Hoja de fórmulas, propiedades y definiciones (Versión 1.5)

El presente documento contiene fórmulas y propiedades varias correspondientes a los distintos temas de la materia. El mismo es de libre uso por los alumnos en toda instancia, incluidas las de evaluaciones parciales e integradoras. En estas últimas mencionadas instancias será el único material permitido y la tenencia y consulta de otro material será sancionada con la desaprobación del correspondiente exámen. Para más información con respecto a este punto consultar el reglamento de la materia.

1. Propiedades y fórmulas varias

- **Serie geométrica**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad |\alpha| < 1$$

- **Suma geométrica parcial**:

$$\sum_{n=N_1}^{N_2-1} \alpha^n = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2}}{1-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{C},\ N_1, N_2 \in \mathbb{N}$$

2. Propiedades correspondientes a la operación de convolución

Sean $x(t)$ e $y(t)$ señales de tiempo continuo. Se define la convolución entre ambas señales como:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

Sean $x[n]$ e $y[n]$ señales de tiempo continuo. Se define la convolución entre ambas señales como:

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k]$$

Valen las siguientes propiedades:

- **Commutatividad**:

$$y(t) * x(t) = x(t) * y(t)$$
$$y[n] * x[n] = x[n] * y[n]$$

- **Distributividad**:

$$[y(t) + z(t)] * x(t) = y(t) * x(t) + z(t) * x(t)$$
$$[y[n] + z[n]] * x[n] = y[n] * x[n] + z[n] * x[n]$$

- **Asociatividad**:

$$[y(t) * z(t)] * x(t) = y(t) * [z(t) * x(t)]$$
$$[y[n] * z[n]] * x[n] = y[n] * [z[n] * x[n]]$$

3. Propiedades correspondientes a los sistemas LTI

Un sistema de tiempo continuo (denotado por el operador $\mathcal{T}_c[\cdot]$) es lineal e invariante en el tiempo (LTI) sí y sólo sí verifica las siguientes dos condiciones:

- Para cualesquiera señales $x(t)$ e $y(t)$ tales que las correspondientes salidas son $\mathcal{T}_c[x(t)]$ y $\mathcal{T}_c[y(t)]$, si la entrada al sistema es $\alpha x(t) + \beta y(t)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se verifica:

$$\mathcal{T}_c[\alpha x(t) + \beta y(t)] = \alpha \mathcal{T}_c[x(t)] + \beta \mathcal{T}_c[y(t)]$$

- Para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ y cualquier entrada $x(t)$ tal que $\mathcal{T}_c[x(t)] = y(t)$ se verifica:

$$\mathcal{T}_c[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$$

Además es posible escribir para cualquier señal $x(t)$:

$$\mathcal{T}_c[x(t)] = x(t) * h(t)$$

donde $h(t) = \mathcal{T}_c[\delta(t)]$ es la *respuesta al impulso* del sistema y $\delta(t)$ es la delta de Dirac de tiempo continuo.

Un sistema de tiempo discreto (denotado por el operador $\mathcal{T}_d[\cdot]$) es lineal e invariante en el tiempo (LTI) sí y sólo sí verifica las siguientes dos condiciones:

- Para cualesquiera señales $x[n]$ e $y[n]$ tales que las correspondientes salidas son $\mathcal{T}_d[x[n]]$ y $\mathcal{T}_d[y[n]]$, si la entrada al sistema es $\alpha x[n] + \beta y[n]$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se verifica:

$$\mathcal{T}_d[\alpha x[n] + \beta y[n]] = \alpha \mathcal{T}_d[x[n]] + \beta \mathcal{T}_d[y[n]]$$

- Para cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$ y cualquier entrada $x[n]$ tal que $\mathcal{T}_d[x[n]] = y[n]$ se verifica:

$$\mathcal{T}_d[x[n - n_0]] = y[n - n_0]$$

Además es posible escribir para cualquier señal $x[n]$:

$$\mathcal{T}_d[x[n]] = x[n] * h[n]$$

donde $h[n] = \mathcal{T}_d[\delta[n]]$ es la *respuesta al impulso* del sistema y $\delta[n]$ es la delta de Dirac de tiempo discreto.

- **Memoria**: Un sistema LTI no tiene memoria sí y sólo sí su respuesta al impulso satisface:

$$h(t) = K\delta(t),\ K \in \mathbb{C},\ \text{(tiempo continuo)}$$

$$h[n] = K\delta[n],\ K \in \mathbb{C},\ \text{(tiempo discreto)}$$

- **Causalidad**: Un sistema LTI es causal sí y sólo sí su respuesta al impulso satisface:

$$h(t) = 0,\ t < 0,\ \text{(tiempo continuo)}$$

$$h[n] = 0,\ n < 0,\ \text{(tiempo discreto)}$$

- **Invertibilidad**: Si un sistema LTI admite sistema inverso, el mismo es LTI y la respuesta al impulso del mismo satisface:

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t),\ \text{(tiempo continuo)}$$

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n],\ \text{(tiempo discreto)}$$

- **Estabilidad**: Un sistema LTI es BIBO-estable sí y sólo sí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty, \text{ (tiempo continuo)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|dt < \infty, \text{ (tiempo discreto)}$$

- **Ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias**: Un sistema descripto por una ecuación diferencial a coeficientes constantes en tiempo continuo dada por:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

es LTI y causal si se verifica la *condición de reposo inicial*: para cualesquiera $t_0 \in \mathbb{R}$ y (según corresponda) tenemos que

Para cualquier entrada que es cero para $t \leq t_0$

la salida del sistema es cero para $t \leq t_0$.

En el caso de tiempo discreto, un sistema descripto por una ecuación en diferencias a coeficientes constantes dada por:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

es LTI y causal si se verifica la *condición de reposo inicial*: para cualesquiera $n_0 \in \mathbb{N}$ (según corresponda) tenemos que

Para cualquier entrada que es cero para $n \leq n_0$

la salida del sistema es cero para $n \leq n_0$.

Aclaración: Notar que en el caso de tiempo discreto la propiedad vale para el caso en que los retardos en las señales de la ecuación en diferencias son mayores o iguales a ceros y no existe ningún término de la forma $x[n+k]$ o $y[n+k]$ con $k \in \mathbb{N}$.

- **Comportamiento de los sistemas LTI frente a entradas exponenciales**: Si $x(t) = e^{st}$ con $s \in \mathbb{C}$ ($x[n] = z^n$ con $z \in \mathbb{C}$) y $\mathcal{T}_c$ ($\mathcal{T}_d$) es un sistema LTI se tiene:

$$\mathcal{T}_c[x(t)] = H(s)e^{st}, \text{ (tiempo continuo)}$$

$$\mathcal{T}_d[x[n]] = H(z)z^n, \text{ (tiempo discreto)}$$

donde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt, \quad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

4. Propiedades correspondientes al tema de series de Fourier de tiempo continuo

Sea una señal periódica de tiempo continuo $x(t)$ con periodo T. Los coeficientes de Fourier de dicha señal quedan definidos por:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt,\ k \in \mathbb{Z},\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Si $x(t) \in L_2[-T/2, T/2]$ podemos escribir:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

donde la igualdad se debe interpretar en términos de convergencia media cuadrática. El proceso de mapeo de $x(t)$ en sus coeficientes y viceversa lo escribiremos como:

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$$

- **Parseval**: Si $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$ se tiene:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

- **Linealidad**: Sean $x(t)$ e $y(t)$ funciones periódicas de periodo T tales que $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$ $y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k$. Entonces:

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} \alpha a_k + \beta b_k$$

- **Desplazamiento temporal**: Sea $x(t)$ periódica con periodo T tal que $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$. Consideremos $y(t) = x(t-\tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}$. Entonces

$$y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k e^{-jk\omega_0 \tau}$$

- **Inversión temporal**: Sea $x(t)$ periódica con periodo T tal que $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$. Consideremos $y(t) = x(-t)$. Entonces

$$y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_{-k}$$

- **Conjugación y simetría conjugada**: Sea $x(t)$ periódica con periodo T tal que $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$. Consideremos $y(t) = x^*(t)$. Entonces

$$y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_{-k}^*$$

- **Multiplicación**: Sean $x(t)$ e $y(t)$ señales periódicas de periodo T tales que $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$ $y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k$. Entonces:

$$x(t)y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{k-p} = a_k * b_k$$

- **Convolución periódica**: Sean $x(t)$ e $y(t)$ señales periódicas de periodo T tales que $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$ $y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k$. Sea

$$z(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

la *convolución periódica* entre $x(t)$ e $y(t)$. Entonces $z(t)$ es periódica con periodo T y :

$$z(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} Ta_k b_k$$

- **Diferenciación**: Sea $x(t)$ señal periódica de periodo T tal que $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$. Entonces:

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} jk\omega_0 a_k$$

- **Integración**: Sea $x(t)$ señal periódica de periodo T, con media cero en un periodo y tal que $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} \frac{a_k}{jk\omega_0}$$

5. Propiedades correspondientes al tema de series de Fourier de tiempo discreto

Sea una señal periódica de tiempo discreto $x[n]$ con periodo N. Los coeficientes de Fourier de dicha señal quedan definidos por:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n},\ \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

De la misma forma, podemos expresar $x[n]$ como:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

El proceso de mapeo de $x[n]$ en sus coeficientes y viceversa lo escribiremos como:

$$x[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$$

- **Parseval**: Si $x[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$ se tiene:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

- **Linealidad**: Sean $x[n]$ e $y[n]$ funciones periódicas de periodo N tales que $x[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$ $y[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k$. Entonces:

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} \alpha a_k + \beta b_k$$

- **Desplazamiento temporal**: Sea $x[n]$ periódica con periodo N tal que $x[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$. Consideremos $y[n] = x[n-n_0]$ con $n_0 \in \mathbb{N}$. Entonces

$$y[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$$

- **Inversión temporal**: Sea $x[n]$ periódica con periodo N tal que $x[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$. Consideremos $y[n] = x[-n]$. Entonces
$$y[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_{-k}$$

- **Conjugación y simetría conjugada**: Sea $x[n]$ periódica con periodo N tal que $x[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$. Consideremos $y[n] = x^*[n]$. Entonces
$$y[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a^*_{-k}$$

- **Multiplicación**: Sean $x[n]$ e $y[n]$ señales periódicas de periodo N tales que $x[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$ $y[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k$. Entonces:
$$x[n]y[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} \sum_{p=\langle N\rangle} a_p b_{k-p}$$

- **Convolución periódica**: Sean $x[n]$ e $y[n]$ señales periódicas de periodo N tales que $x[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$ $y[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k$. Sea
$$z[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} x[k]y[n-k]d$$
la *convolución periódica* entre $x[n]$ e $y[n]$. Entonces $z[n]$ es periódica con periodo N y :
$$z[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} N a_k b_k$$

6. Propiedades correspondientes al tema de transformada de Fourier de tiempo continuo

Se define la *transformada de Fourier* de la señal de tiempo continuo $x(t)$ como:
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt,\ \omega \in \mathbb{R}$$
En forma compacta podemos escribir $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$. La *anti-transformada* de Fourier $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$ se define como:
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega,\ t \in \mathbb{R}$$
Estas definiciones tienen sentido siempre y cuando las correspondientes integrales estén bien definidas o cuando $x(t)$ o $X(j\omega)$ son señales en $L_2(\mathbb{R})$ (en este último caso la igualdad en las expresiones se tiene que interpretar en media cuadrática).

- **Parseval**: Si $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ y $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ vale:
$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

- **Linealidad**: Sean $x(t)$ e $y(t)$ funciones tales que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ y $Y(j\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$. Tenemos que:
$$\mathcal{F}[ax(t) + by(t)] = aX(j\omega) + bY(j\omega),\quad a, b \in \mathbb{C}$$

- **Desplazamiento temporal**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

- **Conjugación y simetría conjugada**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}[x^*(t)] = X^*(-j\omega)$$

- **Escalamiento en tiempo y frecuencia**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right), \ a \in \mathbb{R}$$

- **Derivación**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j\omega X(j\omega)$$

- **Integración**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$. Supongamos que $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau = 0$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(j\omega)}{j\omega}$$

  En el caso de que $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau \neq 0$ debemos compensar el "valor de continua" con un impulso. La expresión para ese caso:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

- **Convolución**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ y $y(t)$ tal que $Y(j\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$. Sea $z(t) = x(t) * y(t)$. Tenemos:

$$\mathcal{F}[z(t)] = X(j\omega)Y(j\omega)$$

- **Multiplicación en el tiempo**: Sea $x(t)$ tal que $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ y $y(t)$ tal que $Y(j\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$. Sea $z(t) = x(t)y(t)$. Tenemos:

$$\mathcal{F}[z(t)] = \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * Y(j\omega)]$$

Tabla para análisis de Fourier de tiempo continuo

Señal	**Transformada de Fourier**	**Serie de Fourier**
$\delta(t)$	1	No aplica
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0\ \forall k \neq 1$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0\ \forall k \neq 1, -1$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0\ \forall k \neq 1, -1$
1	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1$ $a_k = 0\ \forall k \neq 0$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T},\ \forall k$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\delta(\omega-k\omega_0)$	a_k
$u\left(t+T\right)-u\left(t-T\right)$	$\frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$	No aplica
$\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$	$u\left(\omega+W\right)-u\left(\omega-W\right)$	No aplica
$x(t) = u\left(t+T_1\right)-u\left(t-T_1\right)$ con $x(t) = x(t+T)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k}\delta(\omega-k\omega_0)$	$\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	No aplica
$e^{-\alpha t}u(t), \mathrm{Re}(\alpha) > 0$	$\frac{1}{\alpha+j\omega}$	No aplica
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t), \mathrm{Re}(\alpha) > 0$	$\frac{1}{(\alpha+j\omega)^n}$	No aplica
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$	No aplica

7. Propiedades correspondientes al tema de transformada de Fourier de tiempo discreto

Consideremos una señal de tiempo discreto $x[n]$. Se define la *transformada de Fourier* de $x[n]$ o $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{x[n]\right\}$ como:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n},\ \omega \in [-\pi, \pi)$$

La *anti-transformada* de Fourier $x[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{X(e^{j\omega})\right\}$ se define como:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Estas definiciones tienen sentido siempre y cuando las correspondientes integrales estén bien definidas o cuando $x[n]$ y $X(e^{j\omega})$ son señales en $\ell_2(\mathbb{Z})$ y $L_2([-\pi,\pi))$ respectivamente.

- **Parseval**: Si $x[n] \in \ell_2(\mathbb{Z}))$ y $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ vale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

- **Linealidad**: Sean $x[n]$ e $y[n]$ funciones tales que $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ y $Y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\}$. Tenemos que:

$$\mathcal{F}\{ax[n] + by[n]\} = aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega}), \quad a, b \in \mathbb{C}$$

- **Desplazamiento temporal y en frecuencia**: Sea $x[n]$ tal que $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$. Entonces valen

$$\mathcal{F}\{x[n-n_0]\} = e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega}), \; n_0 \in \mathbb{Z}$$
$$\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 n}x[n]\right\} = X(e^{j(\omega-\omega_0)}), \quad \omega_0 \in [-\pi,\pi)$$

- **Conjugación y simetría conjugada**: Sea $x[n]$ tal que $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$. Entonces valen

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X(e^{-j\omega}), \; n_0 \in \mathbb{Z}$$

- **Diferencia y acumulación**: Sea $x[n]$ tal que $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$. Entonces valen:

$$\mathcal{F}\{x[n] - x[n-1]\} = (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

  Si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = 0$ tenemos que:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\right\} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})$$

  El caso para el que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \neq 0$ se modifica como:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\right\} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - 2\pi k)$$

- **Convolución**: Sea $x[n]$ tal que $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ y $y[n]$ tal que $Y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\}$. Sea $z[n] = x[n] * y[n]$. Tenemos:

$$\mathcal{F}\{z[n]\} = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

- **Multiplicación**: Sea $x[n]$ tal que $X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ y $y[n]$ tal que $Y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{y[n]\}$. Sea $z[n] = x[n]y[n]$. Tenemos:

$$\mathcal{F}\{z[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\nu})Y(e^{j(\omega-\nu)})d\nu$$

Tabla para análisis de Fourier de tiempo discreto

Señal	**Transformada de Fourier**	**Serie de Fourier**
$\delta[n]$	1	No aplica
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	Sólo si $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ con $m \in \mathbb{N}$ $a_k = \begin{cases} 1 & k = \pm m, \pm m \pm N, \ldots \\ 0 & \text{para los demás } k \end{cases}$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$ $+\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$	Sólo si $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ con $m \in \mathbb{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = \pm m, \pm m \pm N, \ldots \\ 0 & \text{para los demás } k \end{cases}$
$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$ $-\delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$	Sólo si $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ con $m \in \mathbb{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = m, m \pm N, \ldots \\ -\frac{1}{2j} & k = -m, -m \pm N, \ldots \\ 0 & \text{para los demás } k \end{cases}$
1	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1 & k = 0, \pm N, \ldots \\ 0 & \text{para los demás } k \end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}\ \forall k$
$\sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n},\ \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$u[n] - u[n-N]$	$e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$ periódica con periodo 2π	No aplica
$\frac{\sin(Wn)}{\pi n},\ 0 < W < \pi$	$u(\omega + W) - u(\omega - W)$ periódica con periodo 2π	No aplica
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi\delta(\omega)$ periódica con periodo 2π	No aplica
$\alpha^n u[n], \lvert\alpha\rvert < 1$	$\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$ periódica con periodo 2π	No aplica
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}\alpha^n u[n], \lvert\alpha\rvert < 1$	$\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^r}$ periódica con periodo 2π	No aplica

8. Propiedades correspondientes al tema de DFT

Sea $x[n]$ una señal de tiempo discreto definida para $0 \leq n \leq N-1$. Definimos $W_N \equiv e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. La transformada discreta de Fourier de longitud N de $x[n]$ está definida por:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De la misma forma la señal $x[n]$ se puede recuperar con:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En forma más compacta, y asumiendo implicítamente que $X[k]=0$ para $k<0$ y $k\geq N$ y $x[n]=0$ para $n<0$ y $n\geq N$:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn},\quad \text{Ecuación de análisis}$$

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn},\quad \text{Ecuación de sintésis}$$

En forma aún más compacta la DFT de N puntos la denotaremos como:

$$x[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X[k]$$

- Si $X(e^{j\omega})=\mathcal{F}\{x[n]\}$ y $x[n]$ es de longitud finita N, la DFT de N puntos $X[k]$ satisface $X[k]=X(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$ con $k=0,\ldots,N-1$.

- **Linealidad**: Sea $x[n]$ una señal de longitud N_1 y $y[n]$ una señal de longitud N_2. Consideremos $z[n]=\alpha x[n]+\beta y[n]$. Es claro que la longitud de $z[n]$ será $N_3=\max\{N_1,N_2\}$ (alguna de las secuencias será completada con ceros!). Sea entonces $x[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_3}{\longleftrightarrow}}X[k]$ y $y[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_3}{\longleftrightarrow}}Y[k]$. Es claro que:

  $$z[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N_3}{\longleftrightarrow}}\alpha X[k]+\beta Y[k]$$

  Es claro que la propiedad sigue siendo válida si las DFT se toman con una longitud común $N\geq N_3$.

- **Desplazamiento circular de una secuencia**: Sea una secuencia $x[n]$ de longitud N y $x[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X[k]$. Entonces:

  $$x[((n-m))_N]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}W_N^{km}X[k]$$

- **Dualidad**: Sea una secuencia $x[n]$ de longitud N y $x[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X[k]$. Entonces:

  $$X[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}Nx[((-k))_N]$$

- **Simetría conjugada**: Sea una secuencia $x[n]$ de longitud N y $x[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X[k]$. Entonces:

  $$x^*[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X^*[((-k))_N]$$

- **Convolución circular**: Sean $x[n]$ e $y[n]$ una señales de longitud N. Consideremos

  $$z[n]=x[n]\underset{N}{\circledcirc}y[n]\equiv\sum_{m=0}^{N-1}x[m]y[((n-m))_N]=\sum_{m=0}^{N-1}x[((n-m))_N]y[m]\equiv y[n]\underset{N}{\circledcirc}x[n]$$

  donde $n=0,1,\ldots,N-1$. Si $x[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X[k]$ y $y[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}Y[k]$ tenemos

  $$z[n]\overset{\mathcal{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}}X[k]Y[k]$$

9. Propiedades correspondientes al tema de transformada de Laplace

Sea una señal de tiempo continuo $x(t)$. Definimos la transformada de Laplace de $x(t)$ como:

$$X(s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\} \equiv \left\{s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty\right\}$$

En forma compacta podemos denotar la operación de tomar la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ como:

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$$

Podemos recuperar la señal $x(t)$ a partir de $X(s)$ con σ fija e integrando en ω, de forma tal que el eje $\sigma + j\omega$ sobre el que integramos esté en la ROC de $X(s)$:

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-jT}^{\sigma+jT} X(s)e^{st}ds$$

- **Linealidad:** Sean $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$ e $y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s)$. Entonces tenemos:

  $$\alpha x(t) + \beta y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \alpha X(s) + \beta Y(s)$$

  con

  $$\mathrm{ROC}\left\{\alpha X(s) + \beta Y(s)\right\} \supseteq \mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\} \cap \mathrm{ROC}\left\{Y(s)\right\}$$

- **Desplazamiento temporal y desplazamiento en la frecuencia:** Sea $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$. Entonces tenemos:

  $$x(t-t_0) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{-st_0}X(s),\ \mathrm{ROC}\left\{e^{-st_0}X(s)\right\} = \mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\}$$

  $$x(t)e^{s_0 t} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s-s_0),\ \mathrm{ROC}\left\{X(s-s_0)\right\} = \mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\} + \mathrm{Re}\left\{s_0\right\}$$

- **Escalamiento temporal:** Sea $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$. Entonces tenemos:

  $$x(\alpha t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{s}{\alpha}\right),\ \mathrm{ROC}\left\{\frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{s}{\alpha}\right)\right\} = \frac{\mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\}}{\alpha}$$

- **Convolución:** Sean $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$ e $y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s)$. Entonces tenemos:

  $$z(t) = x(t) * y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)Y(s)$$

  con

  $$\mathrm{ROC}\left\{X(s)Y(s)\right\} \supseteq \mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\} \cap \mathrm{ROC}\left\{Y(s)\right\}$$

- **Diferenciación en el tiempo:** Sea $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$. Podemos escribir:

  $$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s),\ \mathrm{ROC}\left\{sX(s)\right\} \supseteq \mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\}$$

- **Integración el dominio del tiempo:** Sea $x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$. Podemos escribir:

  $$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{X(s)}{s},\ \mathrm{ROC}\left\{\frac{X(s)}{s}\right\} \supseteq \mathrm{ROC}\left\{X(s)\right\} \cap \left\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left\{s\right\} > 0\right\}$$

- **Teoremas del valor inicial y final:** Sea $x(t)$ una señal que vale cero para $t < 0$ y que no tiene impulsos de ningún orden en el origen. Entonces valen los siguientes resultados:

$$x(0+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

Si $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existe:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Tabla de transformadas de Laplace

Señal	**Transformada de Laplace**	**ROC**
$\delta(t)$	1	$\mathbb{C}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > 0\}$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} < 0\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} < 0\}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{\alpha\}\}$
$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{\alpha\}\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{\alpha\}\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{\alpha\}\}$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > 0\}$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\{s\} > 0\}$

10. Propiedades correspondientes al tema de transformada Z

Sea una señal de tiempo discreto $x[n]$. Definimos la transformada Z de $x[n]$ como:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}, \; z \in \mathrm{ROC}\{X(z)\} = \left\{ z = re^{j\omega} \in \mathbb{C} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|r^{-k} < \infty \right\}$$

En forma compacta podemos denotar la operación de tomar la transformada de Laplace de una señal $x[n]$ como:

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$$

La definición de la transformada Z inversa es:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1}dz$$

donde la integración se hace a lo largo de un contorno cerrado contenido en la ROC y en sentido antihorario.

- **Linealidad**: Sea $x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$ y $y[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} Y(z)$. Tenemos que:

$$\alpha x[n] + \beta y[n]] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

con

$$\text{ROC}\left\{\alpha X(z) + \beta Y(z)\right\} \supseteq \text{ROC}\left\{X(z)\right\} \cap \text{ROC}\left\{Y(z)\right\}$$

- **Desplazamiento en el tiempo y desplazamiento en frecuencia**: Consideremos $x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$. Tenemos las siguientes propiedades:

$$x[n-n_0] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z)$$

donde

$$\text{ROC}\left\{z^{-n_0}X(z)\right\} = \text{ROC}\left\{X(z)\right\}$$

con la posible supresión de $z = 0$ o el punto en el infinito. También tenemos:

$$z^{n_0}x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

donde

$$\text{ROC}\left\{X\left(\frac{z}{z_0}\right)\right\} = |z_0|\text{ROC}\left\{X(z)\right\}$$

- **Diferenciación de** $X(z)$: Consideremos $x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$. Tenemos que:

$$nx[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}$$

y donde

$$\text{ROC}\left\{-z\frac{dX(z)}{dz}\right\} = \text{ROC}\left\{X(z)\right\}$$

- **Conjugación**: Consideremos $x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$. Tenemos que:

$$x^*[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(z^*),\ \text{ROC}\left\{X^*(z^*)\right\} = \text{ROC}\left\{X(z)\right\}$$

- **Reflexión temporal**: Sea $x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$. Se puede escribir:

$$x^*[-n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(1/z^*),\ \text{ROC}\left\{X^*(z^*)\right\} = \frac{1}{\text{ROC}\left\{X(z)\right\}}$$

- **Convolución**:Sea $x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$ y $y[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} Y(z)$. Tenemos que:

$$z[n] = x[n] * y[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)Y(z)$$

y donde

$$\text{ROC}\left\{X(z)Y(z)\right\} \supseteq \text{ROC}\left\{X(z)\right\} \cap \text{ROC}\left\{Y(z)\right\}$$

- **Teorema del valor inicial y final**: Sea $x[n]$ tal que es cero para $n < 0$. Entonces vale:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Además si existe $\lim_{n\to\infty} x[n]$ tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

Tabla de transformadas Z

Señal	**Transformada Z**	**ROC**
$\delta[n]$	1	$\mathbb{C}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert > 1\}$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$
$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert\}$
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert\}$
$n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert\}$
$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert\}$
$r^n \cos(\omega_0 n)u[n],\ r > 0$	$\frac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert > r\}$
$r^n \sin(\omega_0 n)u[n],\ r > 0$	$\frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert > r\}$