

Práctica 3 - Circuitos Aritméticos

Sistemas Digitales - FIUBA

Mayo 2020

Herramientas

EDApplayground: <https://www.edaplayground.com/>

GTKWave, GHDL: <https://www.youtube.com/watch?v=H2GyAIYwZbw>

Modelsim: https://www.mentor.com/company/higher_ed/modelsim-student-edition

Notación:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Ejercicio 1 - Dar las expresiones aritméticas de los siguientes formatos numéricos:

- Sin signo (unsigned, US)
- Signo y magnitud (SM)
- Complemento a dos (two's complement 2C)
- Dígito Signado (SD)

Ejercicio 2 - Cuáles de las codificaciones del ejercicio 1 son unívocas?

Ejercicio 3 - Cuáles son los rangos de representación de las codificaciones del ejercicio 1?

Ejercicio 4 - Demostrar el teorema de extensión de signo para la codificación 2C.

Ejercicio 5 - Dar las expresiones aritméticas de las siguientes representaciones en punto fijo:

- Sin signo, $uI.F$, donde $I, F \in \mathbb{Z}$, $N = I + F$ es la cantidad de bits de representación.
- Con signo, $uI.F$, donde $I, F \in \mathbb{Z}$, $N = I + F$ es la cantidad de bits de representación.

Ejercicio 6 - Cuáles son los rangos de representación de las codificaciones del ejercicio 5? Determinar también el tamaño numérico del LSB.

Ejercicio 7 - Implementar en VHDL un multiplicador de N bits (genérico) de acuerdo a la arquitectura presentada en el apéndice H “Computer Arithmetic” (A Quantitative Approach - Hennessy Patterson).

Ejercicio 8 - Implementar en VHDL un divisor de N bits (genérico) con restauración de acuerdo a la arquitectura presentada en el apéndice H “Computer Arithmetic” (A Quantitative Approach - Hennessy Patterson).

Ejercicio 9 - Implementar en VHDL un divisor de N bits (genérico) sin restauración de acuerdo a la arquitectura presentada en el apéndice H “Computer Arithmetic” (A Quantitative Approach - Hennessy Patterson).

Ejercicio 10 - Implementar en VHDL un multiplicador de N bits (genérico), con operandos signados utilizando la codificación de Booth.

Ejercicio 11 - Implementar en VHDL un barrel shifter de N bits con M líneas indicativas del desplazamiento ($N = 2^M$). Además debe permitir desplazamiento tanto a derecha como a izquierda, teniendo en cuenta el tipo (aritmético o lógico).

Ejercicio 12 - Dar las expresiones aritméticas de la representación en punto flotante de tamaño de significando N_F y exponente N_e .

Ejercicio 13 - De acuerdo a la norma IEEE-754, indicar qué número de precisión simple representa la siguiente palabra de 32 bits:

1	10000011	110000000000000000000000
---	----------	--------------------------

Ejercicio 14 - Aplicar los cuatro modos de redondeo a los siguientes valores (aritmética decimal con redondeo a 3 cifras):

Valor	+8	-8	0	Nearest Even
2,452				
2,455				
2,465				
-2,452				

Ejercicio 15 - Calcular en binario (4 bits) el producto entre $-1.011_2 \times 2^2$ y $1.011_2 \times 2^3$. Aplicar al resultado los cuatro métodos de redondeo.

Ejercicio 15 - . Calcular en binario (5 bits) el producto entre $1.1001_2 \times 2^5$ y $1.0010_2 \times 2^2$. Aplicar al resultado los cuatro métodos de redondeo.

Ejercicio 1

Ejercicio 1 - Dar las expresiones aritméticas de los siguientes formatos numéricos:

- Sin signo (unsigned, US)

Sea $x \in \mathbb{N}_0$, $x_i \in \{0, 1\}$

$$x = \sum_{i=0}^{N-1} x_i 2^i \quad (1)$$

- Signo y magnitud (SM)

Sea $x \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \{0, 1\}$

$$x = -1^{x_{N-1}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i \right) \quad (2)$$

- Complemento a dos (two's complement 2C)

Sea $x \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \{0, 1\}$

$$x = -x_{N-1} 2^{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i \quad (3)$$

- Dígito Signado (SD)

Sea $x \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \{-1, 0, 1\}$

$$x = \sum_{i=0}^{N-1} x_i 2^i \quad (4)$$

Ejercicio 4

Teorema de extensión de signo para 2C:

Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que tiene un representación 2C de N bits dada por

$$x = -x_{N-1}2^{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i \quad (5)$$

Entonces la representación 2C de $M > N$ bits estará dada por

$$x = -x_{N-1}2^{M-1} + \sum_{i=N-1}^{M-2} x_{N-1}2^i + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i \quad (6)$$

Es decir, que la nueva representación en $M > N$ bits se obtiene repitiendo el MSB de x por $M - N$ veces.

Ejemplo:

$$x = -10_D, N = 5, M = 7$$

Entonces

$$x = -10_D = 10110_{2C-N} = 1110110_{2C-M}$$

Demostración:

Basta con ver que si $x_{N-1} \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} -x_{N-1}2^{M-1} + \sum_{i=N-1}^{M-2} x_{N-1}2^i &= -2^{M-1} + (2^{N-1} + 2^N + \dots + 2^{M-3} + 2^{M-2}) \\ &= -2^{N-1}2^{M-N} + 2^{N-1} (1 + 2 + \dots + 2^{M-N-1}) \\ &= -2^{N-1}2^{M-N} + 2^{N-1} (2^{M-N} - 1) \\ &= 2^{N-1} (-2^{M-N} + 2^{M-N} - 1) \\ &= -2^{N-1} \end{aligned} \quad (7)$$

Por el contrario, si $x_{N-1} = 0$ entonces

$$-x_{N-1}2^{M-1} + \sum_{i=N-1}^{M-2} x_{N-1}2^i = 0 \quad (8)$$

Luego,

$$x = -x_{N-1}2^{M-1} + \sum_{i=N-1}^{M-2} x_{N-1}2^i + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i = -2^{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i \quad (9)$$

Ejercicio 5

Dar las expresiones aritméticas de las siguientes representaciones en punto fijo:

- Sin signo, $uI.F$, donde $I, F \in \mathbb{Z}$, $N = I + F$ es la cantidad de bits de representación.

$$\begin{aligned}x &= \left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i 2^i \right) 2^{-F} \\x &= \sum_{i=0}^{N-1} x_i 2^{i-F}\end{aligned}\tag{10}$$

- Con signo, $sI.F$, donde $I, F \in \mathbb{Z}$, $N = I + F$ es la cantidad de bits de representación.

$$\begin{aligned}x &= \left(-x_{N-1} 2^{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^i \right) 2^{-F} \\&= -x_{N-1} 2^{I-1} + \sum_{i=0}^{N-2} x_i 2^{i-F}\end{aligned}\tag{11}$$