Señales y Sistemas - 66.74

Apunte teórico

Atributos de los Sistemas

1. Linealidad

Se tiene un sistema H, dos entradas cualesquiera x e y, y sus respectivas salidas $x' = H[x]$ e $y' = H[y]$.

Se dice que el **sistema** H es **lineal** si, y solo si

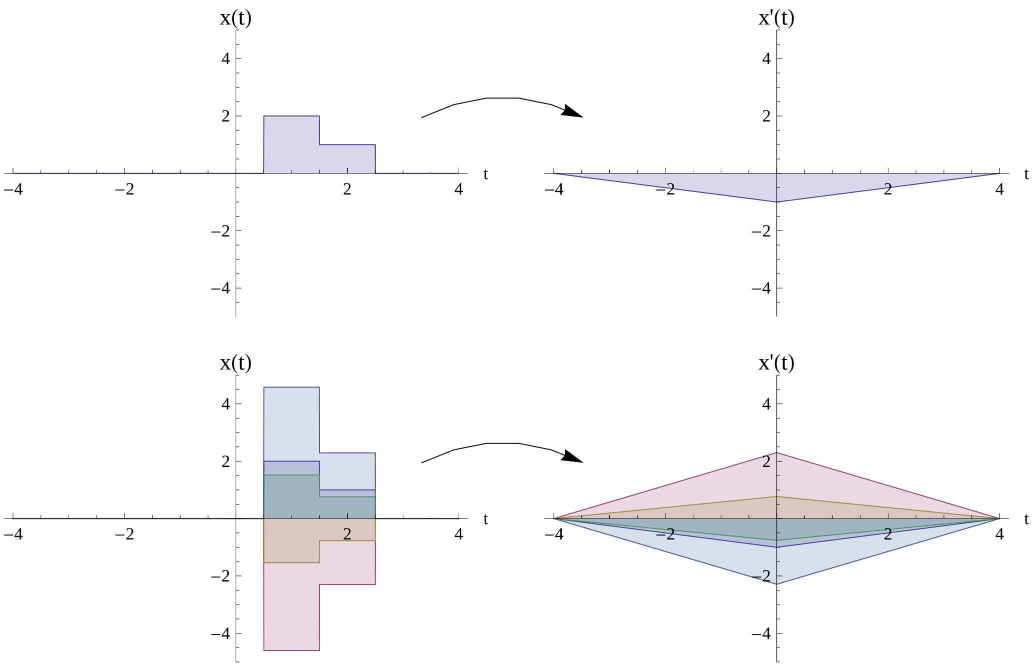
$$H[\alpha\, x + y] = \alpha\, x' + y'$$

$$\forall\ x,\ y \quad \begin{array}{c} x \longrightarrow \boxed{H} \xrightarrow{x'} \\ y \longrightarrow \boxed{H} \xrightarrow{y'} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \alpha\, x + y \longrightarrow \boxed{H} \xrightarrow{\alpha\, x' + y'}$$

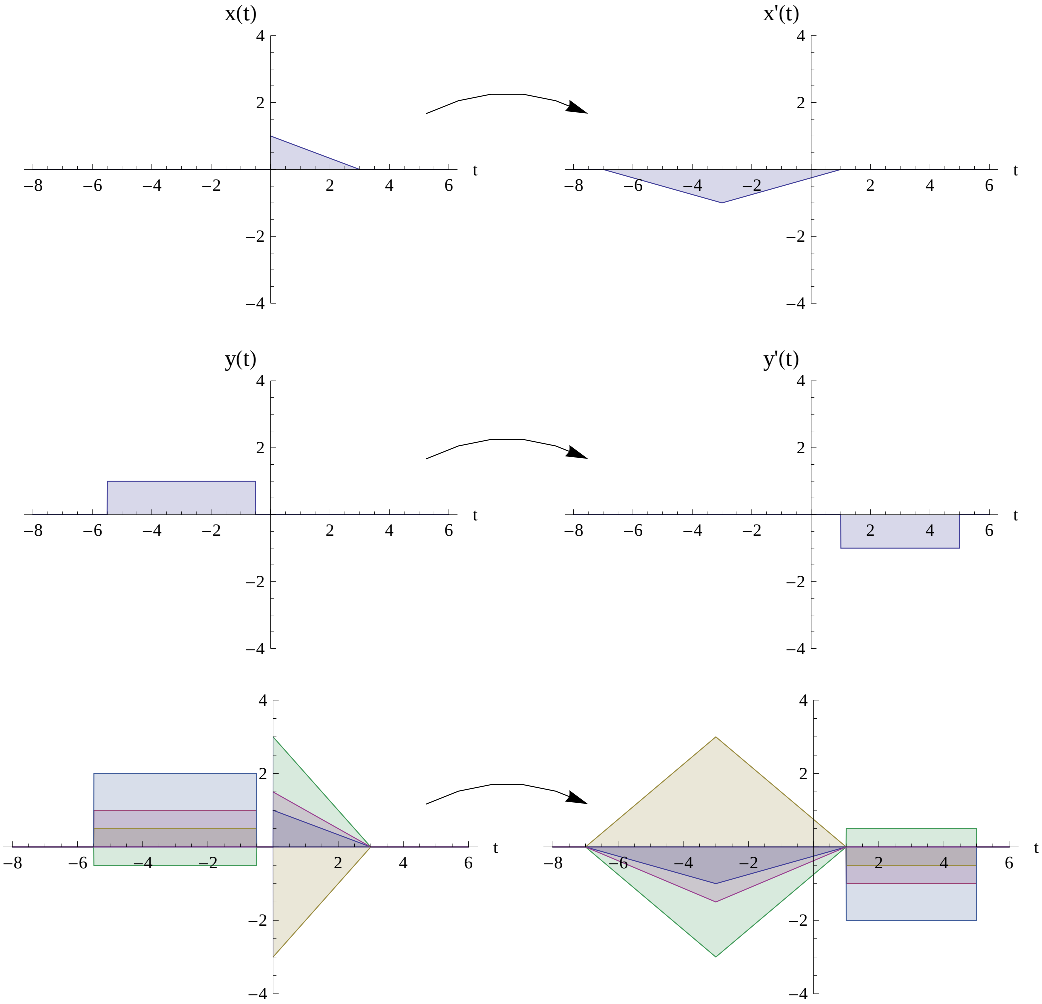
O sea, en un sistema lineal, la salida de cualquier combinación lineal de entradas se puede obtener combinando las salidas de cada parte.

▪ Observaciones

- Supongamos que sobre un sistema solo sé que es lineal, y que ante cierta entrada x devuelve cierta salida x' como se muestra en la figura. Entonces, automáticamente ya sé las salidas frente a todas las entradas iguales a la dada a menos de una expansión o compresión de amplitud



- Supongamos que sobre un sistema solo sé que es lineal, y que ante ciertas entradas x e y devuelve ciertas salidas x' y y' como se muestra en la figura. Automáticamente ya sé las salidas frente a todas las combinaciones lineales de las entradas.



- La propiedad de linealidad de un sistema tiene aplicaciones muy prácticas. Si descubrimos que una señal puede ser escrita como sumas ponderadas de señales de alguna clase, y además se conoce la transformación que produce el sistema sobre esas señales sumandos, podemos conocer la salida simplemente sumando esas transformaciones con la misma ponderación. Esto nos permite conocer una gran cantidad de salidas a partir de un conjunto más reducido de transformaciones, sin necesidad de tener que pensar la transformación cada vez. La descomposición canónica (trivial) de una señal es su descomposición en funciones del tipo $k\,\delta(n - n_0)$

2. Invarianza en el tiempo

Se tiene un sistema H.

Dada una entrada cualquiera x, y su salida $x' = H[x]$

Se dice que el **sistema** H es **invariante en el tiempo** (TI - *Time-Invariant*) si, y solo si, ante la entrada desplazada en el tiempo $x(t - t_0)$, el sistema devuelve $x'(t - t_0)$

$$\forall\, x\,,\; t_0$$

$$H[x_{t_0}]_{(t)} \;=\; H[x]_{(t-t_0)} \qquad \text{con} \quad x_{t_0}(t) \overset{\text{def}}{=} x(t-t_0)$$

o equivalentemente usando la notación $\overset{\delta}{\rightarrow}[\,\cdot\,]$ como el operador que desplaza temporalmente en δ

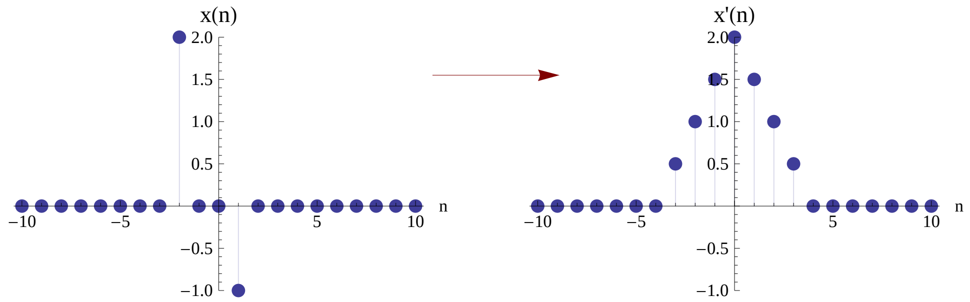
$$H\left[\overset{t_0}{\rightarrow}[x]\right] \;=\; \overset{t_0}{\rightarrow}[H[x]]$$

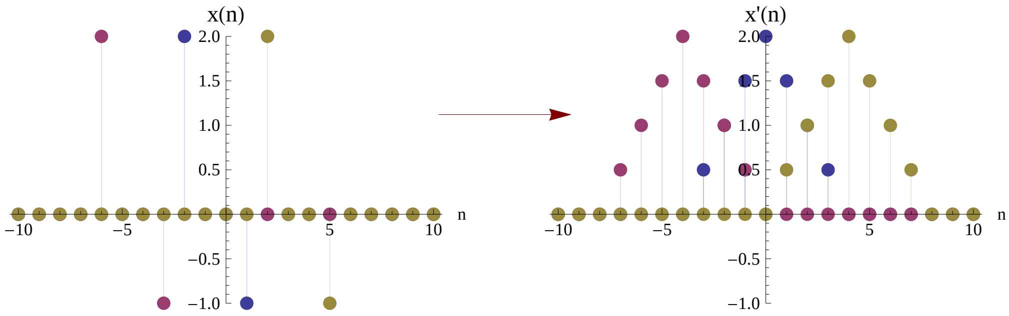
En otras palabras, un sistema es *TI* si conmuta con un sistema *delay* arbitrario.

$$x \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow \boxed{\text{delay}} \longrightarrow y \quad\Longleftrightarrow\quad x \longrightarrow \boxed{\text{delay}} \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y$$

■ Observaciones

- Un sistema físico es invariante en el tiempo si sus parámetros no dependen del tiempo. Por ejemplo, si los resistores de un circuito no degradan su resistencia con el tiempo. Esto permite que si le coloco cierta entrada hoy a las 10 PM, la salida será la misma que si le coloco la misma entrada mañana a las 10AM, con una diferencia de 12 horas
- Imaginemos que sobre un sistema solo sé que es invariante en el tiempo, y que ante cierta entrada x devuelve cierta salida x' como se muestra en la figura. Entonces, automáticamente ya sé las salidas frente a todas las entradas iguales a la dada desplazada en el tiempo





3. Estabilidad

En la materia nos enfocamos en un tipo particular de estabilidad que se llama estabilidad **BIBO** - *Bounded Input Bounded Output*. Un **sistema estable** en sentido **BIBO** es un sistema que garantiza que la **salida** es **acotada** frente a cualquier **entrada acotada.**

El hecho de que un sistema sea inestable es una propiedad altamente indeseable para la mayor parte de los sistemas que estudiamos o diseñamos. En los sistemas estables, las transformaciones producidas en la salidas dependen del sistema y de su entrada. En los sistemas cuyas salidas resultan en valores infinitos para ciertos conjuntos de entradas, las salidas ante todas esas entradas son indistinguibles después de un tiempo transitorio, y la transformación pierde interés.

4. Causalidad

Se dice que un **sistema** es **causal** cuando **no necesita información del futuro para resolver su salida**.

Formalmente, esto se traduce a que **si dos entradas son iguales hasta un tiempo** n_0, **sus salidas deben ser iguales hasta ese mismo** n_0. De no ser así, el sistema tendría que haber sabido que las entradas iban a ser distintas en un futuro al generarle salidas distintas.

Los sistemas físicos reales que tranforman señales naturales son siempre causales. Los efectos nunca suceden antes que sus causas. En los sistemas discretos esa premisa no es cierta, y de hecho ni siquiera es deseable que esto sea así siempre. Generar sistemas discretos no causales puede llegar a ser muy útil para el procesamiento de señales, como veremos al finalizar esta materia. (no se me ocurrió un ejemplo sencillo que sea útil a esta altura).

5. Memoria

Se dice que se tiene un **sistema sin memoria** si la **salida** en un tiempo *n* **depende exclusivamente** del **valor de la entrada en tiempo** *n* **y del propio tiempo** *n*.

Es decir, el sistema, al momento de definir una salida, sólo cuenta con un reloj (información sobre en qué *n* está) y el valor de la entrada correspondiente a ese momento exclusivamente.