(D.90) define a un tensor de cuarto orden al cual se lo denomina *Tensor Hessiano de cuarto orden* y se lo denota por

$${}^{n+1}\boldsymbol{\Xi} = \frac{\partial^{n+1} \mathbf{m}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{D.91})$$

Por lo tanto, la ec.(D.81) se reescribe de la siguiente manera

$${}^{n+1}d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_e : {}^{n+1}d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{C}_e : d\lambda {}^{n+1}\mathbf{m} + \lambda \mathbf{C}_e : {}^{n+1}\boldsymbol{\Xi} : {}^{n+1}d\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{D.92})$$

Rearreglando la ec.(D.92), la forma diferencial de la ecuación constitutiva esta dada por

$${}^{n+1}d\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{C}_e^{-1} + \lambda {}^{n+1}\boldsymbol{\Xi}]^{-1} : ({}^{n+1}d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda {}^{n+1}\mathbf{m}) \quad (\text{D.93})$$

donde  $[\mathbf{C}_e^{-1} + \lambda {}^{n+1}\boldsymbol{\Xi}]^{-1} = {}^{n+1}\mathbf{C}_e^*$  es el *tensor constitutivo elástico de cuarto orden modificado*.

Para hallar el diferencial del multiplicador plástico se desarrolla el diferencial de primer orden de la condición de consistencia incremental  ${}^{n+1}F_f = 0$ , dada por

$$\begin{aligned} {}^{n+1}dF_f &= \frac{\partial^{n+1}F_f}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\sigma}} : {}^{n+1}d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial^{n+1}F_f}{\partial^{n+1}\mu_f} {}^{n+1}d\mu_f \\ &= {}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^* : ({}^{n+1}d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda {}^{n+1}\mathbf{m}) + \frac{\partial^{n+1}F_f}{\partial^{n+1}\mu_f} {}^{n+1}d\mu_f = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.94})$$

donde  $\frac{\partial^{n+1}F_f}{\partial^{n+1}\mu_f}$  viene dada por la ec.(D.69) y

$$d\mu_f = \frac{\partial\mu_f}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\psi} \frac{\partial\psi}{\partial e_0} de_0 + \frac{\partial\mu_f}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\psi} \frac{\partial\psi}{\partial p} dp \quad (\text{D.95})$$

En la ec.(D.95) se omite por simplicidad el superíndice  $n+1$  ( $\bullet$ ).

Las derivadas de la ec.(D.95) se hallaron en el Anexo D.4 y vienen dadas por las ecs.(5.13), (5.14), (D.72) y (D.73). El diferencial de la relación de vacíos viene dado por

$$de_0 = -(1 + e_0) d\lambda \beta \quad (\text{D.96})$$

y el diferencial de la presión viene dado por

$$dp = -3 K d\lambda \beta \quad (\text{D.97})$$

Entonces, la ec.(D.95) se puede escribir como

$$d\mu_f = H d\lambda \quad (\text{D.98})$$

donde  $H$  es el módulo de endurecimiento/ablandamiento dado por (ver Anexo D.4)

$$H = 16 \sec^2(\phi) \tan(\phi) \beta \left[ \left( 2,5 D_r \frac{3^\circ}{e_0} - \frac{3^\circ}{e_{max} - e_{min}} \ln(\chi) \right) (1 + e_0) + 3 K D_r \frac{3^\circ}{p} \right] \quad (\text{D.99})$$

Reemplazando las ecs.(D.103), (D.69) y (D.98) en la ec.(D.94) y haciendo algo de álgebra se obtiene

$${}^{n+1}dF_f = {}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda [{}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}\mathbf{m} - (J_{2r} - J_{3r} - 1) H] = 0 \quad (\text{D.100})$$

Por lo tanto,  $d\lambda$  viene dado por

$$d\lambda = \frac{{}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}d\boldsymbol{\varepsilon}}{{}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}\mathbf{m} - (J_{2r} - J_{3r} - 1) H} \quad (\text{D.101})$$

Reemplazando la ec.(D.101) en la ec.(D.103) y sacando factor común  ${}^{n+1}d\boldsymbol{\varepsilon}$ , se obtiene

$${}^{n+1}d\boldsymbol{\sigma} = \left[ \mathbf{C}_e^* - \frac{\mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}\mathbf{m} \otimes {}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^*}{{}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}\mathbf{m} - (J_{2r} - J_{3r} - 1) H} \right] : {}^{n+1}d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{D.102})$$

como

$${}^{n+1}d\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial^{n+1}\boldsymbol{\sigma}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} : {}^{n+1}d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{D.103})$$

Se deduce que el operador elastoplástico algorítmico viene dado por

$${}^{n+1}\overset{\Delta}{\mathbf{C}}_{ep} = \frac{\partial^{n+1}\boldsymbol{\sigma}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}_e^* - \frac{\mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}\mathbf{m} \otimes {}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^*}{{}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}\mathbf{m} - (J_{2r} - J_{3r} - 1)H} \quad (\text{D.104})$$

Para el caso de plasticidad perfecta la expresión anterior se reduce a

$${}^{n+1}\overset{\Delta}{\mathbf{C}}_{ep} = \frac{\partial^{n+1}\boldsymbol{\sigma}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}_e^* - \frac{\mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}\mathbf{m} \otimes {}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^*}{{}^{n+1}\mathbf{n} : \mathbf{C}_e^* : {}^{n+1}\mathbf{m}} \quad (\text{D.105})$$

donde para este caso

$$\mathbf{C}_e^* = [\mathbf{C}_e^{-1} + \lambda {}^{n+1}\boldsymbol{\Xi}]^{-1} \quad (\text{D.106})$$

y

$${}^{n+1}\boldsymbol{\Xi} = \frac{1}{\|\mathbf{n}^d\|} [\mathbf{I} - \mathbf{m}^d \otimes \mathbf{m}^d] : \frac{\partial \mathbf{n}^d}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{D.107})$$



# Bibliografía

- [1] Ahadi, A., Krenk, S., “Implicit integration of plasticity models for granular materials”. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 192:3471-3488, 2003.
- [2] Arduino, P., "Elasto-Plastic Characterization of Granular Materials". PhD Thesis , University of Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez, 1992.
- [3] Bardet, J. P., “Orientation of shear bands in frictional soils”. *J. Eng. Mech.*, 117:(7):25943, 1991.
- [4] Bolton, M. D. “The strength and dilatancy of sands”, *Géotechnique* 36 (1): 65-78, 1986.
- [5] Bolton, M. D. , “The strength and dilatancy of sands”, *Géotechnique* 37(2): 219-226, 1987.
- [6] Borja, R., Lee, S., “Cam-Clay plasticity I: Implicit integration of elastoplastic constitutive relations”. *Comp Meth. Appl. Mech. Eng.* 78:49-72, 1990.
- [7] Borja, R., Lee, S., “Cam-Clay plasticity II: Implicit integration of constitutive equation based on a nonlinear elastic stress predictor”. *Comp. Mech. Appl. Mech. Eng.* 88:225-240, 1991.
- [8] Borja, R., Lin, C., Montans, F., “Cam-Clay plasticity IV: Implicit integration of anisotropic bounding surface model with nonlinear hyperelasticity and ellipsoidal loading function”. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 190:3293-3323, 2001.
- [9] Borja, R., Sama, K., Sanz, P., “On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models”. *Comp. Meth. Appl. Eng.* 192:1227-1258, 2003.
- [10] Burden, R. L., Faires, J. D., “Análisis numérico”. Cengage Learning Brooks Cole, ISBN 13:978-970-686-134-4, 2001.
- [11] Chen, W. F., Han, D. J., “Plasticity for Structural Engineers”. Springer, ISBN 0-387-96711-7, 1988.

- [12] Chen, W. F., Mizuno, E., "Nonlinear analysis in soil mechanics". Elsevier, ISBN 0-444-43043-1, 1990.
- [13] Coulomb C., "Essai Sur Une Application des Regles de Maxims el Minims a Quelques Problems de Statique Relatifs a l'Architecture", Mem. de Math. de l'Acad. Roy. des Sc. Paris, Vol 7, pp. 343382, 1776.
- [14] Desrues, J., "Tracking strain localization in geomaterials using computerized tomography.", in: X-ray CT Geomat., Otani, J. and Obara, Yuso Ed., Balkema, 15-41, 2004.
- [15] Desrues, J., Chambon, R., "Shear band analysis and shear moduli calibration.", Int. J. Solids Structures, 39:3757-3776, 2002.
- [16] Dvorkin E. N., Goldshmit M. B., "Computational Fluid and Solid Mechanics. Nonlinear Continua", Springer, ISBN 3-540-24985-0 2005.
- [17] Etse, G., Willam, K., "Integration algorithms for concrete plasticity". Eng. Comp. 13(8):38-65, 1996.
- [18] Etse, G., Schiava, R., "Elastoplastic constitutive model and localization analysis of partially saturated soils.", J. Comp. Meth. Sci. Eng., 2:(3):1-15-1472-7978, 2003.
- [19] Etse, G., "Notas de cursos de modelos constitutivos para materiales cohesivos friccionales", 2009.
- [20] Fung, Y.C., Tong, P., "Classical and computational solid mechanics.", World Scientific, Advanced Series in Engineering Science - Vol. 1, ISBN 978-981-02-4124-7, 2001.
- [21] Hill, R., "General theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids.", J. Mech. Phys. Solids, 6:236-249, 1958.
- [22] Hill, R., "Acceleration waves in solids.", J. Mech. Phys. Solids, 10:1-16, 1962.
- [23] Kang, D. H., Willam, K. J., "Localization characteristics of triaxial concrete model". Journal of Eng. Mech. 125(8):188-63, 1999.
- [24] Lee, J., M., "Introduction to Topological Manifolds", Springer, ISBN 0-387-95026-5, 2000.
- [25] Lee, J., M., "Introduction to Smooth Manifolds", Springer, ISBN 0-387-95448-1, 2003.

- [26] Lemaitre, J., Chaboche, “Mechanics of solid materials”, Cambridge University Press, ISBN: 0-521-47758-1, 2000.
- [27] Macari, E., Weihe, S., Arduino, P., “Implicit integration of elastoplastic constitutive models for frictional materials with highly nonlinear hardening functions”. *Mech Coh. Frict. Mat.* 2:1-29, 1997.
- [28] Malvern, L., “Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.”, Prentice-Hall, Series in Engineering of the Physical Sciences, ISBN 0-13-487603-2, 1969.
- [29] Matsuoka, H., Nakai, T., “Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses”. *Proc. Japan Soc. Civil Eng.* 233:59-70, 1974.
- [30] Matsuoka, H., Nakai, T., “Relationship among Tresca, Mises, Mohr-Coulomb and Matsuoka-Nakai failure criteria”. *Soil Found.* 25(4):123-128, 1985.
- [31] Molenkamp F., “A simple model for isotropic non-linear elasticity of frictional materials”, *Int. J. Numer. Anal. Meth Geomech* 12(5):467-475, 1988.
- [32] Mühlhaus, H. B., Vardoulakis, “The thickness of shear bands in granular materials.”, *Géotechnique*, 37:271-283, 1987.
- [33] Neto, S., Peric, D., Owen, D. R. J., “Computational Methods for Plasticity. Theory and Applications.”. Wiley, ISBN 978-0-470-69452-7, 2008.
- [34] Lanczos, C., "The variational principles of mechanics". Dover, ISBN 0-486-65067-7, 1986.
- [35] Loreface, R. H., Etse, G., “Estrategias para la integración implícita de ecuaciones constitutivas en modelos cohesivos-friccionales”. *MECOM 99 Mendoza*, 1999.
- [36] Ogden, R. W., “Non-Linear Elastic Deformations”, Dover, ISBN 0-486-69648-0, 1997.
- [37] Ottosen, N., Runesson, K., “Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity.”, *Int. J. Solids Structures*, 27(4):401-421, 1991.
- [38] Pestana, J., “A unified constitutive model for clays and sands.”, DSc Thesis MIT, 1994.
- [39] Pivonka, P., Willam K. J., “The effect of the third invariant in computational plasticity”. *Eng. Comp.* 20-5-6:741-753, 2003.

- [40] Powrie, W. "Soil Mechanics. Concepts and Applications", E & FN SPON, ISBN 0-415-31156-X, 1997.
- [41] Pramono, E., Willam K. L., "Implicit integration of composite yield surfaces with corners". *Comp. Eng.* 186(6):0264-4401, 1989.
- [42] Rankine W. J. M., " A Manual of Applied Mechanics", Griffin-London, 1858.
- [43] Reynolds O., "Experiments Showing Dilatancy Property of Granular Material", *Proc. Roy. Inst.*, Vol. 2 pp. 354-363, 1885.
- [44] Rice, J., "The localization of plastic deformation". In Koiter, W, editor, *Theo Appl. Mech.*, 14th IUTAM Congr., pages 207-220, Amsterdam, 1976.
- [45] Rudinicki, J., Rice, J., "Condition for localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials.", *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371, 1975.
- [46] Runesson, K., Sture S., Willam, K. J., "Integration in computational plasticity". *Comp. Str.* 30-1-2:199-130, 1988.
- [47] Runesson, K., Ottosen, N., Peric, D., "Discontinuous bifurcation of elastic-plastic solutions at plane stress an plane strain". *Int. J. of Plasticity*, 7:99-121, 1991.
- [48] Simo, J. C., Hughes, T. J. R., "Computational Inelasticity"., *Interdisciplinary Applied Mathematics, Mechanics and Materials*, Springer, ISBN 0-38797-520-9, 1997.
- [49] Sfriso A. O., "Caracterización Mecánica de Materiales Constituidos por partículas. Tesis Doctoral"., 2008.
- [50] Sfriso A. O., Weber G., "Formulation and validation of constitutive model for sands in monotonic shear". *Acta Geotechnica*, doi 10.1007/s11440-010-0127-y, 2010.
- [51] Vardoulakis, I., Goldsheider, M., Gudehus, G., "Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem.", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2:99-128, 1978.
- [52] Vardoulakis, I., "Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests.", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 4:103-119, 1980.
- [53] Vardoulakis, I., "Bifurcation analysis of the plane rectilinear deformation on dry sand samples.", *Int. J. Solids Structures*, 17(11):1085-1101, 1981.

- [54] Vrech, S. M., “Simulación computacional de procesos de falla localizada basada en teoría de gradientes.Tesis Doctoral”. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología. Universidad de Tucumán., 2007.
- [55] Willam, K. J., “Constitutive Models for Engineering Materials”, Third Edition, 2002.